

Užití vektorů.

Lenka Příbylová

18. března 2011

Obsah

Najděte velikost vektoru $(2, -3, 1)$	3
Najděte vektor kolmý k vektoru $(3, 7)$	5
Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$	10
Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$	16
Jaký úhel svírají vektory $(-3, 1, 7)$ a $(5, 1, -2)$?	23
Dokažte součtový vzorec.	27
Najděte kolmý průmět vektoru $(2, -2, 1)$ na vektor $(1, 0, 0)$	32
Najděte kolmý průmět vektoru $(1, 2)$ na vektor $(3, -4)$	36
Najděte kolmý průmět vektoru $(3, 1, 1)$ na vektor $(2, 2, 5)$	40

Najděte velikost vektoru $(2, -3, 1)$.

Najděte velikost vektoru $(2, -3, 1)$.

$$|(2, -3, 1)| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

Najděte vektor kolmý k vektoru $(3,7)$.

Najděte vektor kolmý k vektoru $(3,7)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2)$ kolmý k vektoru $(3,7)$,

Najděte vektor kolmý k vektoru $(3,7)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2)$ kolmý k vektoru $(3,7)$, tj.

$$(u_1, u_2) \cdot (3,7) = 0$$

Pro kolmé vektory platí $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Najděte vektor kolmý k vektoru $(3,7)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2)$ kolmý k vektoru $(3,7)$, tj.

$$(u_1, u_2) \cdot (3,7) = 0$$

odtud

$$3u_1 + 7u_2 = 0$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

Najděte vektor kolmý k vektoru $(3,7)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2)$ kolmý k vektoru $(3,7)$, tj.

$$(u_1, u_2) \cdot (3,7) = 0$$

odtud

$$3u_1 + 7u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = (7, -3).$$

Řešení samozřejmě není jednoznačné. Všechny vektory kolmé k vektoru $(3,7)$ jsou násobky vektoru u .

Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$.

Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$,

Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (2, 3, -4) = 0$$

Pro kolmé vektory platí $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (2, 3, -4) = 0$$

odtud

$$2u_1 + 3u_2 - 4u_3 = 0.$$

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (2, 3, -4) = 0$$

odtud

$$2u_1 + 3u_2 - 4u_3 = 0.$$

Toto je obecný tvar roviny procházející počátkem s normálovým vektorem $(2, 3, -4)$. Všechny vektory, které v této rovině leží jsou kolmé na vektor $(2, 3, -4)$.

Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (2, 3, -4) = 0$$

odtud

$$2u_1 + 3u_2 - 4u_3 = 0.$$

Toto je obecný tvar roviny procházející počátkem s normálovým vektorem $(2, 3, -4)$. Všechny vektory, které v této rovině leží jsou kolmé na vektor $(2, 3, -4)$. **Můžeme volit například vektor $u = (2, 0, 1)$.**

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$.

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k oběma vektorům $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$,

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k oběma vektorům $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 3, 0) = 0 \quad \text{a} \quad (u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 1, -2) = 0$$

Pro kolmé vektory platí $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k oběma vektorům $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 3, 0) = 0 \quad \text{a} \quad (u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 1, -2) = 0$$

odtud

$$u_1 + 3u_2 = 0 \quad \text{a} \quad u_1 + u_2 - 2u_3 = 0.$$

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k oběma vektorům $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 3, 0) = 0 \quad \text{a} \quad (u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 1, -2) = 0$$

odtud

$$u_1 + 3u_2 = 0 \quad \text{a} \quad u_1 + u_2 - 2u_3 = 0.$$

$$u_1 = -3u_2 \quad \Rightarrow \quad -3u_2 + u_2 - 2u_3 = 0,$$

Vyjádříme u_1 z první rovnice a dosadíme do druhé.

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k oběma vektorům $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 3, 0) = 0 \quad \text{a} \quad (u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 1, -2) = 0$$

odtud

$$u_1 + 3u_2 = 0 \quad \text{a} \quad u_1 + u_2 - 2u_3 = 0.$$

$$u_1 = -3u_2 \quad \Rightarrow \quad -3u_2 + u_2 - 2u_3 = 0,$$

tj.

$$u_3 = -u_2,$$

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k oběma vektorům $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 3, 0) = 0 \quad \text{a} \quad (u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 1, -2) = 0$$

odtud

$$u_1 + 3u_2 = 0 \quad \text{a} \quad u_1 + u_2 - 2u_3 = 0.$$

$$u_1 = -3u_2 \quad \Rightarrow \quad -3u_2 + u_2 - 2u_3 = 0,$$

tj.

$$u_3 = -u_2, \quad \Rightarrow \quad u = (-3, 1, -1).$$

Řešení samozřejmě není jednoznačné. Všechny vektory kolmé k rovině ρ jsou násobky vektoru u .

Jaký úhel svírají vektory $(-3, 1, 7)$ a $(5, 1, -2)$?

Jaký úhel svírají vektory $(-3, 1, 7)$ a $(5, 1, -2)$?

$$\varphi = \arccos \frac{(-3, 1, 7) \cdot (5, 1, -2)}{|(-3, 1, 7)| \cdot |(5, 1, -2)|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Jaký úhel svírají vektory $(-3, 1, 7)$ a $(5, 1, -2)$?

$$\begin{aligned}\varphi &= \arccos \frac{(-3, 1, 7) \cdot (5, 1, -2)}{|(-3, 1, 7)| \cdot |(5, 1, -2)|} \\ &= \arccos \frac{-15 + 1 - 14}{\sqrt{9 + 1 + 49} \sqrt{25 + 1 + 4}}\end{aligned}$$

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

Jaký úhel svírají vektory $(-3, 1, 7)$ a $(5, 1, -2)$?

$$\varphi = \arccos \frac{(-3, 1, 7) \cdot (5, 1, -2)}{|(-3, 1, 7)| \cdot |(5, 1, -2)|}$$

$$= \arccos \frac{-15 + 1 - 14}{\sqrt{9 + 1 + 49} \sqrt{25 + 1 + 4}}$$

$$= \arccos \frac{-28}{\sqrt{59} \sqrt{30}} \doteq \arccos(-0.66) \doteq 131,7^\circ$$

Dokažte, že platí $A \cos \alpha + B \sin \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{B}{A})$.

Dokažte, že platí $A \cos \alpha + B \sin \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{B}{A})$.

$A \cos \alpha + B \sin \alpha$

Dokažte, že platí $A \cos \alpha + B \sin \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{B}{A})$.

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = (A, B) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

Výraz můžeme zapsat jako skalární součin.

Dokažte, že platí $A \cos \alpha + B \sin \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha - \arctg \frac{B}{A})$.

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = (A, B) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \varphi$$

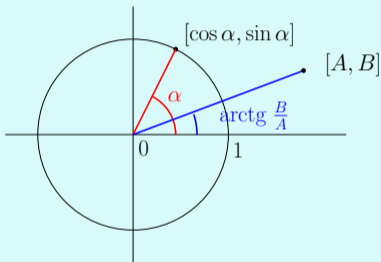
Podle vzorce $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ dosadíme:

$$|(A, B)| = \sqrt{A^2 + B^2}, |(\cos \alpha, \sin \alpha)| = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1,$$

φ je úhel, který svírají vektory (A, B) a $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Dokažte, že platí $A \cos \alpha + B \sin \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{B}{A})$.

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = (A, B) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \varphi$$



$$\varphi = \alpha - \operatorname{arctg} \frac{B}{A}$$

Najděte kolmý průmět vektoru $(2, -2, 1)$ na vektor $(1, 0, 0)$.

Najděte kolmý průmět vektoru $(2, -2, 1)$ na vektor $(1, 0, 0)$.

$$\vec{c} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)}(1, 0, 0)$$

Pro průmět \vec{c} vektoru \vec{b} na vektor \vec{a} platí

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$$

Najděte kolmý průmět vektoru $(2, -2, 1)$ na vektor $(1, 0, 0)$.

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \frac{(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)}(1, 0, 0) \\ &= \frac{2}{1}(1, 0, 0)\end{aligned}$$

Skalární součin je definován takto:

$$(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 0) = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2,$$

$$(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1.$$

Najděte kolmý průmět vektoru $(2, -2, 1)$ na vektor $(1, 0, 0)$.

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \frac{(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)}(1, 0, 0) \\ &= \frac{2}{1}(1, 0, 0) = (2, 0, 0).\end{aligned}$$

Průmět je dvojnásobkem jednotkového vektoru $(1, 0, 0)$.

Najděte kolmý průmět vektoru $(1, 2)$ na vektor $(3, -4)$.

Najděte kolmý průmět vektoru $(1, 2)$ na vektor $(3, -4)$.

$$\vec{c} = \frac{(1, 2) \cdot (3, -4)}{(3, -4) \cdot (3, -4)} (3, -4)$$

Pro průmět \vec{c} vektoru \vec{b} na vektor \vec{a} platí

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$$

Najděte kolmý průmět vektoru $(1, 2)$ na vektor $(3, -4)$.

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \frac{(1, 2) \cdot (3, -4)}{(3, -4) \cdot (3, -4)} (3, -4) \\ &= \frac{-5}{25} (3, -4)\end{aligned}$$

Skalární součin je definován takto:

$$(1, 2) \cdot (3, -4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) = -5,$$

$$(3, -4) \cdot (3, -4) = 3 \cdot 3 + (-4) \cdot (-4) = 25.$$

Najděte kolmý průmět vektoru $(1, 2)$ na vektor $(3, -4)$.

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \frac{(1, 2) \cdot (3, -4)}{(3, -4) \cdot (3, -4)} (3, -4) \\ &= \frac{-5}{25} (3, -4) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).\end{aligned}$$

Průmět je pětinou vektoru $(-3, 4)$.

Najděte kolmý průmět vektoru $(3, 1, 1)$ na vektor $(2, 2, 5)$.

Najděte kolmý průmět vektoru $(3, 1, 1)$ na vektor $(2, 2, 5)$.

$$\vec{c} = \frac{(3, 1, 1) \cdot (2, 2, 5)}{(2, 2, 5) \cdot (2, 2, 5)}(2, 2, 5)$$

Pro průmět \vec{c} vektoru \vec{b} na vektor \vec{a} platí

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$$

Najděte kolmý průmět vektoru $(3, 1, 1)$ na vektor $(2, 2, 5)$.

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \frac{(3, 1, 1) \cdot (2, 2, 5)}{(2, 2, 5) \cdot (2, 2, 5)}(2, 2, 5) \\ &= \frac{13}{33}(2, 2, 5).\end{aligned}$$

Skalární součin je definován takto:

$$(3, 1, 1) \cdot (2, 2, 5) = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 13,$$

$$(2, 2, 5) \cdot (2, 2, 5) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 33.$$

KONEC