

II. 5. Aplikace integrálního počtu

Geometrické aplikace

- Určitý integrál

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

lze geometricky interpretovat jako *obsah plochy vymezené grafem funkce* f v intervalu $[a, b]$.

- *Obsah obrazce ohraničeného uzavřenou křivkou* o parametrických souřadnicích $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$:

$$S = - \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \psi'(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(t) \psi'(t) - \psi(t) \varphi'(t)] dt.$$

Křivka je orientována kladně, tzn., že plocha leží nalevo od křivky.

- *Obsah plochy vymezené grafy funkcí* f a g v intervalu $[a, b]$ vypočteme pomocí určitého integrálu

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

- *Délka grafu funkce* f pro $x \in [a, b]$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

- *Délka křivky* zadané parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

- *Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací podgrafu spojitě nezáporné funkce f , $x \in [a, b]$ kolem osy x :

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

- *Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací podgrafu spojitě nezáporné funkce f , $x \in [a, b]$, $a > 0$, kolem osy y

$$V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx.$$

- *Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) \geq 0$, kolem osy x :

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \cdot |\varphi'(t)| dt.$$

- *Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) \geq 0$, kolem osy y :

$$V_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi(t) |\varphi'(t)| dt.$$

- *Obsah pláště rotačního tělesa*, které vznikne rotací podgrafu spojitě diferencovatelné nezáporné funkce f , $x \in [a, b]$ kolem osy x :

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

- *Obsah pláště rotačního tělesa*, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) \geq 0$, kolem osy x :

$$Q_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Fyzikální aplikace

Funkce $s(t)$ udává *délkovou hustotu* v bodě $[\varphi(t), \psi(t)]$ pro křivku zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom M vyjadřuje *hmotnost křivky* a

$$\left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M} \right]$$

jsou souřadnice jejího *těžiště*, kde S_x a S_y jsou tzv. *statické momenty* křivky vzhledem k ose x , resp. y . Přičemž platí

$$\begin{aligned} M &= \int_{\alpha}^{\beta} s(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \\ S_x &= \int_{\alpha}^{\beta} s(t) \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \\ S_y &= \int_{\alpha}^{\beta} s(t) \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \end{aligned}$$

Nechť nyní funkce $s(x)$ udává *délkovou hustotu* v bodě $[x, f(x)]$ pro křivku grafem funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$. Potom platí

$$\begin{aligned} M &= \int_a^b s(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \\ S_x &= \int_a^b s(x) f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \\ S_y &= \int_a^b x s(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \end{aligned}$$

Funkce $S(t)$ udává *hustotu* obrazce vymezeného křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom M vyjadřuje jeho *hmotnost* a

$$\left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M} \right]$$

jsou souřadnice jeho *těžiště*. Přičemž platí

$$\begin{aligned} M &= \int_{\alpha}^{\beta} S(t) \psi(t) \varphi'(t) dt, \\ S_x &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} S(t) \psi^2(t) \varphi'(t) dt, \\ S_y &= \int_{\alpha}^{\beta} S(t) \psi(t) \varphi(t) \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

Nechť nyní funkce $S(t)$ udává *hustotu* obrazce vymezeného křivkou určenou grafem funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$, a osou x . Potom M vyjadřuje jeho *hmotnost* a

$$\left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M} \right]$$

jsou souřadnice jeho *těžiště*. Přičemž platí

$$M = \int_a^b S(x)f(x) dx,$$

$$S_x = \frac{1}{2} \int_a^b S(x)f^2(x) dx,$$

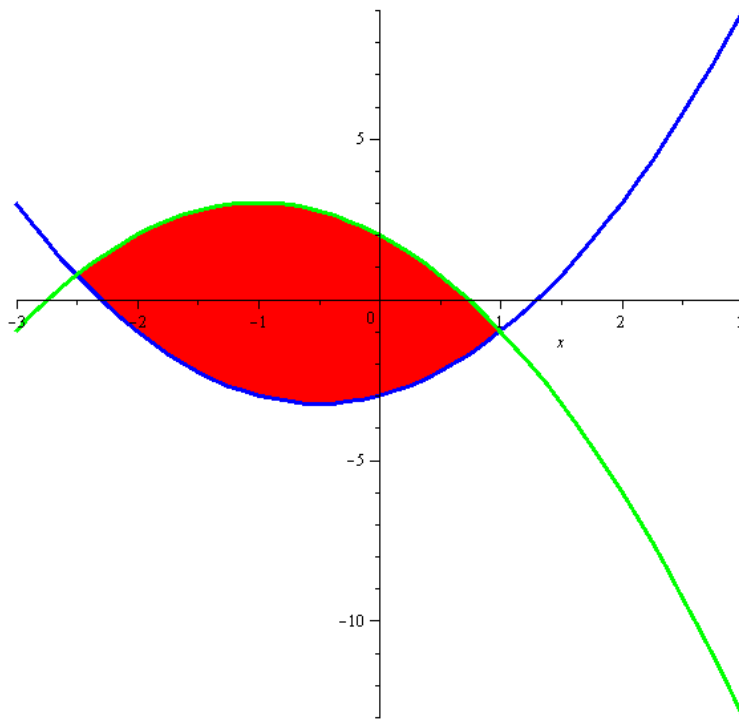
$$S_y = \int_a^b xS(x)f(x) dx.$$

(436) Určete obsah plochy vymezené grafy funkcí $f(x) = x^2 + x - 3$ a $g(x) = -x^2 - 2x + 2$.

Řešení:

Nejdříve musíme určit průsečík obou funkcí, tj. vyřešit rovnici $f(x) = g(x)$, tzn. že

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2} \text{ a } x_2 = 1.$$



Navíc, v intervalu $[-\frac{5}{2}, 1]$ platí $g(x) > f(x)$, proto hledaný obsah vypočteme s pomocí následujícího integrálu

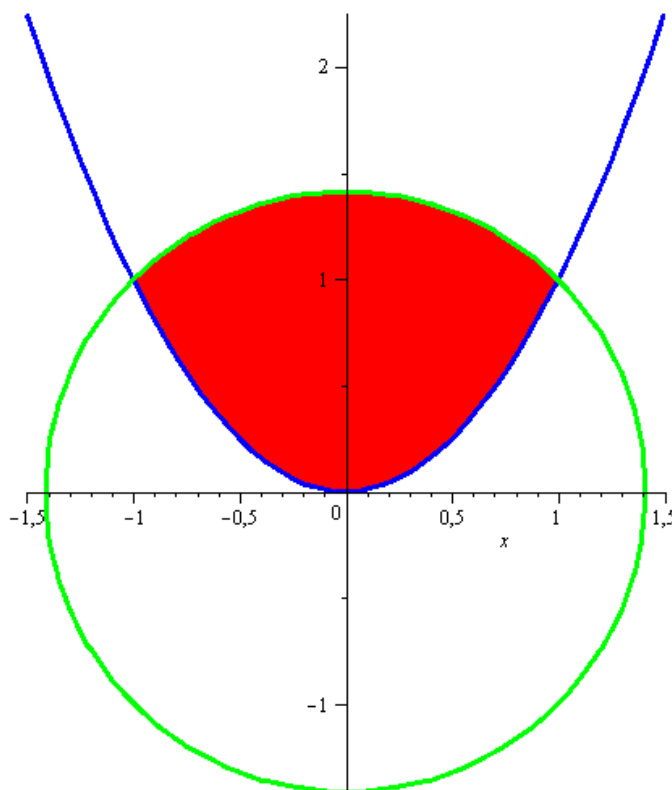
$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{5}{2}}^1 [(-x^2 - 2x + 2) - (x^2 + x - 3)] dx = \int_{-\frac{5}{2}}^1 (-2x^2 - 3x + 5) dx = \\ &= \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x \right]_{-\frac{5}{2}}^1 = -\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 5 - \left(\frac{250}{54} - \frac{75}{8} - \frac{25}{2} \right) = \frac{343}{24}. \end{aligned}$$

(437) Určete obsah plochy ohraničené křivkami $x^2 + y^2 = 2$ a $y = x^2$.

Řešení:

Nejdříve musíme určit průsečík obou funkcí, tj.

$$y + y^2 = 2 \Rightarrow y_1 = -2 \text{ a } y_2 = 1.$$



Vzhledem k podmínce $y = x^2$ je pro nás zajímavá pouze hodnota y_2 . Potom $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Navíc, na intervalu $[-1, 1]$ platí $\sqrt{2 - x^2} > x^2$, proto hledaný obsah dostaneme pomocí integrálu

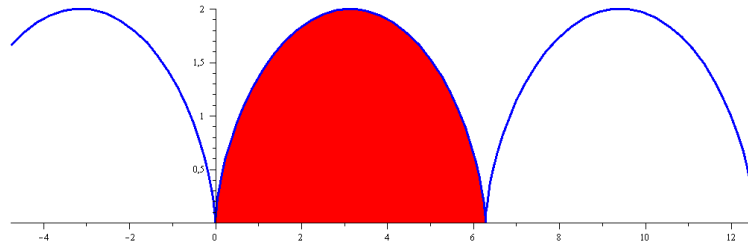
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (\sqrt{2 - x^2} - x^2) dx = 2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{2 - x^2} + \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili následující integrál

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2 - x^2} dx \left| \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{2}} = \sin t \\ \frac{dx}{\sqrt{2}} = \cos t dt \end{array} \right| &= \int \sqrt{2 - 2 \sin^2 t} \sqrt{2} \cos t dt = \\ &= \sqrt{2} \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \sqrt{2} \cos t dt = 2 \int \cos^2 t dt \quad | \cos 2t = 2 \cos^2 t - 1 | = \\ &= 2 \int \left(\frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \right) dt = \int (\cos 2t + 1) dt = \frac{1}{2} \sin 2t + t + C = \\ &= \sin t \cos t + \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C = \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} + \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{2 - x^2} + \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

(438) Určete obsah oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení:



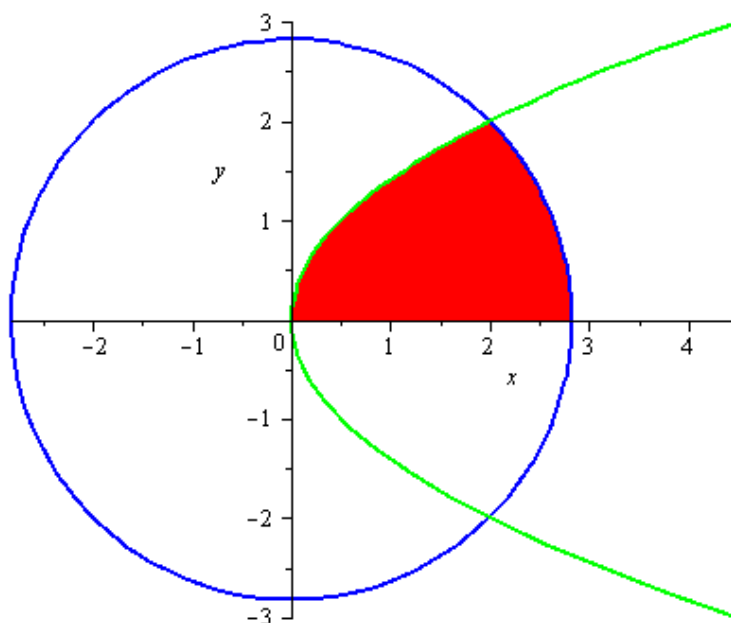
Dosazením do vzorce pro obsah plochy mezi parametricky zadanými křivkami obdržíme

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) (1 - \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt \quad \left| \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right| = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \left[\frac{3}{2}t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = 3\pi.
 \end{aligned}$$

(439) Určete, v jakém poměru dělí křivka $P : y^2 = 2x$ plochu kruhu $K : x^2 + y^2 = 8$.

Řešení:

Zadání je znázorněno na následujícím obrázku.



Z obrázku je zřejmé, že ve stejném poměru, jako dělí parabola kruh, dělí horní větev paraboly $y = \sqrt{2x}$ horní půlkruh $y = \sqrt{8 - x^2}$. Pro výpočet budeme potřebovat souřadnice průsečíku horní větve paraboly a horního půlkruhu. Poznamenejme, že nás zajímá pouze průsečík v I. kvadrantu, což nám umožní volnější úpravy.

$$\begin{aligned} y &= y, \\ \sqrt{2x} &= \sqrt{8 - x^2}, \\ 2x &= 8 - x^2, \\ x^2 + 2x - 8 &= 0, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Průsečík má tedy souřadnice $[2, 2]$. Nyní spočítáme obsah červeně vyznačené plochy.

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \sqrt{2x} \, dx + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2} \, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2} \, dx = \\
 &= \frac{8}{3} + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2} \, dx \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{8} \sin t \\ dx = \sqrt{8} \cos t \, dt \\ \sqrt{8} \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} = \\ 2 \rightsquigarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \right. = \frac{8}{3} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8-8\sin^2 t} \sqrt{8} \cos t \, dt = \\
 &= \frac{8}{3} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos^2 t \, dt = \frac{8}{3} + 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt = \\
 &= \frac{8}{3} + 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2t \, dt = \frac{8}{3} + 4 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{8}{3} + 4 \left(\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3} + \pi.
 \end{aligned}$$

Z rovnice kruhu vidíme, že jde o kruh o poloměru $\sqrt{8}$. Protože červená plocha má obsah $\frac{2}{3} + \pi$, zbytek horního půlkruhu má obsah $4\pi - (\frac{2}{3} + \pi) = 3\pi - \frac{2}{3}$. Hledaný poměr je tedy

$$\left(3\pi - \frac{2}{3} \right) : \left(\pi + \frac{2}{3} \right),$$

neboli

$$(9\pi - 2) : (3\pi + 2).$$

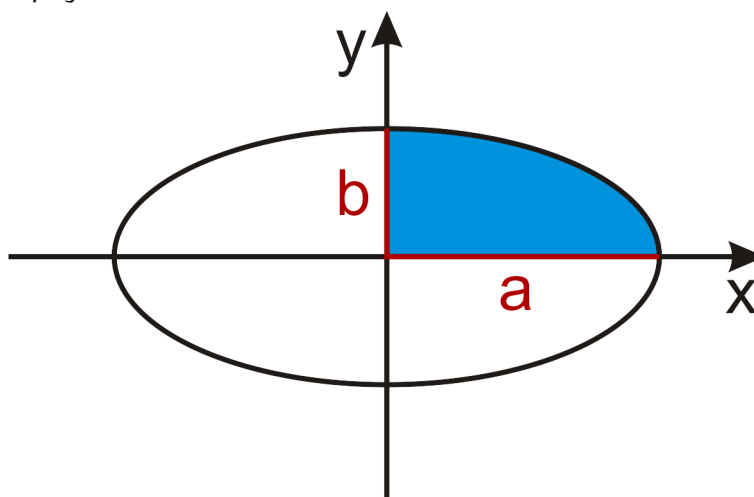
(440) Odvoďte vzorec pro výpočet plochy elipsy s poloosami a a b .

Řešení:

Obecná rovnice zadané elipsy je tvaru

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tato rovnice zadává implicitně funkci horní a dolní půlelipsy. Příklad vyřešíme tak, že si z rovnice elipsy explicitně vyjádříme funkci horní půlelipsy a pomocí ní pak spočítáme obsah čtvrtiny elipsy, která se nachází v I. kvadrantu.



Horní půlelipsa je dána funkcí

$$f: y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Interval, na kterém tato funkce zadává čtvrtelipsu v I. kvadrantu je $x \in [0, a]$. Můžeme tedy počítat

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \sin t \\ a \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \\ 0 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2t dt = \\ &= \frac{ab}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{4}. \end{aligned}$$

Vzorec pro obsah elipsy s poloosami a a b je tedy

$$S = \pi ab.$$

(441) Určete délku grafu funkce $f(x) = \ln x$ pro $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$.

Řešení:

Dosazením do vzorce dostaneme

$$\begin{aligned}
 l &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx \left[\begin{array}{l} t^2 = x^2 + 1 \\ 2t dt = 2x dx \\ \sqrt{3} \rightsquigarrow 2 \\ \sqrt{15} \rightsquigarrow 4 \end{array} \right] = \\
 &= \int_2^4 \frac{\sqrt{t^2}}{t^2-1} t dt = \int_2^4 \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int_2^4 \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = \\
 &= \int_2^4 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt = \left[t + \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{2} \ln|t+1| \right]_2^4 = \\
 &= 4 + \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5 - 2 - \frac{1}{2} \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 3 = 2 + \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5.
 \end{aligned}$$

(442) Určete délku oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení:

Aplikací odpovídajícího vzorce obdržíme

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + (1 - \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt \quad | 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} | = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8. \end{aligned}$$

(443) Určete délku oblouku řetězovky $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$, $I = [-1, 1]$.

Řešení:

Připomeňme, že platí

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

$$\begin{aligned} l &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\cosh^2 \frac{x}{a}} dx \quad | \text{cosh je všude kladný} | = \\ &= \int_{-1}^1 \cosh \frac{x}{a} dx = [a \sinh \frac{x}{a}]_{-1}^1 = a (\sinh \frac{1}{a} - \sinh \frac{-1}{a}) = \\ &= a(e^{\frac{1}{a}} - e^{-\frac{1}{a}}). \end{aligned}$$

(444) Vypočtete délku oblouku křivky $f(x) = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ pro $x \in [1, 2]$.

Řešení:

Nejdříve vypočteme a upravíme výrazy potřebné pro výpočet integrálu, tj.

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)} \Rightarrow \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{\frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{(e^x+1)^2(e^x-1)^2}} = \frac{1 + e^{2x}}{e^{2x} - 1}.$$

Proto můžeme spočítat

$$\begin{aligned} l &= \int_2^1 \frac{1 + e^{2x}}{e^{2x} - 1} dt = \int_2^1 \left(\frac{1}{e^{2x} - 1} + \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1} \right) dx = \left[-x + \frac{1}{2} \ln |e^{2x} - 1| + \frac{1}{2} \ln |e^{2x} - 1| \right]_1^2 = \\ &= (-2 + \ln(e^4 - 1) + 1 - \ln(e^2 - 1)) = -1 + \ln \frac{(e^2 - 1)(e^2 + 1)}{e^2 - 1} = \ln(e^2 + 1) - 1 = \ln \frac{e^2 + 1}{e}, \end{aligned}$$

přičemž jsem využili následující dva integrály

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^{2x} - 1} \Big|_{\substack{t = 2x \\ dt = 2 dx}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{e^t - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{e^t}{e^{2t} - e^t} dt \Big|_{e^t = u} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - u} = \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{1+u} \right) du = -\frac{1}{2} \ln |u| + \frac{1}{2} \ln |u - 1| + C = \\ &= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \ln |e^t - 1| + C = -x + \frac{1}{2} \ln |e^{2x} - 1| + C; \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1} dx \Big|_{\substack{t = e^{2x} \\ dt = 2e^{2x} dx}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - 1} = \frac{1}{2} \ln |t - 1| + C = \frac{1}{2} \ln |e^{2x} - 1| + C.$$

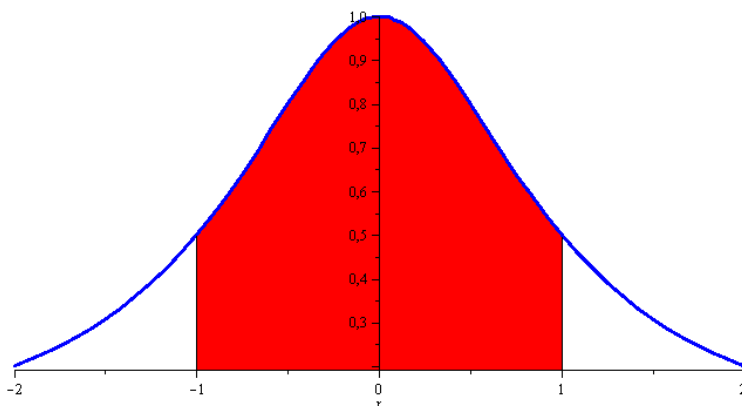
(445) Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin 3x$, $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}]$, kolem osy x .

Řešení:

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{6}} \left(1 + \frac{1}{2} \sin 3x\right)^2 dx = \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{6}} \left(1 + \sin 3x + \frac{1}{4} \sin^2 3x\right) dx \quad \left| \sin^2 3x = \frac{1}{2} (1 - \cos 6x) \right| = \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{6}} \left(1 + \sin 3x + \frac{1}{8} (1 - \cos 6x)\right) dx = \\ &= \pi \left[x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{8} x - \frac{1}{48} \sin 6x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{6}} = \frac{33\pi^2}{16} - \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

- (446) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$, kolem osy x .

Řešení:



Poněvadž funkce f je sudá, můžeme spočítat poloviční objem na intervalu $[0, 1]$. Proto

$$V_x = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^2 dx = 2\pi \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4}(\pi + 2),$$

neboť

$$\int \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^2 dx = K_2(0, 1) = \frac{1}{2} K_1(0, 1) + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + C.$$

(447) Určete objem tělesa, které vznikne rotací prvního oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$, kolem osy x .

Řešení:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t) dt = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\ &= \pi \left[t - 3 \sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4} \sin 2t - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = \pi (2\pi + 3\pi) = 5\pi^2, \end{aligned}$$

neboť platí

$$\begin{aligned} \int \cos^2 t dt &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C; \\ \int \cos^3 t dt &= \int (1 - \sin^2 t) \cos t dt \left| \begin{array}{l} u = \sin t \\ du = \cos t dt \end{array} \right. = \int (1 - u^2) du = \\ &= u - \frac{u^3}{3} + C = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + C. \end{aligned}$$

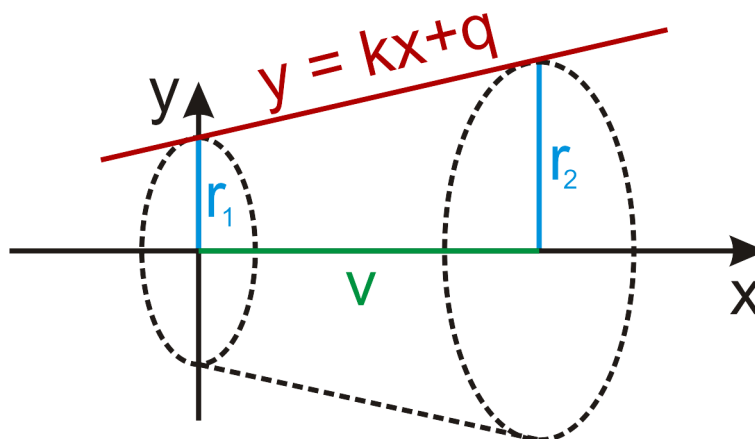
- (448) Najděte vzorec pro výpočet objemu komolého kužele s poloměrem podstav r_1, r_2 a výškou v . Jaký je objem „nekomolého“ kužele?

Řešení:

Komolý kužel lze vytvořit tak, že necháme rotovat lichoběžník s vrcholy

$$[0, 0], \quad [v, 0], \quad [v, r_2], \quad [0, r_1]$$

kolem osy x .



K výpočtu ovšem potřebujeme funkční předpis přímky dané body $[0, r_1]$ a $[v, r_2]$. Ten najdeme ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$. Dosazením bodu $[0, r_1]$ do rovnice přímky ihned dostaneme, že $q = r_1$. Pomocí této znalosti a dosazením bodu $[v, r_2]$ do rovnice přímky dostaneme směrnici $k = \frac{r_2 - r_1}{v}$. Úsečka, jejíž rotací vznikne plášť studovaného komolého kužele je tedy dána předpisem

$$y = \frac{r_2 - r_1}{v}x + r_1, \quad x \in [0, v].$$

Nyní použijeme známý vzorec

$$V_x = \pi \int_0^v \left(\frac{r_2 - r_1}{v}x + r_1 \right)^2 dt.$$

Umocním závorky a jednoduchou integrací polynomu obdržíme výsledek

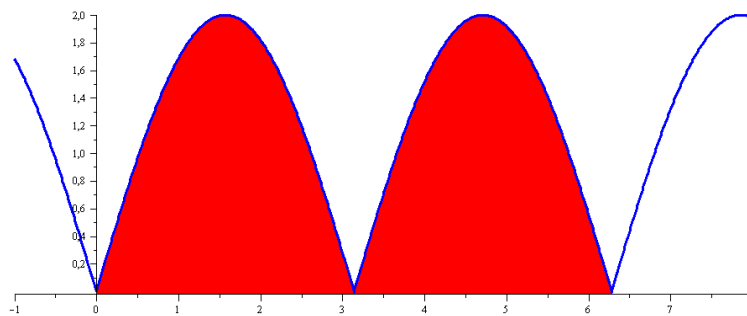
$$V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Obyčejný kužel je speciální případ kužele komolého s nulovým poloměrem jedné podstavy. Tedy položíme-li např. $r_1 = 0, r_2 = r$, získáme vzorec pro objem „obyčejného“ kužele ve tvaru

$$V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$$

(449) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = 2|\sin x|$, $x \in [0, 2\pi]$, kolem osy x .

Řešení:



Oba oblouky sinusoidy jsou stejné, můžeme se omezit pouze na interval $[0, \pi]$, proto

$$\begin{aligned} Q_x &= 2 \cdot 2\pi \int_0^{2\pi} (2 \sin x \sqrt{1 + 4 \cos^2 x}) dx \left| \begin{array}{l} 2 \cos x = t \\ -2 \sin x dx = dt \\ 0 \rightsquigarrow 2 \\ \pi \rightsquigarrow -2 \end{array} \right. = \\ &= -4\pi \int_2^{-2} \sqrt{1 + t^2} dt = 8 \int_0^2 \sqrt{1 + t^2} dt = 8\pi \left[\frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{1 + t^2}| + \frac{t}{2} \sqrt{1 + t^2} \right]_0^2 = \\ &= 8 \left(\frac{1}{2} \ln (2 + \sqrt{5}) + \sqrt{5} \right) = 4\pi \ln(2 + \sqrt{5}) + 8\pi\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili následující výpočet primitivní funkce

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + t^2} dt \left| \begin{array}{l} t = \sinh u \\ dt = \cosh u du \end{array} \right. &= \int \cosh^2 u du \quad | \cosh 2u = 2 \cosh^2 u - 1 | = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\cosh 2u + 1}{2} du = \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh 2u}{2} + u \right) + C = \\ &= \frac{\sinh u \cosh u}{2} + \frac{u}{2} + C \quad | \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \Rightarrow \cosh u = \sqrt{\sinh^2 u + 1} | = \\ &= \frac{t\sqrt{t^2 + 1}}{2} + \frac{\operatorname{argsinh} t}{2} + C. \end{aligned}$$

Navíc přímým výpočtem ověříme, že

$$\operatorname{argsinh} t = \ln |t + \sqrt{t^2 + 1}|.$$

Položme $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$, potom

$$\begin{aligned}\ln \left| y + \sqrt{y^2 + 1} \right| &= \ln \left| \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} + 1} \right| = \\ &= \ln \left| \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}} \right| = \\ &= \ln \left| \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}} \right| = \\ &= \ln \left| \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right| = \ln |e^x| = x = \operatorname{argsinh} y.\end{aligned}$$

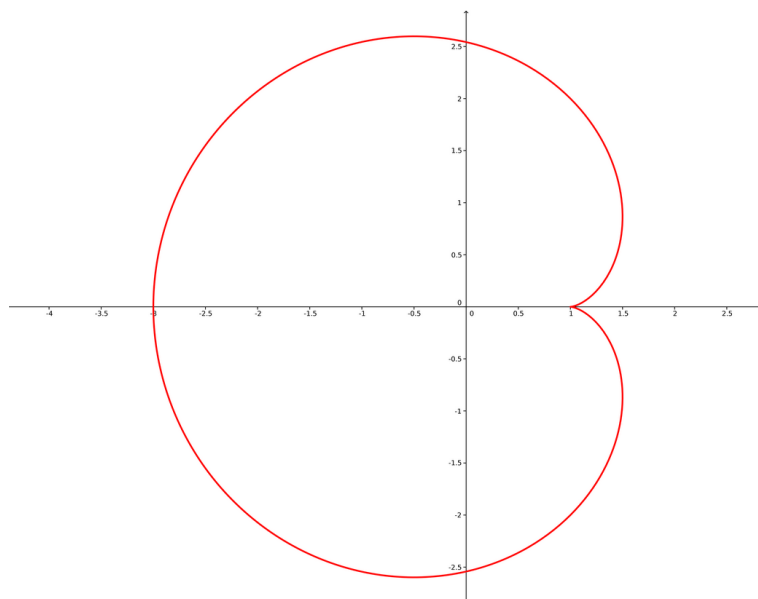
(450) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = 4 + x$, $x \in [-4, 2]$, kolem osy x .

Řešení:

$$\begin{aligned} Q_x &= 2\pi \int_{-4}^2 (4+x)\sqrt{1+1} \, dx = 2\sqrt{2}\pi \int_{-4}^2 (4+x) \, dx = \\ &= 2\sqrt{2}\pi \left[4x + \frac{x^2}{2} \right]_{-4}^2 = 2\sqrt{2}\pi \left(8 + \frac{4}{2}16 - \frac{16}{2} \right) = 36\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

(451) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací kardioidy (srdcovky) $x = 2 \cos t - \cos 2t$, $y = 2 \sin t - \sin 2t$, $t \in [0, \pi]$, kolem osy x .

Řešení:



$$\begin{aligned}
 Q &= 2\pi \int_0^{\pi} (2 \sin t - \sin 2t) \sqrt{(-2 \sin t + 2 \sin 2t)^2 + (2 \cos t - 2 \cos 2t)^2} dt = \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} (2 \sin t - \sin 2t) \sqrt{8} \sqrt{-\sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t} dt \left| \begin{array}{l} \sin 2t = 2 \sin t \cos t \\ \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \end{array} \right| = \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} (2 \sin t - \sin 2t) \sqrt{8} \sqrt{1 - \cos t} dt = 2\sqrt{8}\pi \int_0^{\pi} 2 \sin t (1 - \cos t)^{3/2} dt = \\
 &= 4\sqrt{8}\pi \int_0^{\pi} \sin t (1 - \cos t)^{3/2} dt \left| \begin{array}{l} u = 1 - \cos t \\ du = \sin t dt \\ 0 \rightsquigarrow 0 \\ \pi \rightsquigarrow 2 \end{array} \right| = 4\sqrt{8}\pi \int_0^2 2u^{3/2} du = \\
 &= 4\sqrt{8}\pi \left[\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} \right]_0^2 = 4\sqrt{8}\pi \left(\frac{2^{5/2}}{\frac{5}{2}} \right) = 4\sqrt{8}\pi \frac{2}{5} 4\sqrt{2} = \frac{128}{5}\pi.
 \end{aligned}$$

(452) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací prvního oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$, kolem osy x .

Řešení:

$$\begin{aligned}
 Q_x &= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt = \\
 &= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t} \, dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2} \, dt \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \cos t = \sin^2 \frac{t}{2} \\ \end{array} \right| = \\
 &= 2\sqrt{2}\pi \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} \sin^3 \frac{t}{2} \, dt = 8\pi \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} \, dt \quad \left| \begin{array}{l} \cos \frac{t}{2} = u \\ \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt = du \\ 0 \rightsquigarrow 1 \\ 2\pi \rightsquigarrow -1 \end{array} \right| = \\
 &= -8\pi \int_1^{-1} (1 - u^2) \, du = 16\pi \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = 16\pi \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{64}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

(453) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní půlkružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$.

Řešení:

Podle příslušných vzorců obdržíme

$$M = \sigma \int_0^{\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \sigma r \int_0^{\pi} dt = \pi \sigma r,$$

$$S_x = \sigma \int_0^{\pi} r \sin t \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \sigma r^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = \sigma r^2 [-\cos t]_0^{\pi} = 2\sigma r^2,$$

$$S_y = \sigma \int_0^{\pi} r \cos t \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \sigma r^2 \int_0^{\pi} \cos t dt = \sigma r^2 [\sin t]_0^{\pi} = 0.$$

Proto souřadnice těžiště jsou

$$T = \left[\frac{0}{\pi \sigma r}, \frac{2\sigma r^2}{\pi \sigma r} \right] = \left[0, \frac{2r}{\pi} \right].$$

(454) Vypočtěte hmotnost a souřadnice těžiště křivky $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $a > 0$, $x, y \geq 0$, kde délková hustota v bodě $s(x)$ v bodě $[x(t), y(t)]$ je přímo úměrná x -ové souřadnici bodu.

Řešení:

Podle příslušných vzorců obdržíme

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ka \cos^3 t \sqrt{(3a \cos^2 t (-\sin t)^2) + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ka \cos^3 t \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ka \cos^3 t \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\ &= 3ka^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t dt \left| \begin{array}{l} \cos t = u \\ -\sin t dt = du \\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 0 \\ 0 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right. = -3ka^2 \int_1^0 u^4 du = \\ &= -3ka^2 \left[\frac{u^5}{5} \right]_1^0 = -3ka^2 \left(0 - \frac{1}{5} \right) = \frac{3ka^2}{5}, \\ S_x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3ka^3 \cos^4 t \sin^4 t dt = 3ka^3 \left[-\frac{1}{128} \sin 4t + \frac{3}{128} t + \frac{1}{1024} \sin 8t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 3ka^3 \frac{3}{128} \frac{\pi}{2} = 3ka^3 \frac{3\pi}{256}, \end{aligned}$$

kde jsme využili následující primitivní funkce

$$\begin{aligned} \int \cos^2 t dt &= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C, \\ \int \cos^2 2t dt &\left| \begin{array}{l} 2t = u \\ 2 dt = du \end{array} \right| \frac{1}{2} \int \cos^2 u du = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} \right) + C = \frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C, \\ \int \sin^4 t \cos^4 t dt &\left| \cos 2t = 2 \cos^2 t - 1 \right| = \frac{1}{16} \int (1 - \cos 2t)^2 (1 + \cos 2t)^2 dt = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - 2 \cos^2 2t + \cos^4 2t) dt \left| \begin{array}{l} 2t = u \\ 2 dt = du \end{array} \right| = \frac{1}{16} \left(t - t - \frac{\sin 4t}{4} + \frac{1}{2} \int \cos^4 u du \right) = \\ &= -\frac{1}{64} \sin 4t + \frac{1}{32} \int \frac{1}{4} (1 + \cos 2u)^2 du = -\frac{1}{64} \sin 4t + \frac{1}{128} \int (1 + 2 \cos 2u + \cos^2 2u) du = \\ &= -\frac{1}{64} \sin 4t + \frac{1}{128} u + \frac{1}{64} \frac{1}{2} \sin 2u + \frac{1}{128} \left(\frac{u}{2} + \frac{\sin 4u}{8} \right) + C = \\ &= \frac{3}{128} t - \frac{1}{128} \sin 4t + \frac{1}{1024} \sin 8t + C. \end{aligned}$$

Dále platí

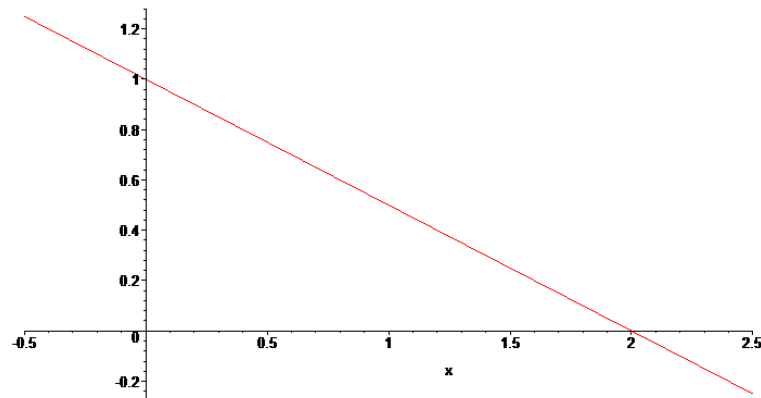
$$S_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3ka^3 \cos^7 t \sin t dt \left| \begin{array}{l} u = \cos t \\ du = -\sin t dt \\ 0 \rightsquigarrow 1 \\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 0 \end{array} \right. = -3ka^3 \int_1^0 u^7 du = -3ka^3 \left[\frac{u^8}{8} \right]_1^0 = \frac{3ka^3}{8}.$$

Proto těžiště má souřadnice

$$T = \left[\frac{3ka^3}{8} \frac{5}{3ka^2}, 3ka^3 \frac{3\pi}{256} \frac{5}{3ka^2} \right] = \left[\frac{5a}{8}, \frac{15\pi a}{256} \right].$$

(455) Vypočtěte souřadnice těžiště trojúhelníku s vrcholy $O = [0, 0]$, $A = [0, 1]$ a $B = [2, 0]$.

Řešení:



$$M = \sigma \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \sigma \left[x - \frac{x^2}{4} \right]_0^2 = \sigma(2 - 1) = \sigma,$$

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2} \sigma \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \sigma \int_0^2 \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \sigma \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \sigma \left(2 - 2 + \frac{8}{12}\right) = \frac{\sigma}{3}, \end{aligned}$$

$$S_y = \sigma \int_0^2 x \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \sigma \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \sigma \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \sigma \left(2 - \frac{8}{6}\right) = \frac{2}{3} \sigma.$$

Souřadnice těžiště tedy jsou

$$T = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right].$$

(456) Vypočtěte hmotnost a souřadnice těžiště rovinné homogenní plochy omezené křivkou $y = 2 \sin 3x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ a osou x .

Řešení:

$$M = \sigma \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin 3x \, dx = \frac{2}{3} \sigma [-\cos 3x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3} \sigma,$$

$$S_x = \frac{1}{2} \sigma \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \sin^2 3x \, dx = 2\sigma \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} \right] = \frac{\sigma\pi}{3},$$

$$S_y = \sigma \int_0^{\frac{\pi}{3}} x 2 \sin 3x \, dx = \frac{2}{9} \sigma [\sin 3x - 3x \cos 3x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sigma\pi}{9},$$

kde jsem využil

$$\int \sin^2 3x \, dx \left| \begin{array}{l} t = 3x \\ dt = 3 \, dx \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin^2 t \, dt = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt =$$

$$= \frac{t}{6} - \frac{\sin 2t}{12} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C,$$

$$\int x \sin 3x \, dx \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v = -\frac{1}{3} \cos 3x & v' = \sin 3x \end{array} \right| = -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x \, dx =$$

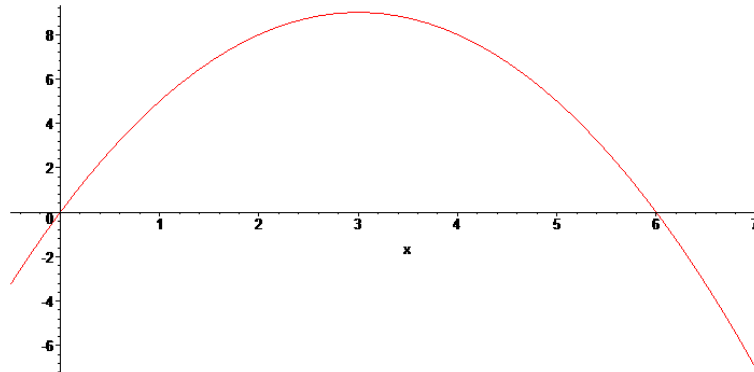
$$= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C = \frac{1}{9} (\sin 3x - 3x \cos 3x) + C.$$

Proto těžiště souřadnice jsou dány

$$T = \left[\frac{2\sigma\pi}{9} \frac{3}{4\sigma}, \frac{\sigma\pi}{3} \frac{3}{4\sigma} \right] = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right].$$

(457) Vypočtěte souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkou danou předpisem $y = 6x - x^2$ a osou x .

Řešení:



$$M = \sigma \int_0^6 (6x - x^2) dx = \sigma \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^6 = \sigma (108 - 2 \cdot 36) = 36\sigma,$$

$$S_x = \frac{1}{2} \sigma \int_0^6 (6x - x^2)^2 dx = \frac{1}{2} \sigma \int_0^6 (36x^2 - 12x^3 + x^4) dx = \frac{1}{2} \sigma \left[\frac{36x^3}{3} - \frac{12x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^6 = \frac{648}{5} \sigma,$$

$$S_y = \sigma \int_0^6 x(6x - x^2) dx = \sigma \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx = \sigma \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^6 = 108\sigma.$$

Těžiště má tedy souřadnice

$$T = \left[3, \frac{18}{5} \right].$$

(458) Vypočítejte souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného cykloidou $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ a osou x .

Řešení:

$$M = \sigma \int_0^{2\pi} 3(1 - \cos t) 3(1 - \cos t) dt = 9\sigma \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \stackrel{\text{Př. (438)}}{=} 9\sigma 4\pi = 27\sigma\pi,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_0^{2\pi} 9(1 - \cos t)^2 3(1 - \cos t) dt = \frac{27}{2}\sigma \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ = \frac{27}{2}\sigma \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt \stackrel{\text{Př. (447)}}{=}$$

$$\stackrel{\text{Př. (447)}}{=} \frac{27}{2}\sigma \left[t - 3\sin t + \frac{3}{2}(\cos t \cdot \sin t + t) - \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{27}{2}\sigma (5\pi) = \frac{135}{2}\pi\sigma,$$

$$S_y = \sigma \int_0^{2\pi} 3(t - \sin t) 3(1 - \cos t) 3(1 - \cos t) dt =$$

$$= 27\sigma \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)(t - \sin t) dt =$$

$$= 27\sigma \int_0^{2\pi} (t - \sin t - 2t\cos t + 2\cos t \sin t + t\cos^2 t - \cos^2 t \sin t) dt =$$

$$= 27\sigma \left[\frac{t^2}{2} + \cos t - 2t\sin t - 2\cos t - \cos^2 t + \frac{t}{2}(\cos t \cdot \sin t + t) - \right.$$

$$\left. - \frac{t}{2} \left(-\frac{\cos^2 t}{2} + \frac{t^2}{2} \right) - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 27\sigma \left(2\pi^2 + 2\pi^2 + \frac{1}{4} - \pi^2 - \frac{1}{4} \right) = 27\sigma 3\pi^2,$$

k čemuž jsme v posledním integrálu využili

$$\int t \cos^2 t dt \left| \begin{array}{l} u = t \\ v = \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t) \\ u' = 1 \\ v' = \cos^2 t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t) - \frac{1}{2} \int (\cos t \cdot \sin t + t) dt =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t) - \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos^2 t}{2} - \frac{t^2}{2} \right) + C,$$

$$\int t \cos t dt \left| \begin{array}{l} u = t \\ v = \sin t \\ u' = 1 \\ v' = \cos t \end{array} \right| = t \sin t - \int \sin t dt = t \sin t + \cos t + C,$$

$$\int \cos t \sin t dt \left| \begin{array}{l} u = \cos t \\ du = -\sin t dt \end{array} \right| = - \int u du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{\cos^2 t}{2} + C,$$

$$\int \cos^2 t \sin t dt \left| \begin{array}{l} u = \cos t \\ du = -\sin t dt \end{array} \right| = - \int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 t}{3}.$$

Proto souřadnice těžiště jsou dány

$$T = \bar{T} = \left[\frac{27\sigma 3\pi^2}{27\sigma\pi}, \frac{135\pi\sigma}{2 \cdot 27\sigma\pi} \right] = \left[3\pi, \frac{5}{2} \right].$$