I. 3. Derivace funkce

Definice 9. Buď $f(x)$ funkce a $x_0 \in D(f)$. Existuje-li

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0 a značíme $f'(x_0)$. Je-li tato limita vlastní, hovoříme o *vlastní derivaci*. Je-li tato limita nevlastní, hovoříme o *nevlastní derivaci*.

Základní vzorce pro počítání s derivacemi (f a g jsou funkce, $k \in \mathbb{R}$):

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (k\cdot f)' = k \cdot f', \quad (f\cdot g)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Derivace elementárních funkcí ($k, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$):

$$
\begin{aligned}
(k)' &= 0, & (\cos x)' &= -\sin x,\\
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}, & (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x},\\
(e^x)' &= e^x, & (\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x},\\
(a^x)' &= a^x \cdot \ln a, & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
(\log_b x)' &= \frac{1}{x\cdot \ln b}, & (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2},\\
(\sin x)' &= \cos x, & (\operatorname{arccotg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$

Věta 10. *Nechť funkce* $f:\ x = f(y)$ *je spojitá a ryze monotónní na intervalu* I. *Nechť* y_0 *je vnitřní bod intervalu* I *a nechť má f v* y_0 *derivaci* $f'(y_0)$. *Pak inverzní funkce* $f^{-1}:\ y = f^{-1}(x)$ *má v bodě* $x_0 = f(y_0)$ *derivaci a platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}, & \text{je-li } f'(y_0) \neq 0,\\ +\infty, & \text{je-li } f'(y_0) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je na } I \text{ rostoucí},\\ -\infty, & \text{je-li } f'(y_0) = 0 \text{ a funkce } f \text{ je na } I \text{ klesající}. \end{cases}$$

Rovnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě dotyku $(x_0, f(x_0))$:

$$t:\ y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Pokud $f'(x_0) = \pm\infty$ a pokud je funkce f v tomto bodě spojitá, pak je tečna v tomto bodě rovnoběžná s osou y a její rovnice tedy je

$$t:\ x = x_0.$$

Rovnice normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě dotyku $(x_0, f(x_0))$:

$$
\begin{aligned}
n:\ & y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0), && \text{je-li } f'(x_0) \neq 0,\\
n:\ & x = x_0, && \text{je-li } f'(x_0) = 0.
\end{aligned}
$$

Pokud $f'(x_0) = \pm\infty$ a pokud funkce f v tomto bodě spojitá, pak je normála v tomto bodě rovnoběžná s osou x a její rovnice tedy je

$$n: \; y = f(x_0).$$

(149) Z definice vypočtěte hodnotu $f'(0)$, kde $f(x) = \sin x$.

Řešení:

Z definice platí

$$f'(0) = (\sin x)'_{x=0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(150) Z definice vypočtěte hodnotu $f'(0)$, kde $f(x) = |\sin x|$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1, \end{cases} \quad \Rightarrow \text{derivace neexistuje.}$$

(151) Z definice vypočtěte hodnotu $f'(\sqrt{5})$, kde $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2-1}-2}{x-\sqrt{5}} = \lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{x^2-1-4}{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)}{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+2\right)} = \lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-1}+2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(152) Z definice určete derivaci funkce $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
(\sinh x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sinh(x+h) - \sinh x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{x+h} - e^{-(x+h)}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x - e^{-x-h} + e^{-x}}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^x\, e^h - e^x}{h} + \frac{e^{-x}\, e^{-h} - e^{-x}}{-h} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \left(e^x \frac{e^h - 1}{h} + e^{-x} \frac{e^{-h} - 1}{-h} \right) = \frac{1}{2} \left(e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} + e^{-x} \lim_{h\to 0} \frac{e^{-h} - 1}{-h} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(e^x \cdot 1 + e^{-x} \cdot 1 \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \\
&= \cosh x.
\end{aligned}
$$

(153) Zderivujte

$$f(x) \equiv 1.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$(1)' = 0.$$

(154) Zderivujte

$$f(x) = 6x.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$(6x)' = 6.$$

(155) Zderivujte

$$f(x) = x^2.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$\left(x^2\right)' = 2x.$$

(156) Zderivujte
$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(157) Zderivujte
$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

(158) Zderivujte
$$f(x) = \sqrt[4]{x^7}.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme
$$\left(\sqrt[4]{x^7}\right)' = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)' = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}.$$

(159) Zderivujte

$$f(x) = x^3 + 2x - \sin x + 2.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme

$$\left(x^3 + 2x - \sin x + 2\right)' = 3x^2 + 2 - \cos x.$$

(160) Zderivujte
$$f(x) = -2\cos x + 4\,e^x + \frac{1}{3}x^7.$$

Řešení:

Přímo ze základních vzorců obdržíme
$$\left(-2\cos x + 4\,e^x + \frac{1}{3}x^7\right)' = 2\sin x + 4\,e^x + \frac{7}{3}x^6.$$

(161) Zderivujte
$$f(x) = x\,e^x\,.$$

<u>**Řešení:**</u>

Pomocí vzorce pro derivaci součinu funkcí obdržíme
$$(x\,e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)\,e^x\,.$$

(162) Zderivujte

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}.$$

Řešení:

Derivováním podílu odostaneme

$$\left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{3\cdot(x^2+1)-(3x-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}.$$

(163) Zderivujte

$$f(x) = \frac{x \ln x}{\arcsin x + \operatorname{arctg} x}.$$

Řešení:

Kombinací derivování podílu a součinu získáme přímo

$$\left(\frac{x \ln x}{\arcsin x + \operatorname{arctg} x}\right)' = \frac{(\ln x + 1)(\arcsin x + \operatorname{arctg} x) - x \ln x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}\right)}{(\arcsin x + \operatorname{arctg} x)^2}.$$

(164) Zderivujte

$$f(x) = x^7 + 4\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg}(3x+1) + \sin x^2 + 2^x + \arcsin 7x + \ln(1+x^2) + x^2\,e^{1-10x}.$$

Řešení:

Aplikováním základních vzorců, derivováním složené funkce a součinu dostaneme

$$\left(x^7 + 4\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg}(3x+1) + \sin x^2 + 2^x + \arcsin 7x + \ln(1+x^2) + x^2\,e^{1-10x}\right)' =$$

$$= 7x^6 + 4\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' + \frac{1}{(3x+1)^2+1}\cdot(3x+1)' + \left(\cos x^2\right)\cdot\left(x^2\right)' + 2^x\ln 2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1-(7x)^2}}\cdot(7x)' + \frac{1}{1+x^2}\cdot\left(x^2\right)' + 2x\cdot e^{1-10x} + x^2\cdot e^{1-10x}\cdot(1-10x)' =$$

$$= 7x^6 + \frac{8}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{9x^2+6x+2} + 2x\cos x^2 + 2^x\ln 2 + \frac{7}{\sqrt{1-49x^2}} + \frac{2x}{1+x^2} +$$

$$+ 2x\,e^{1-10x} - 10x^2\,e^{1-10x}.$$

(165) Zderivujte

$$f(x) = (3x^2 - 2x + 10)^{10}.$$

Řešení:

$$\left[(3x^2 - 2x + 10)^{10}\right]' = 10(3x^2 - 2x + 10)^9 \left(3x^2 - 2x + 10\right)' = 10(3x^2 - 2x + 10)^9(6x - 2).$$

(166) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

Řešení:

$$\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \left[(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} \cdot (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4-x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

(167) Zderivujte
$$f(x) = \ln \sin x.$$

Řešení:

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{cotg} x.$$

(168) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt{\sin 3x}.$$

Řešení:

$$\left(\sqrt{\sin 3x}\right)' = \left[(\sin 3x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\,(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\sin 3x)' = \frac{1}{2}\,(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos 3x \cdot (3x)' =$$
$$= \frac{1}{2}\,(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos 3x \cdot 3 = \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$$

(169) Zderivujte
$$f(x) = \sqrt[5]{x^2}\left(\sqrt{x} - \frac{2}{5x^2} + 6\sqrt[5]{x^3}\right).$$

Řešení:

$$f(x) = x^{\frac{2}{5}}\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}x^{-2} + 6x^{\frac{3}{5}}\right) = x^{\frac{9}{10}} - \frac{2}{5}x^{-\frac{8}{5}} + 6x,$$
$$f'(x) = \frac{9}{10}x^{-\frac{1}{10}} - \frac{2}{5}\left(-\frac{8}{5}\right)x^{-\frac{13}{5}} + 6 = \frac{9}{10\sqrt[10]{x}} + \frac{16}{25\sqrt[5]{x^{13}}} + 6 =$$
$$= \frac{9}{10\sqrt[10]{x}} + \frac{16}{25x^2\sqrt[5]{x^3}} + 6 = \frac{9\sqrt[10]{x^9}}{10x} + \frac{16\sqrt[5]{x^2}}{25x^3} + 6.$$

(170) Zderivujte
$$f(x) = x^2 e^x \sin x.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^2(e^x \sin x)]' = 2x(e^x \sin x) + x^2(e^x \sin x)' = \\ &= 2x e^x \sin x + x^2(e^x \sin x + e^x \cos x) = x e^x(2 \sin x + x \sin x + x \cos x). \end{aligned}$$

(171) Zderivujte

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

Řešení:

$$f'(x) = (\ln^{-1} x)' = -1 \ln^{-2} x \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln^2 x}.$$

(172) Zderivujte

$$f(x) = \operatorname{arccotg} 2x.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{-1}{1+(2x)^2} \cdot 2 = \frac{-2}{1+4x^2}.$$

(173) Zderivujte
$$f(x) = (2x + 6)4^x.$$

Řešení:

$$f'(x) = 2 \cdot 4^x + (2x + 6)4^x \ln 4 = 2 \cdot 4^x \big[1 + (x + 3)\ln 4\big].$$

(174) Zderivujte

$$f(x) = 7^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}}.$$

Řešení:

$$f'(x) = 7^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}} \ln 7 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x - \sqrt{x}\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = 7^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}} \ln 7 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\ln^2 x} =$$
$$= 7^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}} \ln 7 \cdot \frac{\ln x - 2}{2\sqrt{x} \ln^2 x}.$$

(175) Zderivujte
$$f(x) = x\sin^2(2x).$$

Řešení:

$$f'(x) = 1\sin^2(2x) + x2\sin(2x)\cos(2x)2 = \sin^2(2x) + 4x\sin(2x)\cos(2x) = \sin^2(2x) + 2x\sin(4x).$$

(176) Zderivujte
$$f(x) = \frac{-2}{\ln\cos x}.$$

Řešení:

$$f'(x) = -2[(\ln\cos x)^{-1}]' = -2(-1)(\ln\cos x)^{-2}\frac{1}{\cos x}(-\sin x) =$$
$$= -2\frac{\sin x}{\cos x(\ln\cos x)^2} = \frac{-2\,\mathrm{tg}\,x}{\ln^2\cos x}.$$

(177) Zderivujte
$$f(x) = 7^{2x^3+x-9}.$$

Řešení:

$$f'(x) = 7^{2x^3+x-9} \ln 7 (6x^2 + 1).$$

(178) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}} \cdot \frac{(-1)(x^2+1)-(1-x)2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}} \cdot \frac{x^2-2x-1}{2(x^2+1)^2}.$$

(179) Zderivujte
$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2x}{x^2-1}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{-1}{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-1}{\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2} =$$
$$= \frac{2x^2+2}{x^4+2x^2+1} = \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2+1}.$$

(180) Zderivujte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}x}{1-x^2}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{5}x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{5}(1-x^2)-\sqrt{5}x(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1+\frac{5x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{\sqrt{5}(x^2+1)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{\frac{(1-x^2)^2+5x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}.$$

(181) Zderivujte
$$f(x) = x^5 + 5^x.$$

Řešení:

$$f'(x) = 5x^4 + 5^x \ln 5.$$

(182) Zderivujte

$$f(x) = 5x^5 \sqrt[5]{5^x}.$$

Řešení:

$$f'(x) = 5 \cdot 5x^4 \sqrt[5]{5^x} + 5x^5 \frac{1}{5} (5^x)^{-\frac{4}{5}} 5^x \ln 5 = 25x^4 \sqrt[5]{5^x} + x^5 \sqrt[5]{5^x} \ln 5 =$$
$$= x^4 \sqrt[5]{5^x} (25 + x \ln 5).$$

(183) Zderivujte

$$f(x) = \ln\ln(x-3) + \arcsin\frac{x-5}{2}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\ln(x-3)}\frac{1}{x-3} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-5}{2}\right)^2}}\frac{1}{2} = \\
&= \frac{1}{(x-3)\ln(x-3)} + \frac{1}{\sqrt{-x^2+10x-21}}.
\end{aligned}$$

(184) Zderivujte

$$f(x) = \arccos \log_{\frac{2}{3}} x^2.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\log^2_{\frac{2}{3}} x^2}} \frac{1}{x^2 \ln \frac{2}{3}} 2x = \\ &= \frac{-2}{x \ln \frac{2}{3} \sqrt{1-\log^2_{\frac{2}{3}} x^2}}. \end{aligned}$$

(185) Zderivujte

$$f(x) = \ln^2 \cos^3 x^5.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$f'(x) = 2\ln\cos^3 x^5 \cdot \frac{1}{\cos^3 x^5} \cdot 3\cos^2 x^5(-\sin x^5)5x^4 = -30\frac{\ln\cos^3 x^5 \cdot \cos^2 x^5 \cdot \sin x^5 \cdot x^4}{\cos^3 x^5} =$$
$$= -30x^4 \cdot \ln\cos^3 x^5 \cdot \operatorname{tg} x^5.$$

(186) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt[3]{\ln\cos\frac{2x+1}{4}}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\ln\cos\frac{2x+1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{\cos\frac{2x+1}{4}}\left(-\sin\frac{2x+1}{4}\right)\frac{1}{2} =$$
$$= -\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\ln\cos\frac{2x+1}{4}\right)^2}}\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}.$$

(187) Zderivujte

$$f(x) = x^x.$$

Řešení:

Poněvadž se proměnná x vyskytuje v základu i v exponentu, musíme využít exponenciální funkci, tj.

$$(x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\,(x\ln x)' = e^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) =$$
$$= e^{x\ln x}\,(1+\ln x) = x^x\,(1+\ln x)\,.$$

Zkuste výsledek porovnat s tím, který byste obdrželi aplikováním vzorce $(x^n)' = nx^{n-1}$ a/nebo $(a^x)' = a^x \ln a$.

(188) Zderivujte

$$f(x) = x^{x^2}.$$

Řešení:

$$\left(x^{x^2}\right)' = \left(e^{x^2 \ln x}\right)' = e^{x^2 \ln x} \left(x^2 \ln x\right)' = e^{x^2 \ln x} \left(2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) =$$
$$= x^{x^2} \left(2x \cdot \ln x + x\right) = x^{x^2+1}(2 \ln x + 1)$$

(189) Zderivujte

$$f(x) = x^{\sin x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\left(x^{\sin x}\right)' &= \left(e^{\sin x \cdot \ln x}\right)' = e^{\sin x \cdot \ln x} (\sin x \cdot \ln x)' = \\ &= e^{\sin x \cdot \ln x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).\end{aligned}$$

(190) Zderivujte
$$f(x) = (\sin x)^{\ln x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\left[(\sin x)^{\ln x}\right]' &= \left(e^{\ln x \cdot \ln \sin x}\right)' = e^{\ln x \cdot \ln \sin x} (\ln x \cdot \ln \sin x)' = \\ &= e^{\ln x \cdot \ln \sin x} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln \sin x + \ln x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right) = \\ &= (\sin x)^{\ln x} \left(\frac{\ln \sin x}{x} + \frac{\cos x \cdot \ln x}{\sin x}\right).\end{aligned}$$

(191) Zderivujte

$$f(x) = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \left[e^{\operatorname{tg} x \ln \ln x}\right]' = e^{\operatorname{tg} x \ln \ln x}(\operatorname{tg} x \ln \ln x)' = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\ln \ln x + \operatorname{tg} x \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\right) =$$

$$= (\ln x)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln \ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x \ln x}\right).$$

(192) Zderivujte

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}.$$

Řešení:

$$\left(\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}} \cdot \frac{-e^x\,(1+e^x) - (1-e^x)\,e^x}{(1+e^x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}} \cdot \frac{-2\,e^x}{(1+e^x)^2} = \sqrt{\frac{(1+e^x)^2}{1-e^{2x}}} \cdot \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} =$$

$$= \frac{-e^x}{(1+e^x)\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

(193) Zderivujte
$$f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\left[(x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}\right]' &= \left(e^{\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2+1)}\right)' = e^{\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2+1)} \left[\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2+1)\right]' = \\
&= e^{\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2+1)} \left[\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\right] = \\
&= (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x - 1} \left[2x \operatorname{arctg} x + \ln(x^2+1)\right].
\end{aligned}$$

(194) Zderivujte
$$f(x) = \ln \frac{e^x}{x^2+1}.$$

Řešení:

$$\left(\ln \frac{e^x}{x^2+1}\right)' = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2+1}} \cdot \frac{e^x\left(x^2+1\right) - e^x\, 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2+1}{e^x} \cdot \frac{e^x\,(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

(195) Zderivujte

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}.$$

Řešení:

$$\left(\ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x+1) - \sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x(x+1) - x^2 - 1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}.$$

(196) Zderivujte

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$$

Řešení:

$$\left(\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \cdot \frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \cdot \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\cos x}{1-\sin^2 x} = -\frac{1}{\cos x}.$$

(197) Zderivujte
$$f(x) = \ln \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x}.$$

Řešení:

$$\left(\ln \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x}\right)' = \frac{x}{x+2-2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\left(1-\frac{2}{2\sqrt{x+1}}\right)\cdot x - x - 2 + 2\sqrt{x+1}}{x^2} =$$
$$= \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)x - x\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + 2x + 2}{x^2\sqrt{x+1} + 2x\sqrt{x+1} - 2x^2 - 2x} =$$
$$= \frac{2+x-2\sqrt{x+1}}{x\left(x+2-2\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}.$$

(198) Zderivujte

$$f(x) = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

Řešení:

$$\left(\frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right)' = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \arccos x}{x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) - \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} - \frac{\arccos x}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - x}{1 - 1 + x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} - \frac{\arccos x}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} - \frac{\arccos x}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{\arccos x}{x^2}.$$

(199) Zderivujte

$$f(x) = (x-2)\sqrt{1+e^x} - \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}.$$

Řešení:

$$\left[(x-2)\sqrt{1+e^x} - \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right]' = \sqrt{1+e^x} + (x-2)\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} -$$
$$- \frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}\cdot\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\left(\sqrt{1+e^x}+1\right) - \left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)^2} =$$
$$= \sqrt{1+e^x} + \frac{(x-2)\,e^x}{2\sqrt{1+e^x}} - \frac{\frac{e^x}{2}+\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} - \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{1+e^x-1} =$$
$$= \sqrt{1+e^x} + \frac{(x-2)\,e^x}{2\sqrt{1+e^x}} - \frac{\frac{2\,e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{e^x} =$$
$$= \sqrt{1+e^x} + \frac{(x-2)\,e^x}{2\sqrt{1+e^x}} - \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} =$$
$$= \frac{1+e^x+\frac{x\,e^x}{2} - e^x - 1}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{x\,e^x}{2\sqrt{1+e^x}}.$$

(200) Zderivujte
$$f(x) = \arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Řešení:

$$\left(\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x-1+x}{1+x}}}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2} =$$
$$= -\sqrt{\frac{1+x}{2x}}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} =$$
$$= -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x-2x^2}}.$$

(201) Určete první a druhou derivaci funkce

$$f(x) = x^2 \sin\sqrt{x}.$$

Řešení:

$$\left(x^2 \sin\sqrt{x}\right)' = 2x \sin\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x},$$

$$\begin{aligned}
\left(x^2 \sin\sqrt{x}\right)'' &= \left(2x \sin\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\right)' = \\
&= 2\sin\sqrt{x} + \frac{2x}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} \cos\sqrt{x} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x} = \\
&= 2\sin\sqrt{x} + \frac{7}{4}\sqrt{x} \cos\sqrt{x} - \frac{1}{4} x \sin\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

(202) Určete první a druhou derivaci funkce

$$f(x) = \mathrm{tg}^2 x.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{tg}^2 x)' &= \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)' = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} = \\
&= \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)}{\cos^4 x} = \frac{2 \cdot \sin x}{\cos^3 x}, \\
(\mathrm{tg}^2 x)'' &= \left(\frac{2 \cdot \sin x}{\cos^3 x}\right)' = \frac{2 \cdot \cos x \cdot \cos^3 x - 2 \cdot \sin x \cdot 3 \cdot \cos^2 x \cdot (-\sin x)}{\cos^6 x} = \\
&= \frac{2 \cdot \cos^4 x + 6 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^6 x} = \\
&= \frac{2 \cdot \cos^2 x + 6 \cdot \sin^2 x}{\cos^4 x}.
\end{aligned}$$

(203) Určete hodnotu derivace dané funkce v bodě x_0.

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 8, \quad x_0 = -1.$$

Řešení:

$$f'(x) = 6x + 2,$$
$$f'(-1) = 6(-1) + 2 = -4.$$

(204) Určete hodnotu derivace dané funkce v bodě x_0.

$$f(x) = \ln \operatorname{tg} x, \quad x_0 = \frac{\pi}{12}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x} = \\
&= \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}, \\
f'(\tfrac{\pi}{12}) &= \frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.
\end{aligned}$$

(205) Určete funkční hodnotu dané funkce v bodě x_0 a dále v tomto bodě určete hodnotu první a druhé derivace této funkce.

$$f(x)=\sqrt{3x^4+1},\quad x_0=-1.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}(3x^4+1)^{-\frac{1}{2}}12x^3=\frac{6x^3}{\sqrt{3x^4+1}},\\
f''(x) &= \frac{18x^2\sqrt{3x^4+1}-6x^3\frac{6x^3}{\sqrt{3x^4+1}}}{3x^4+1},\\
f(-1) &= \sqrt{3+1}=2,\\
f'(-1) &= \frac{-6}{2}=-3,\\
f''(-1) &= \frac{18\cdot 2-\frac{36}{2}}{4}=\frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

(206) Určete funkční hodnotu dané funkce v bodě x_0 a dále v tomto bodě určete hodnotu první a druhé derivace této funkce.

$$f(x) = x \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 \sin 2x + x \cos 2x2 = \sin 2x + 2x \cos 2x,\\
f''(x) &= 2 \cos 2x + 2 \cos 2x + 2x(-\sin 2x)2 = 4 \cos 2x - 4x \sin 2x,\\
f(\tfrac{\pi}{4}) &= \tfrac{\pi}{4}1 = \tfrac{\pi}{4},\\
f'(\tfrac{\pi}{4}) &= 1 + 0 = 1,\\
f''(\tfrac{\pi}{4}) &= 0 - 4\tfrac{\pi}{4}1 = -\pi.
\end{aligned}$$

(207) Pomocí inverzní funkce určete derivaci funkce $\arccos x$.

Řešení:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \\ = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(208) Pomocí inverzní funkce určete derivaci funkce $\sqrt[3]{x}$.

Řešení:

$$(\sqrt[3]{x})' \;\left|\, \sqrt[3]{x} = y \,\right| = \frac{1}{(y^3)'} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

(209) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$$

v bodě $x_0 = 2$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = 2$, tj.

$$f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+11}} \overset{x=2}{\rightsquigarrow} \frac{1}{6}, \qquad f(x) = \sqrt{x^2-3x+11} \overset{x=2}{\rightsquigarrow} 3.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t: \; y - 3 = \frac{1}{6}(x-2), \qquad n: \; y - 3 = -6(x-2),$$
$$y = \frac{x}{6} + \frac{8}{3}, \qquad y = -6x + 15.$$

(210) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$$

v bodě $x_0 = \sqrt{2}$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = \sqrt{2}$, tj.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2 - 1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \overset{x=\sqrt{2}}{\rightsquigarrow} \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} \overset{x=\sqrt{2}}{\rightsquigarrow} \frac{\pi}{4}.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t: \ y - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \sqrt{2} \right), \qquad n: \ y - \frac{\pi}{4} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \left(x - \sqrt{2} \right),$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} x - 1 + \frac{\pi}{4}, \qquad y = -\frac{2}{\sqrt{2}} x + 2 + \frac{\pi}{4}.$$

(211) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = 4 - x^2$$

v dotykovém bodě x_0, jenž je průsečíkem grafu funkce $f(x)$ s kladnou částí osy x.

Řešení:

Nejdříve určíme bod x_0. Funkce $f(x)$ má s osou x průsečíky v bodech, které jsou řešením kvadratické rovnice $f(x) = 0$. Tato řešení jsou ± 2, proto $x_0 = 2$. Nyní spočítáme funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = 2$, tj.

$$f'(x) = -2x \overset{x=2}{\rightsquigarrow} -4, \qquad f(x) = 4 - x^2 \overset{x=2}{\rightsquigarrow} 0.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t: \; y - 0 = -4\,(x-2)\,, \qquad\qquad n: \; y - 0 = \frac{1}{4} \cdot (x-2)\,,$$

$$y = -4x + 8, \qquad\qquad y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}.$$

(212) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

v bodě $x_0 = 1$.

<u>Řešení:</u>

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = 1$, tj.

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{2x}{2}\right) \overset{x=1}{\rightsquigarrow} 0, \qquad f(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}} \overset{x=1}{\rightsquigarrow} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t:\ y - e^{-\frac{1}{2}} = 0\,(x-1), \qquad n:\ x = 1,$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}}, \qquad x = 1.$$

(213) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = x^2 \log_2(x^2 - 7).$$

v bodě $x_0 = -3$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = -3$, tj.

$$f'(x) = 2x \log_2(x^2 - 7) + \frac{2x^3}{(x^2 - 7)\ln 2} \overset{x=-3}{\rightsquigarrow} -6 - \frac{27}{\ln 2},$$

$$f(x) = x^2 \log_2(x^2 - 7) \overset{x=-3}{\rightsquigarrow} 9.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$t: \; y - 9 = \left(-6 - \frac{27}{\ln 2}\right)(x + 3),$$

$$y = -\left(6 + \frac{27}{\ln 2}\right)x + 9 - 3\left(6 + \frac{27}{\ln 2}\right),$$

$$n: \; y - 9 = \frac{1}{6 + \frac{27}{\ln 2}}(x + 3),$$

$$y = \frac{\ln 2}{6\ln 2 + 27}x + 9 + 3\frac{\ln 2}{6\ln 2 + 27}.$$

(214) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-3}.$$

v bodě $x_0 = -2$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = -2$, tj.

$$f'(x) = \frac{x^2-2x+3}{(x^2-3)^2} \overset{x=-2}{\rightsquigarrow} 11,$$
$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-3} \overset{x=-2}{\rightsquigarrow} 3.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$\begin{aligned} t:\ y-3 &= 11(x+2), \\ y &= 11x+25, \\ n:\ y-3 &= -\frac{1}{11}(x+2), \\ y &= -\frac{x}{11}+\frac{31}{11}. \end{aligned}$$

(215) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = 2x + \sin x.$$

v bodě $x_0 = \pi$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = \pi$, tj.

$$f'(x) = 2 + \cos x \overset{x=\pi}{\rightsquigarrow} 1,$$
$$f(x) = 2x + \sin x \overset{x=\pi}{\rightsquigarrow} 2\pi.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$\begin{aligned} t: \; y - 2\pi &= 1(x - \pi), \\ y &= x + \pi, \\ n: \; y - 2\pi &= -1(x - \pi), \\ y &= -x + 3\pi. \end{aligned}$$

(216) Určete rovnici tečny a normály funkce

$$f(x) = (x^2+1)\sqrt{x^2-4x+11}.$$

v bodě $x_0 = -1$.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat funkční hodnotu a hodnotu derivace v bodě $x_0 = -1$, tj.

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 10x^2 + 23x - 2}{\sqrt{x^2-4x+11}} \overset{x=-1}{\leadsto} -\frac{19}{2},$$
$$f(x) = (x^2+1)\sqrt{x^2-4x+11} \overset{x=-1}{\leadsto} 8.$$

Proto dle vzorců pro rovnici tečny a normály dostaneme

$$\begin{aligned} t:\ y - 8 &= -\frac{19}{2}(x+1), \\ y &= -\frac{19}{2}x - \frac{3}{2}, \\ n:\ y - 8 &= \frac{2}{19}(x+1), \\ y &= \frac{2}{19}x + \frac{154}{19}. \end{aligned}$$