I. Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

I. 1. Opakování a úvod do matematické analýzy

Základní vzorce

Poznámka 1. Nejde o úplný přehled. Je uvedeno pouze znění základních vzorců bez ohledu na to, kde (ne)jsou definovány. Některé vzorce lze snadno odvodit z ostatních zde uvedených.

- *Mnohočleny*

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$
$(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i.$

- *Mocninná funkce*

$a^0 = 1,$
$a^{-r} = \frac{1}{a^r},$
$a^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{a},$
$a^r a^s = a^{r+s},$
$(a^r)^s = a^{rs}.$

- *Logaritmus a exponenciála*

$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y,$
$\log 1 = 0,$
$\log_a a = 1,$
$\log a^b = b \log a,$
$\log(ab) = \log a + \log b,$
$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b,$
$\log_a a^x = x = a^{\log_a x},$
$\ln x = \lg x = \log_e x, \; e = 2,71828\ldots,$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a}.$

- *Goniometrické funkce*

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$
$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$
$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2},$
$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}.$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- *Zlomky*

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$,
$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$,
$(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$,

$(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$,
$\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b}$,
$\frac{c}{cb} = \frac{1}{b}$,
$\frac{a}{a} = 1$.

- *Ostatní*
  - *Komplexní čísla* ($\mathbb{C}$)
    $i^2 = -1$,
    $\overline{a + ib} = a - ib$,
    $a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$.
  - *Kvadratický polynom* $P(x) = ax^2 + bx + c$
    $D = b^2 - 4ac$,
    $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,
    $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
  - *Doplnění na čtverec*
    $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$,
    $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q$.

Reálná čísla

Definice 2. Buď $A \neq \emptyset$ uspořádaná množina, $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, libovolná. Řekneme, že prvek $a \in A$ je *supremum množiny* B (píšeme $\sup B = a$), jestliže

1) $x \leq a$ pro každé $x \in B$;
2) je-li $y \in A$ takové, že $x \leq y$ pro každé $x \in B$, pak je $a \leq y$.

Analogicky se definuje *infimum množiny* B ($\inf B$).

Je-li $a = \max A$, pak je a největším prvkem množiny A, tj. pro každý prvek $x \in A$ platí $x \leq a$. Analogické tvrzení platí pro $\min A$.

Kvadratické rovnice

Rovnice tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $x \in \mathbb{R}$, nebo $x \in \mathbb{C}$. Řešíme pomocí vzorců

$$D = b^2 - 4ac, \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

- $D > 0 \quad \Rightarrow \quad$ 2 různé reálné kořeny,
- $D = 0 \quad \Rightarrow \quad$ 1 dvojnásobný reálný kořen,
- $D < 0 \quad \Rightarrow \quad$ 2 komplexně sdružené komplexní kořeny.

Posouvání grafu

Nechť je dána funkce $y = f(x)$ a nenulová reálná čísla a, b.

(i) Uvažujme funkci $\tilde{y} = f(x + a)$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď doleva (je-li $a > 0$) nebo doprava (je-li $a < 0$), a to o velikost čísla a.
(ii) Uvažujme funkci $\hat{y} = f(x) + b$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď nahoru (je-li $b > 0$) nebo dolů (je-li $b < 0$), a to o velikost čísla b.

(1) Určete (jestliže existují) $\sup M$, $\inf M$, $\max M$ a $\min M$, kde

i)
$$M = \{0, -1, 2, 5, 6, 8\};$$

ii)
$$M = \left\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\};$$

iii)
$$M = \left\{n^2 - 2n + 1 : \ n \in \mathbb{Z}\right\};$$

iv)
$$M = [0, 1).$$

Řešení:

i) $\max M = \sup M = 8$ a $\min M = \inf M = -1$;

ii) $\max M = \sup M = 1$, $\inf M = 0$ a $\min M$ neexistuje;

iii) $\max M$ a $\sup M$ neexistuje, $\min M = \inf M = 0$;

iv) $\max M$ neexistuje, $\sup M = 1$ a $\min M = \inf M = 0$.

(2) Dokažte následující tvrzení: "Buď $M \neq \emptyset$, $M \subseteq \mathbb{R}$ a nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak

$$a = \sup M \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1)\ x \leq a \ \forall x \in M, \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_1 \in M: \ x_1 > a - \varepsilon." \end{array}$$

Řešení:

„$\Rightarrow$“ Buď $a = \sup M$, pak z definice $x \leq a$ pro $\forall x \in M$, tj. platí 1). Předpokládejme, že 2) neplatí. Pak existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že $\forall x \in M$ je $x \leq a - \varepsilon_0$. Tedy $a - \varepsilon_0$ je horní závora množiny M a zároveň $a = \sup M \Rightarrow a \leq a - \varepsilon_0$, což je spor. Tedy 2) platí.

„$\Leftarrow$“ Nechť platí 1) i 2). Podle definice určitě platí $\sup M \leq a$. Předpokládejme, že

$$\sup M < a.$$

Potom položme $\varepsilon = a - \sup M > 0$. Z 2) plyne, že

$$\exists x_1 \in M: \ x_1 > a - \varepsilon = \sup M,$$

což je spor. Proto nutně $\sup M = a$.

(3) Za předpokladu existence daných výrazů dokažte:

i)

$$\sup_{x\in A}[-f(x)] = -\inf_{x\in A}[f(x)];$$

ii)

$$\inf_{x\in A}[-f(x)] = -\sup_{x\in A}[f(x)];$$

iii)

$$\sup_{x\in A}[f(x)+g(x)] \leq \sup_{x\in A}[f(x)] + \sup_{x\in A}[g(x)];$$

iv)

$$\inf_{x\in A}[f(x)+g(x)] \geq \inf_{x\in A}[f(x)] + \inf_{x\in A}[g(x)];$$

v) v částech iii) a iv) nelze nerovnosti nahradit rovnostmi.

Řešení:

i)

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in A}[-f(x)] = c \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow [-f(x) \leq c\ \forall x \in A] \ \wedge\ [(b \in \mathbb{R},\ -f(x) \leq b\ \forall x \in A) \Rightarrow c \leq b] \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow [f(x) \geq -c\ \forall x \in A] \ \wedge\ [(b \in \mathbb{R},\ f(x) \geq -b\ \forall x \in A) \Rightarrow -c \geq -b] \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow \inf_{x\in A}[f(x)] = -c \Rightarrow \sup_{x\in A}[-f(x)] = c = -\inf[f(x)]\,.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
&\inf_{x\in A}[-f(x)] = c \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow [-f(x) \geq c\ \forall x \in A] \ \wedge\ [(b \in \mathbb{R},\ -f(x) \geq b\ \forall x \in A) \Rightarrow c \geq b] \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow [f(x) \leq -c\ \forall x \in A] \ \wedge\ [(b \in \mathbb{R},\ f(x) \leq -b\ \forall x \in A) \Rightarrow -c \leq -b] \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow \sup_{x\in A}[f(x)] = -c \Rightarrow \inf_{x\in A}[-f(x)] = c = -\sup[f(x)]\,.
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
f(x) \leq \sup_{x\in A} f(x),\ \ g(x) \leq \sup_{x\in A} g(x)\ \forall x \in A \Rightarrow& \\
\Rightarrow f(x)+g(x) \leq \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)\ \forall x \in A \Rightarrow& \\
\Rightarrow \sup_{x\in A}[f(x)+g(x)] \leq \sup_{x\in A}\left[\sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)\right]& \\
\Rightarrow \sup_{x\in A}[f(x)+g(x)] \leq \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x).&
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
f(x) \geq \inf_{x\in A} f(x),\ \ g(x) \geq \inf_{x\in A} g(x)\ \forall x \in A \Rightarrow& \\
\Rightarrow f(x)+g(x) \geq \inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x)\ \forall x \in A \Rightarrow& \\
\Rightarrow \inf_{x\in A}[f(x)+g(x)] \geq \inf_{x\in A}\left[\inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x)\right]& \\
\Rightarrow \inf_{x\in A}[f(x)+g(x)] \geq \inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x).&
\end{aligned}$$

v) Tvrzení dokážeme nalezením vhodného protipříkladu. Uvažujme např. funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \cos x$ na množině $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pak v iii) obdržíme
$$\sup_{x\in A} [\sin x + \cos x] = \sqrt{2},$$
přičemž $\sup_{x\in A} \sin x = 1$ a $\sup_{x\in A} \cos x = 1$. V části iv) dostaneme
$$\inf_{x\in A} [\sin x + \cos x] = 1,$$
přičemž $\inf_{x\in A} \sin x = 0$ a $\inf_{x\in A} \cos x = 0$.

(4) Dokažte pro libovolné podmnožiny A a B množiny $\mathbb{R}$ a libovolná reálná čísla a, b, c:

i)
$$a = \max M \Rightarrow a = \sup M;$$
ii)
$$A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B;$$
iii)
$$A \subseteq B \Rightarrow \inf A \geq \inf B;$$
iv)
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\};$$
v)
$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\};$$
vi)
$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\};$$
vii)
$$\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\};$$
viii)
$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|);$$
ix)
$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|);$$
x)
$$|a| = \max\{a, -a\} = -\min\{a, -a\};$$
xi)
$$\min\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\};$$
xii)
$$\max\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\}.$$

Řešení:

i)
$$\begin{aligned} a = \max M \Rightarrow {} & [x \leq a\ \forall x \in M] \ \wedge \ a \in M \Rightarrow \\ & \Rightarrow [x \leq a\ \forall x \in M] \ \wedge \ [(b \in \mathbb{R},\ x \leq b\ \forall x \in M) \Rightarrow a \leq b] \Rightarrow \\ & \Rightarrow a = \sup M. \end{aligned}$$

ii) Označme $a = \sup A$ a $b = \sup B$. Pak platí
$$b = \sup B \Rightarrow x \leq b\ \forall x \in B \Rightarrow x \leq b\ \forall x \in A \Rightarrow a \leq b,$$
neboť $a = \sup A$.

iii) Označme $a = \inf A$ a $b = \inf B$. Pak platí
$$b = \inf B \Rightarrow x \geq b\ \forall x \in B \Rightarrow x \geq b\ \forall x \in A \Rightarrow a \geq b,$$
neboť $a = \inf A$.

iv) Označme $a = \sup A$, $b = \sup B$, $c = \sup (A \cup B)$ a $d = \max\{\sup A, \sup B\}$. Pak platí

$$\begin{aligned} x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \Rightarrow [x \le a \ \forall x \in A] \ \vee \ [x \le b \ \forall x \in B] \Rightarrow \\ \Rightarrow [x \le a \le d \ \forall x \in A] \ \vee \ [x \le b \le d \ \forall x \in B] \Rightarrow \\ \Rightarrow x \le d \ \forall x \in A \cup B \Rightarrow c \le d. \end{aligned}$$

Také platí

$$d = \max\{a, b\} \Rightarrow (d = a) \ \vee \ (d = b) \overset{\text{podle ii)}}{\Rightarrow} d \le c \ \vee \ d \le c \Rightarrow d \le c.$$

To znamená, že

$$c = d.$$

v) Označme $a = \inf A$, $b = \inf B$, $c = \inf (A \cup B)$ a $d = \min\{\inf A, \inf B\}$. Pak platí

$$\begin{aligned} x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \Rightarrow [x \ge a \ \forall x \in A] \ \vee \ [x \ge b \ \forall x \in B] \Rightarrow \\ \Rightarrow [x \ge a \ge d \ \forall x \in A] \ \vee \ [x \ge b \ge d \ \forall x \in B] \Rightarrow \\ \Rightarrow x \ge d \ \forall x \in A \cup B \Rightarrow c \ge d. \end{aligned}$$

Také platí

$$d = \min\{a, b\} \Rightarrow (d = a) \ \vee \ (d = b) \overset{\text{podle iii)}}{\Rightarrow} d \ge c \ \vee \ d \ge c \Rightarrow d \le c.$$

To znamená, že

$$c = d.$$

vi) Označme $a = \sup A$, $b = \sup B$, $c = \sup (A \cap B)$ a $d = \min\{\sup A, \sup B\}$. Pak platí

$$\begin{aligned} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \Rightarrow [x \le a \ \forall x \in A] \ \wedge \ [x \le b \ \forall x \in B] \Rightarrow \\ \Rightarrow [x \le a \ \forall x \in (A \cap B)] \ \vee \ [x \le b \ \forall x \in (A \cap B)] \Rightarrow \\ \Rightarrow x \le d \ \forall x \in (A \cap B) \Rightarrow c \le d. \end{aligned}$$

vii) Označme $a = \inf A$, $b = \inf B$, $c = \inf (A \cap B)$ a $d = \max\{\inf A, \inf B\}$. Pak platí

$$\begin{aligned} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \Rightarrow [x \ge a \ \forall x \in A] \ \wedge \ [x \ge b \ \forall x \in B] \Rightarrow \\ \Rightarrow [x \ge a \ \forall x \in (A \cap B)] \ \vee \ [x \ge b \ \forall x \in (A \cap B)] \Rightarrow \\ \Rightarrow x \ge d \ \forall x \in (A \cap B) \Rightarrow c \ge d. \end{aligned}$$

viii) Pro $a \ge b$ platí

$$\frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - a + b) = b = \min\{a, b\}.$$

Pro $a < b$ platí

$$\frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = a = \min\{a, b\}.$$

ix) Pro $a \ge b$ platí

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = a = \max\{a, b\}.$$

Pro $a < b$ platí

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - a + b) = b = \max\{a, b\}.$$

x) Z části viii) a ix) plyne

$$\max\{a,-a\} = \frac{1}{2}\left(a - a + |a-(-a)|\right) = \frac{1}{2}|2a| = |a|\,,$$
$$-\min\{a,-a\} = -\frac{1}{2}\left(a - a - |a-(-a)|\right) = \frac{1}{2}|2a| = |a|\,.$$

xi) Zvážíme všechny možné varianty. Pro $a \geq b$ a $a \geq c$ platí

$$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\} = \max\{b,c\} = \min\{a,\max\{b,c\}\}\,.$$

Pro $a < b$ a $a < c$ platí

$$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\} = \max\{a,a\} = a = \min\{a,\max\{b,c\}\}\,.$$

Pro $a \geq b$ a $a < c$ platí

$$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\} = \max\{b,a\} = a = \min\{a,\max\{b,c\}\}\,.$$

Pro $a < b$ a $a \geq c$ platí

$$\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\} = \max\{a,c\} = a = \min\{a,\max\{b,c\}\}\,.$$

xii) Zvážíme všechny možné varianty. Pro $a \geq b$ a $a \geq c$ platí

$$\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\} = \min\{a,a\} = a = \max\{a,\min\{b,c\}\}\,.$$

Pro $a < b$ a $a < c$ platí

$$\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\} = \min\{b,c\} = \max\{a,\min\{b,c\}\}\,.$$

Pro $a \geq b$ a $a < c$ platí

$$\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\} = \min\{a,c\} = a = \max\{a,\min\{b,c\}\}\,.$$

Pro $a < b$ a $a \geq c$ platí

$$\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\} = \min\{b,a\} = a = \max\{a,\min\{b,c\}\}\,.$$

(5) Dokažte:

i)
$$\max\left\{x : x = \frac{n}{n+1},\ n \neq -1,\ n \in \mathbb{Z}\right\} = 2;$$

ii)
$$\sup\left\{x : x = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\} = 1;$$

iii)
$$\inf\left\{x : x = \frac{1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{Z}\right\} = 0;$$

iv)
$$\max\left\{x : x = \frac{1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{Z}\right\} = 1;$$

v)
$$\sup\,(A \cup B \cup C) = 1, \text{ kde}$$
$$\begin{aligned} A &= \left\{x : x = \frac{n^2}{n^2+1},\ n \in \mathbb{Z}\right\}, \\ B &= \left\{x : x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}, \\ C &= \left\{x : x = \frac{n-3}{2n+1},\ n \geq 0\right\}. \end{aligned}$$

Řešení:

i) Pro $n = -2$ je $x = \frac{-2}{-1} = 2$. Dále platí $\left|\frac{n}{n+1}\right| = \left|1 - \frac{1}{n+1}\right| \leq 1 + \left|\frac{1}{n+1}\right| \leq 2$ pro všechna $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

ii) Platí $\frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+1} \leq 1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Buď nyní $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$, pak
$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} > \frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon.$$

iii) Platí $\frac{1}{n^2+1} \geq 0$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Buď dále $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, pak
$$\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}+1} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \varepsilon.$$

iv) Platí $\frac{1}{n^2+1} \leq 1$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Pro $n = 0$ platí $x = \frac{1}{0+1} = 1$.

v) Platí $\sup A = 1$, $\sup B = 1$ a $\sup C = \frac{1}{2}$. Z Příkladu 4 části iv) plyne
$$\begin{aligned} \sup\,(A \cup B \cup C) &= \sup\,[(A \cup B) \cup C] = \\ &= \max\{\sup\,(A \cup B), \sup C\} = \\ &= \max\{\max\{\sup A, \sup B\}, \sup C\} = \\ &= \max\{\sup A, \sup B, \sup C\} = 1. \end{aligned}$$

(6) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B a C platí tzv. *distributivní zákony*

i)

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

ii)

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Řešení:

i)

$$\begin{aligned}
\subseteq: \quad x \in (A \cup B) \cap C &\Rightarrow x \in (A \cup B) \ \wedge \ x \in C \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ x \in C \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C), \\
\supseteq: \quad x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) &\Rightarrow x \in (A \cap C) \ \vee \ x \in (B \cap C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A \cup B) \ \wedge \ x \in C \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\subseteq: \quad x \in (A \cap B) \cup C &\Rightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ x \in C \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in A \ \vee \ x \in C) \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C), \\
\supseteq: \quad x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) &\Rightarrow (x \in A \ \vee \ x \in C) \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ x \in C \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C.
\end{aligned}$$

(7) Určete množiny dané těmito výrazy:

i)
$$(1, \infty) \cap (-1, 2];$$

ii)
$$(0, \infty) \setminus (-1, 2);$$

iii)
$$((-\infty, -2) \cup [-2, 0)) \cup [0, \infty);$$

iv)
$$[-1, 5] \cap [5, 100];$$

v)
$$[-1, 10] \cap [15, 20];$$

vi)
$$[-1, 4)' = \overline{[-1, 4)} = [-1, 4)^{C};$$

vii)
$$[1, 5) \setminus (0, 5].$$

Řešení:

i)
$$(1, \infty) \cap (-1, 2] = (1, 2]\,;$$

ii)
$$(0, \infty) \setminus (-1, 2) = [2, \infty)\,;$$

iii)
$$((-\infty, -2) \cup [-2, 0)) \cup [0, \infty) = (-\infty, \infty)\,;$$

iv)
$$[-1, 5] \cap [5, 100] = \{5\}\,;$$

v)
$$[-1, 10] \cap [15, 20] = \{\emptyset\}\,;$$

vi)
$$[-1, 4)' = (-\infty, -1) \cup [4, \infty)\,;$$

vii)
$$[1, 5) \setminus (0, 5] = \{\emptyset\}\,.$$

(8) Vyřešte kvadratickou rovnici $2x^2 - x - 3 = 0$ a) v $\mathbb{R}$, b) v $\mathbb{C}$.

Řešení:

Nejprve spočteme diskriminant dané rovnice

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25.$$

Protože $D > 0$, rovnice má dva reálné kořeny. Ty snadno dopočítáme.

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2}, \\ -1. \end{cases}$$

Rovnice má tedy v $\mathbb{R}$ dva kořeny a to $\frac{3}{2}$ a -1, stejně jako v $\mathbb{C}$, neboť komplexní čísla jsou nadmnožinou čísel reálných.

(9) Vyřešte kvadratickou rovnici $x^2 + 4x + 4 = 0$ a) v $\mathbb{R}$, b) v $\mathbb{C}$.

Řešení:

Nejprve spočteme diskriminant dané rovnice

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0.$$

Protože $D = 0$, rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen. Ten snadno dopočítáme.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = -2.$$

Rovnice má tedy v $\mathbb{R}$ jeden dvojnásobný kořen a to -2, stejně jako v $\mathbb{C}$, neboť komplexní čísla jsou nadmnožinou čísel reálných.

(10) Vyřešte kvadratickou rovnici $x^2 - 4x + 29 = 0$ a) v $\mathbb{R}$, b) v $\mathbb{C}$.

Řešení:

Nejprve spočteme diskriminant dané rovnice

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = -100.$$

Protože $D < 0$, rovnice nemá žádný reálný kořen – má dvojici komplexních kořenů. Ty dopočítáme.

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{100i^2}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = \begin{cases} 2 + 5i, \\ 2 - 5i. \end{cases}$$

Rovnice tedy v $\mathbb{R}$ nemá žádný kořen. V $\mathbb{C}$ jsou jejími kořeny komplexně sdružená čísla $2 + 5i$ a $2 - 5i$.

(11) Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je výraz $-2x^2 + x + 3$ a) nezáporný, b) kladný.

Řešení:

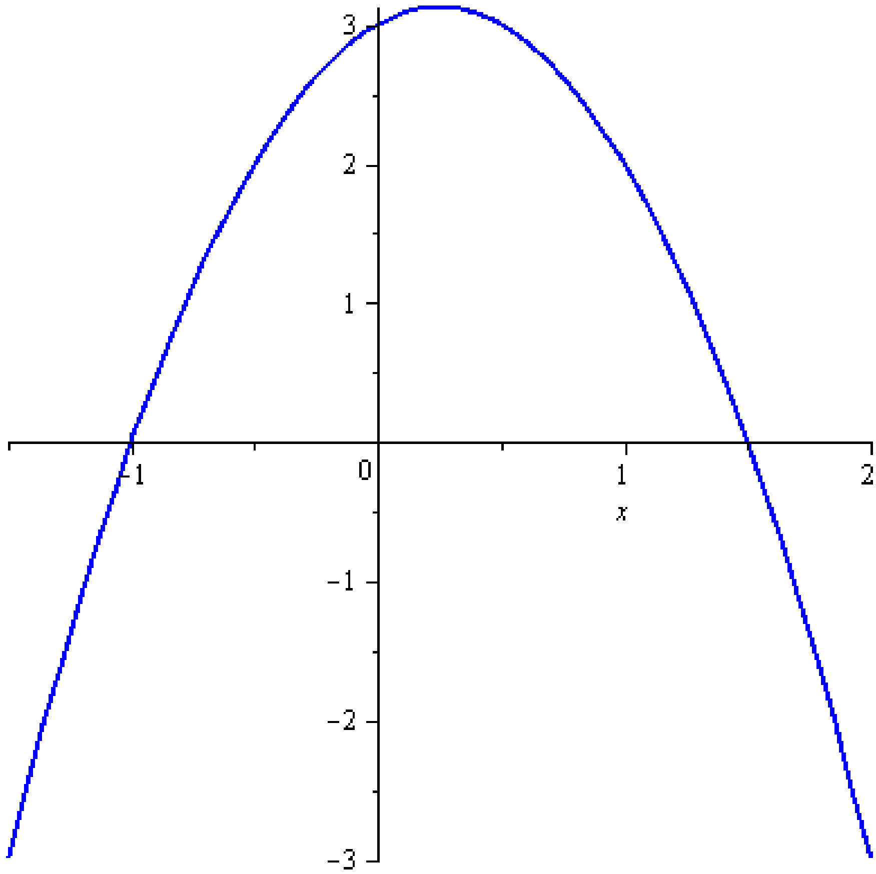
Protože jde o kvadratický polynom, je nejjednodušším způsobem načrtnout si jeho graf – parabolu. Jediné informace, které přitom musí být přesné, jsou průsečíky s osou x (kořeny polynomu) a samozřejmě zda je parabola otevřena nahoru, nebo dolů.

Druhou informaci získáme okamžitě ze zadaného výrazu. Protože je vedoucí koeficient (-2) záporný, je parabola otevřena dolů.

Kořeny dopočítáme pomocí diskriminantu jako by šlo o kvadratickou rovnici:

$$D = 25 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \begin{cases} \frac{3}{2}, \\ -1. \end{cases}$$

Graf tedy vypadá takto:



Daný výraz je tedy nezáporný pro $x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$ a kladný pro $x \in \left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

(12) Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je výraz $x^2 + 4x + 4$ a) kladný, b) nezáporný.

Řešení:

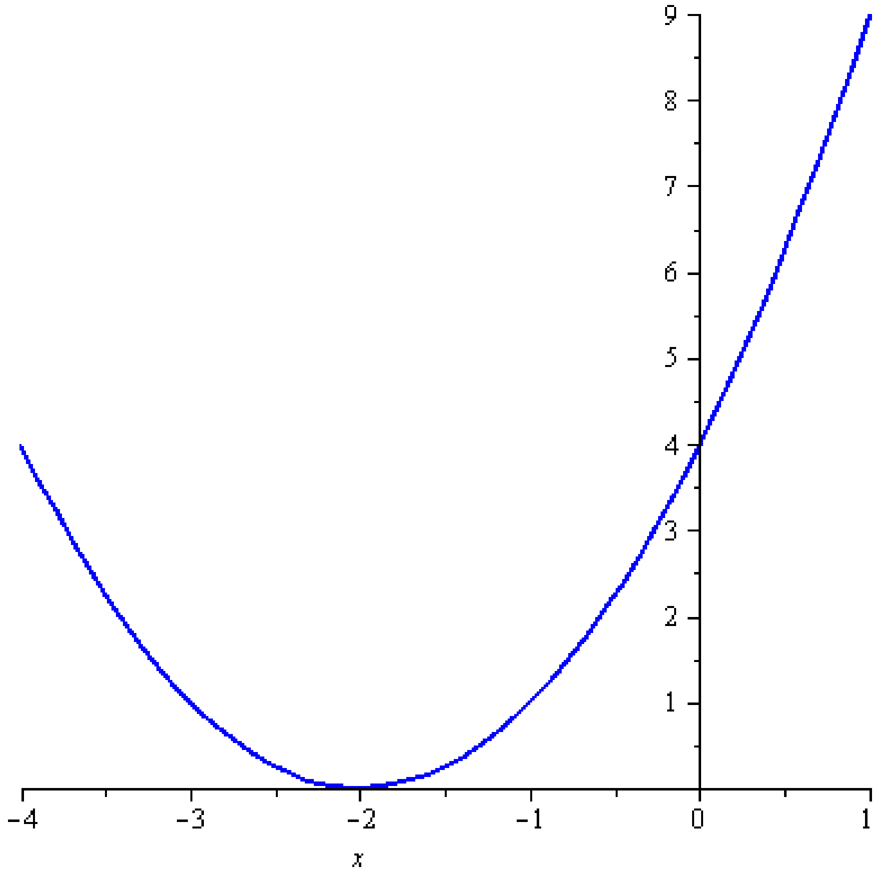
Protože jde o kvadratický polynom, je nejjednodušším způsobem načrtnout si jeho graf – parabolu. Jediné informace, které přitom musí být přesné, jsou průsečíky s osou x (kořeny polynomu) a samozřejmě zda je parabola otevřena nahoru, nebo dolů.

Druhou informaci získáme okamžitě ze zadaného výrazu. Protože je vedoucí koeficient (1) kladný, je parabola otevřena nahoru.

Kořeny dopočítáme pomocí diskriminantu jako by šlo o kvadratickou rovnici:

$$D = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -2.$$

Graf tedy vypadá takto:



Daný výraz je tedy kladný pro $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ a nezáporný pro $x \in \mathbb{R}$.

(13) Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je výraz $x^2 - 4x + 29$ a) kladný, b) záporný.

Řešení:

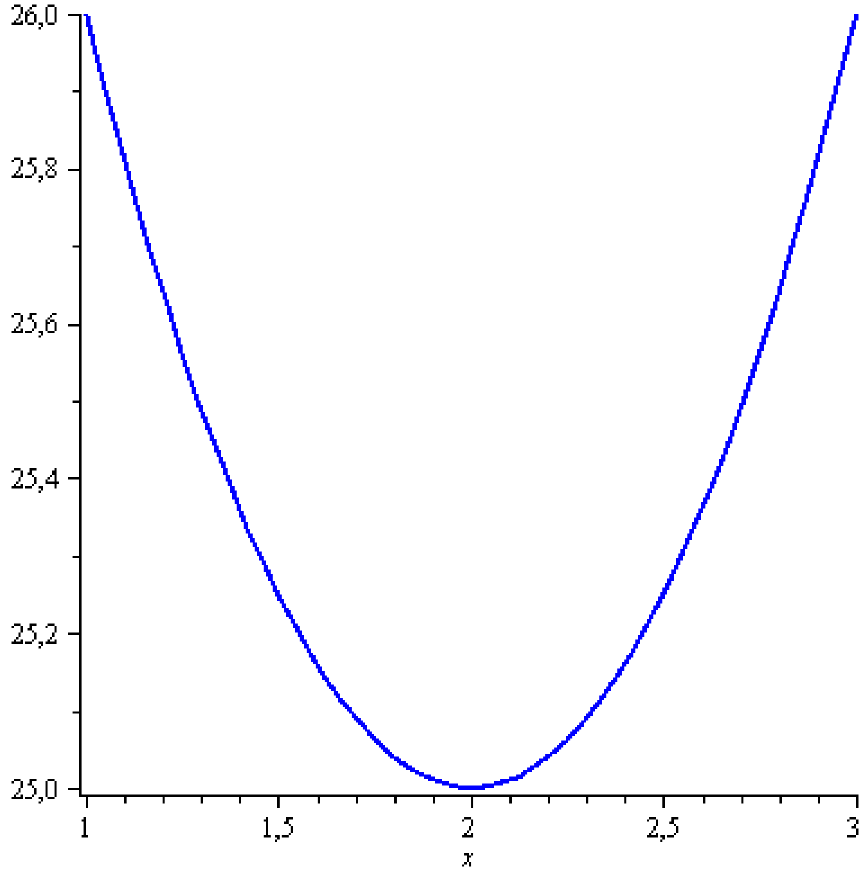
Protože jde o kvadratický polynom, je nejjednodušším způsobem načrtnout si jeho graf – parabolu. Jediné informace, které přitom musí být přesné, jsou průsečíky s osou x (kořeny polynomu) a samozřejmě zda je parabola otevřena nahoru, nebo dolů.

Druhou informaci získáme okamžitě ze zadaného výrazu. Protože je vedoucí koeficient (1) kladný, je parabola otevřena nahoru.

Kořeny dopočítáme pomocí diskriminantu jako by šlo o kvadratickou rovnici:

$$D = -100.$$

Protože je diskriminant záporný, rovnice nemá žádný reálný kořen a parabola osu x nikde neprotíná. Graf tedy vypadá takto:



Daný výraz je tedy kladný pro $x \in \mathbb{R}$ a nikdy není záporný, tj. můžeme říct, že je záporný pro $x \in \emptyset$.

(14) Určete definiční obor funkce
$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

Řešení:

Musí platit
$$x^3 - x^2 + x - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\left(x^2+1\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1.$$
Proto
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

(15) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{2x^2}{x + |x|}.$$

Řešení:

Musí platit

$$x + |x| \neq 0.$$

Nejdříve uvažme $x \geq 0$, potom

$$x + x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0.$$

Pro $x < 0$ dostaneme

$$x - x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \neq 0,$$

proto definiční obor je

$$D(f) = (0, \infty).$$

(16) Určete definiční obor funkce

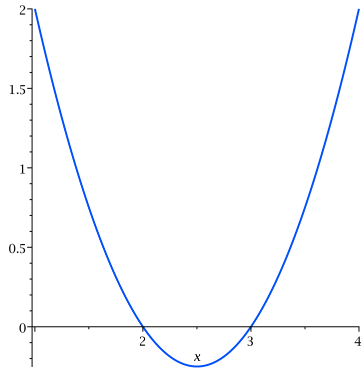
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

Řešení:

Musí platit

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0.$$

Kořeny tohoto kvadratického polynomu jsou $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$. Poněvadž koeficient u druhé mocniny je kladný, má graf této kvadratické funkce podobu



Proto definiční obor funkce je

$$D(f) = (-\infty, 2] \cup [3, \infty).$$

(17) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{\ln x}{2x^2+3x-2}.$$

Řešení:

Z logaritmu dostáváme, že $x > 0$. Dále ve jmenovateli nesmí být nula, tedy v definičním oboru dané funkce nejsou kořeny polynomu $2x^2 + 3x - 2$. Snadno určíme, že kořeny jsou $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$. Tedy

$$D(f) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

(18) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{3x}{2x-8} + \sqrt{10-x} - \ln(x+2).$$

Řešení:

Zde určíme nejprve definiční obor každé části dané funkce a poté uděláme jejich průnik. V první části, lomeném výrazu, nesmí být ve jmenovateli nula. Tedy nutně $x \neq 4$. V druhé části musí být pod odmocninou nezáporné číslo, odtud $x \leq 10$. A konečně, z logaritmu dostáváme, že $x > -2$. Celkem

$$D(f) = (-2, 4) \cup (4, 10].$$

(19) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5) + \frac{2x^2}{\sqrt{2x+6}}.$$

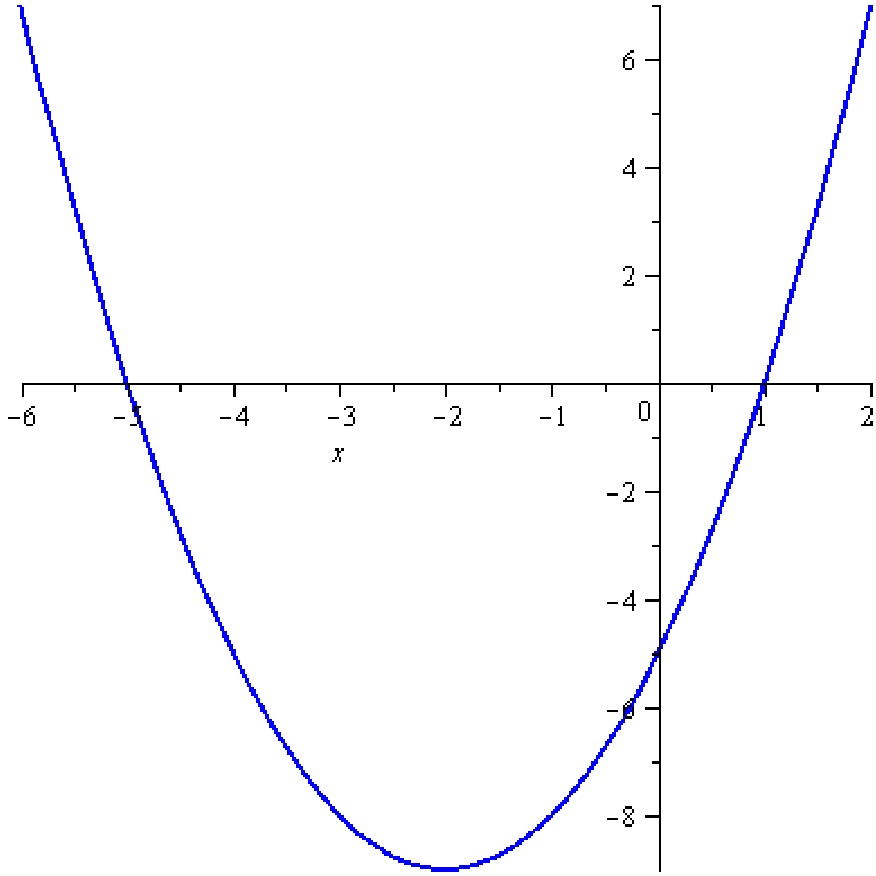
Řešení:

Určíme nejprve definiční obor každé části dané funkce a poté uděláme jejich průnik.

V první části musí platit

$$x^2 + 4x - 5 > 0.$$

Jde o kvadratický polynom jehož grafem je parabola otevřená nahoru (vedoucí koeficient je kladný) a snadno dopočítáme, že jeho kořeny jsou -5 a 1. Graf tedy vypadá takto:



Tedy $x \in (-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.

V druhé části nesmí být po odmocninou záporné číslo a zároveň ve jmenovateli není přípustná nula, tj.

$$2x + 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -3.$$

Celkem

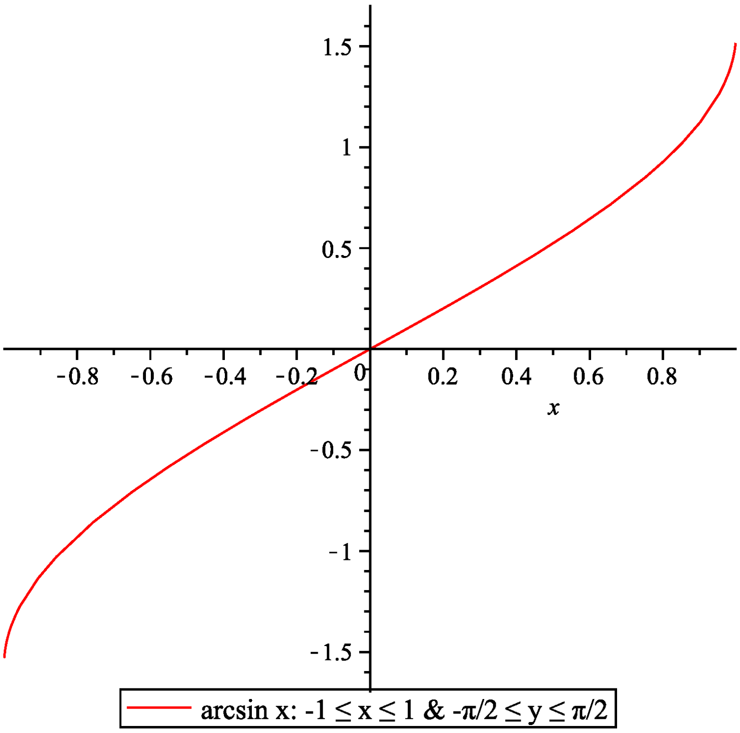
$$D(f) = (1, \infty).$$

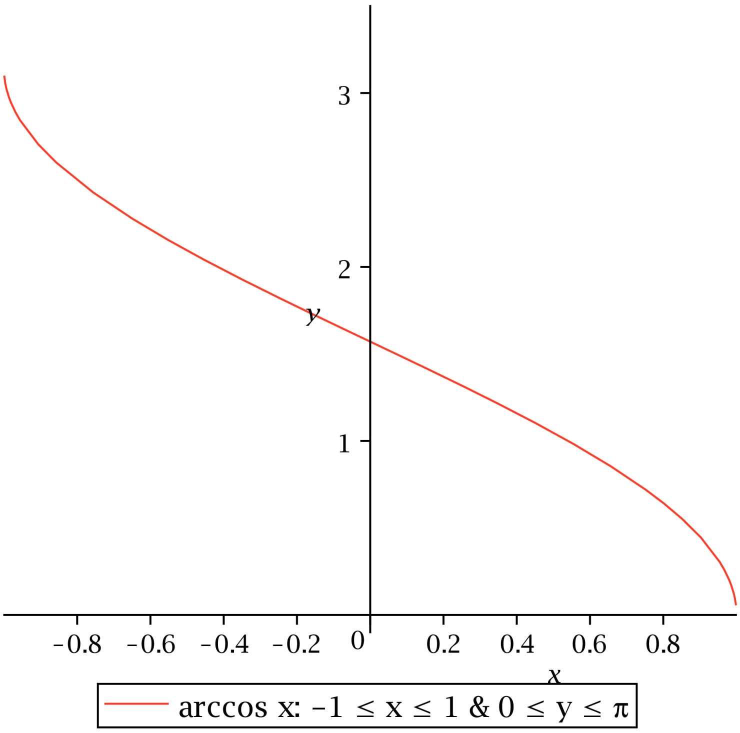
(20) Určete definiční obor funkce

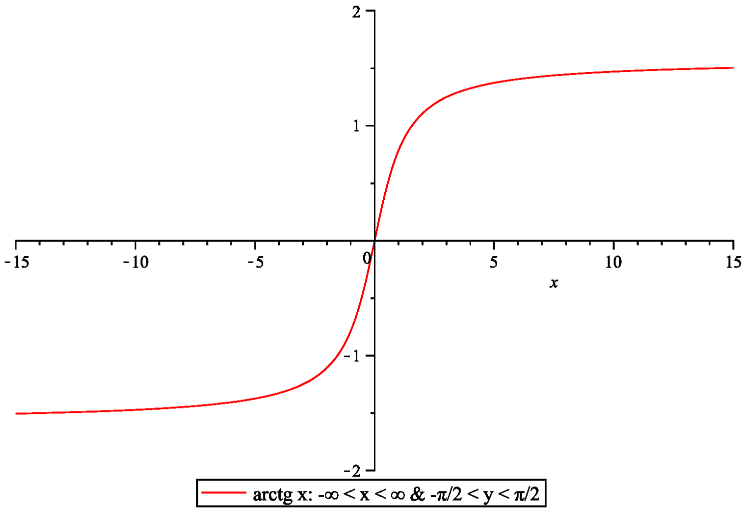
$$f(x) = \arccos \frac{1-2x}{4}.$$

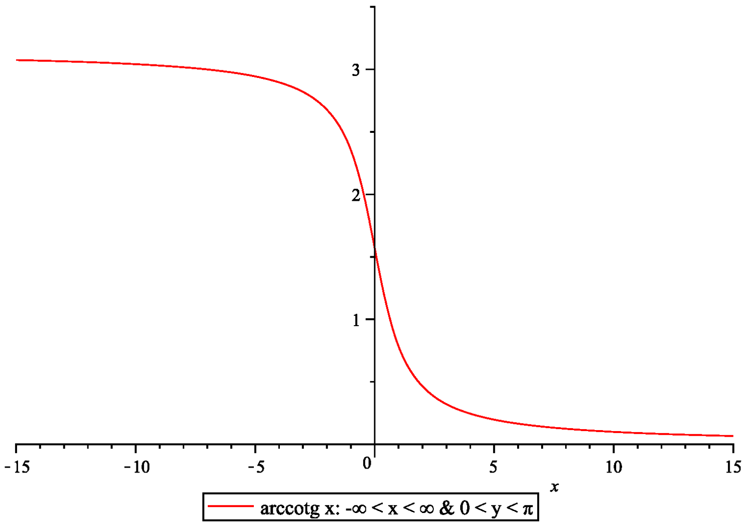
Řešení:

Nejdříve připomeňme grafy a základní vlastnosti cyklometrických funkcí









Proto musí platit

$$-1 \le \frac{1-2x}{4} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \le 1-2x \ \wedge \ 1-2x \le 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -5 \le -2x \ \wedge \ -2x \le 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \le \frac{5}{2} \ \wedge \ x \ge -\frac{3}{2}.$$

Proto máme definiční obor

$$D(f) = \left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

(21) Určete definiční obor funkce

$$g(x) = \arcsin \frac{x+3}{2} + \sqrt{\frac{x+4}{x-2}}.$$

Řešení:

Určíme nejprve definiční obor každé části dané funkce a poté uděláme jejich průnik.

V první části musí platit

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{x+3}{2} \leq 1, \\ -2 &\leq x+3 \leq 2, \\ -5 &\leq x \leq -1, \end{aligned}$$

tedy $x \in [-5, -1]$.

V druhé části nesmí být po odmocninou záporné číslo a zároveň ve jmenovateli není přípustná nula. Nulové body jsou přitom -4 a 2. Ty rozdělují reálnou osu na tři intervali, na nichž výraz pod odmocninou nabývá vždy stejného znaménka. Dosazením zjistíme jaká (přitom číslo 2 vůbec neuvažujeme, aby ve jmenovateli nebyla nula):

	$(-\infty, -4]$	$[-4, 2)$	$(2, \infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+4}{x-2}$	$+$	$-$	$+$

Odtud dostáváme, že $x \in (-\infty, -4] \cup (2, \infty)$.

Celkem

$$D(g) = [-5, -4].$$

(22) Určete definiční obor funkce

$$f:\ y = \operatorname{arccotg} \frac{x-1}{\sqrt{1-x}} + \log_{\frac{1}{3}}^{-2}(2x+21).$$

Řešení:

Určíme nejprve definiční obor každé části dané funkce a poté uděláme jejich průnik.

V první části jsou jediná omezení odmocnina a zlomek, tedy $x < 1$.

V druhé části musíme vzít v úvahu jak logaritmus, tak i fakt, že je tento výraz umocněn na záporný exponent, je tedy ve jmenovateli, a proto musí být různý od nuly. Logaritmus je roven nule v jedničce, tj.

$$2x + 21 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq -10.$$

Jako poslední zbývá vyřešit už zmíněný logaritmus, do nějž lze dosazovat pouze kladná čísla, tedy

$$2x + 21 > 0.$$

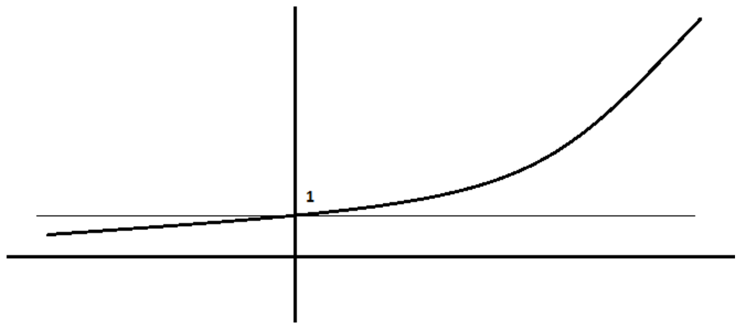
Celkem

$$D(f) = \left(-\frac{21}{2}, -10\right) \cup (-10, 1)\,.$$

(23) Určete definiční obor funkce
$$f(x) = \ln(1 - e^x).$$

Řešení:

Musí platit
$$1 - e^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > e^x\,.$$
Graf funkce e^x má podobu



proto je definiční obor
$$D(f) = (-\infty, 0).$$

(24) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{\cos x}{5^{x+1} - 3 \cdot 5^x - 50}.$$

Řešení:

Musí platit

$$5^{x+1} - 3 \cdot 5^x - 50 \neq 0.$$

Položme $y = 5^x$, potom

$$\begin{aligned} 5^{x+1} - 3 \cdot 5^x - 50 \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 5y - 3y - 50 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y \neq 50 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad y \neq 25 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x \neq 25 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 5^x \neq 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2. \end{aligned}$$

Proto máme definiční obor

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

(25) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{3^{x+1}}{\sin x + \cos x}.$$

Řešení:

Musí platit

$$\begin{aligned}
\sin x + \cos x \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{x + x + \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos\frac{x - x - \frac{\pi}{2}}{2} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Proto máme definiční obor

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi\right\}.$$

(26) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{x - \cos x}{2\sin^2 x + 3\cos x}.$$

Řešení:

Musí platit

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x + 3\cos x \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\left(1 - \cos^2 x\right) + 3\cos x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad -2\cos^2 x + 3\cos x + 2 \neq 0 \quad \overset{\cos x = y}{\Leftrightarrow} \\ &\overset{\cos x = y}{\Leftrightarrow} \quad -2y^2 + 3y + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad y_1 \neq 2,\ y_2 \neq -\frac{1}{2} \ \wedge \ \cos x = y \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \cos x \neq 2 \text{ (vždy)}\ ,\ \cos x \neq -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x \neq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \wedge \ x \neq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Proto máme definiční obor

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right\}.$$

(27) Dokažte, že pro $x > 0$ platí

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}.$$

Řešení:

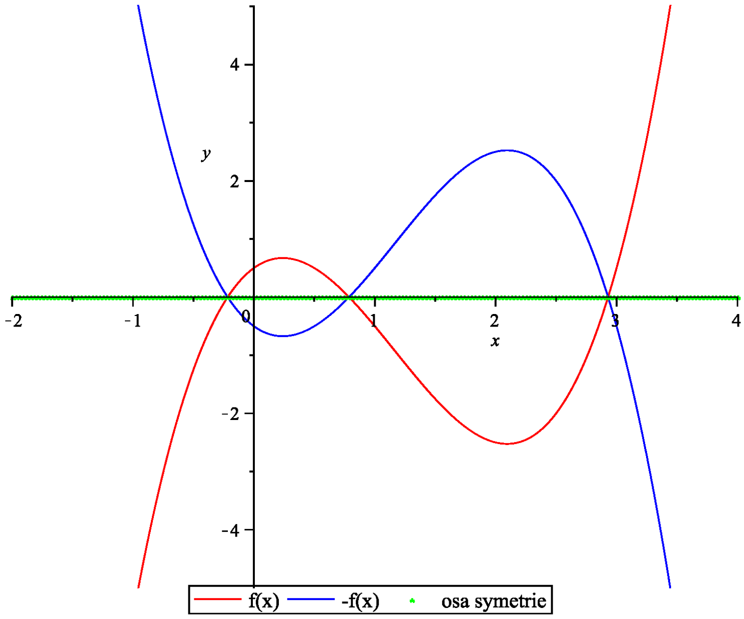
Položme $u = \operatorname{arctg} x$ a $v = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$. Potom platí $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Musíme ukázat, že $u = v$. Proto

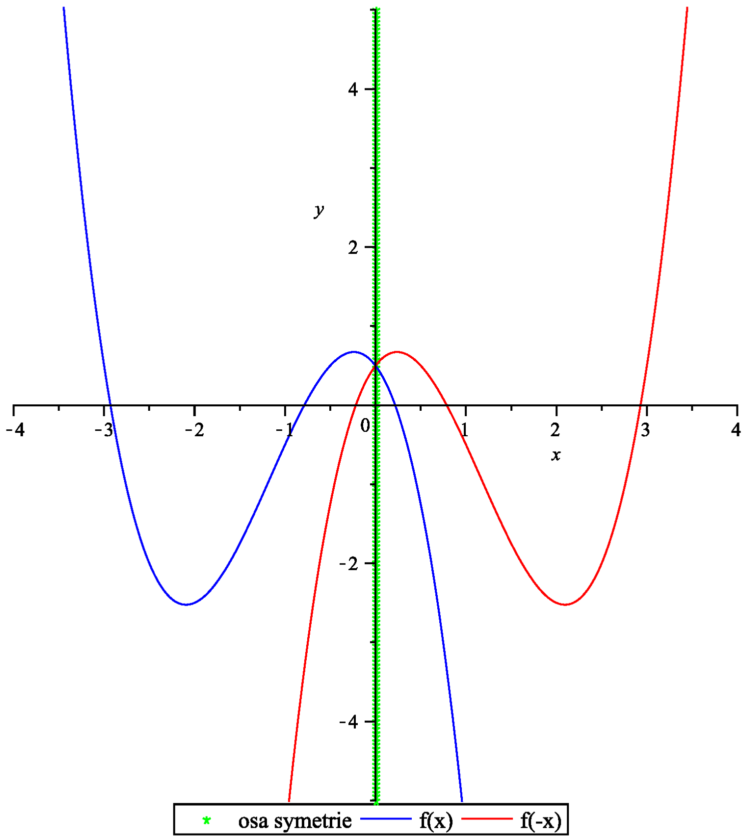
$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} u = x \ \wedge\ \operatorname{cotg} v = \frac{1}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} u = x \ \wedge\ \frac{1}{\operatorname{tg} v} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} u = x \ \wedge\ \operatorname{tg} v = x \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} u = x = \operatorname{tg} v \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad u = v.
\end{aligned}$$

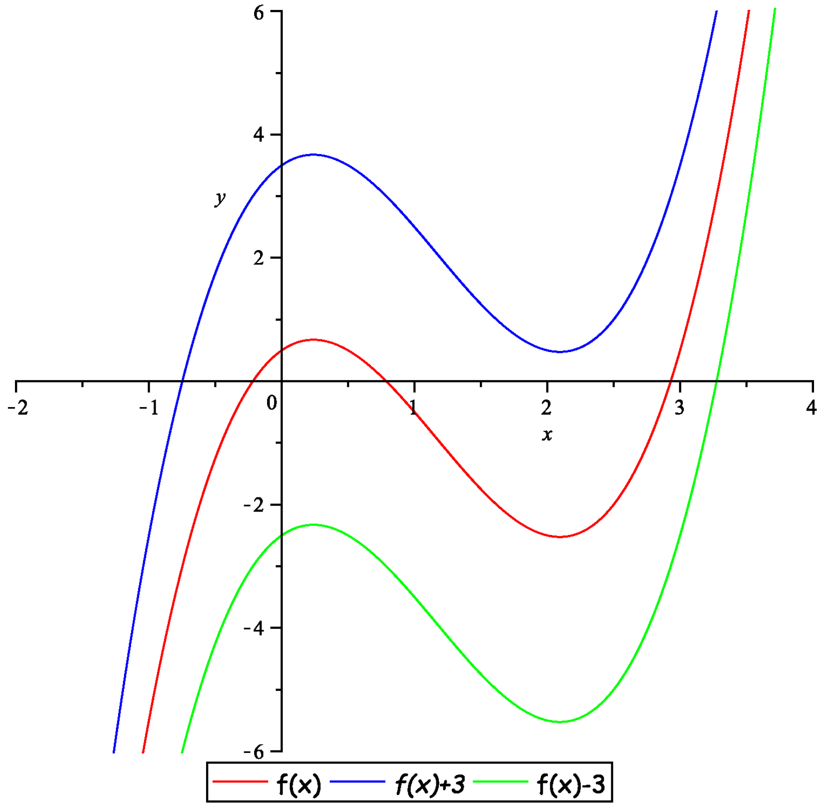
(28) Načrtněte graf libovolné nekonstantní funkce f a k němu grafy funkcí

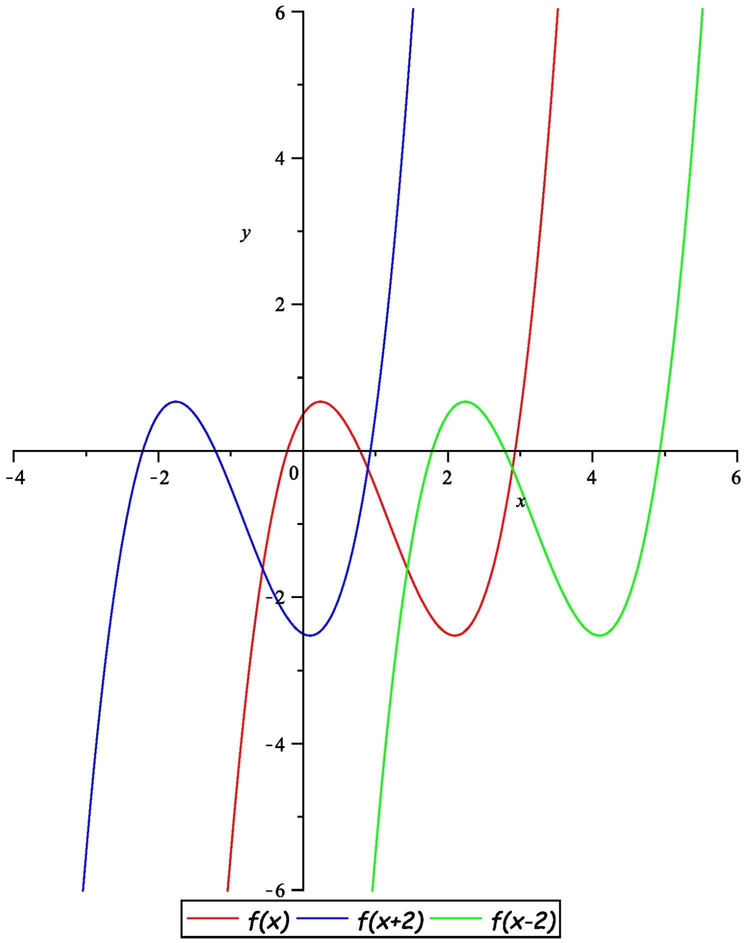
$$-f(x), \quad f(-x), \quad f(x)+b, \quad f(x-a), \quad k\cdot f(x), \quad f(m\cdot x).$$

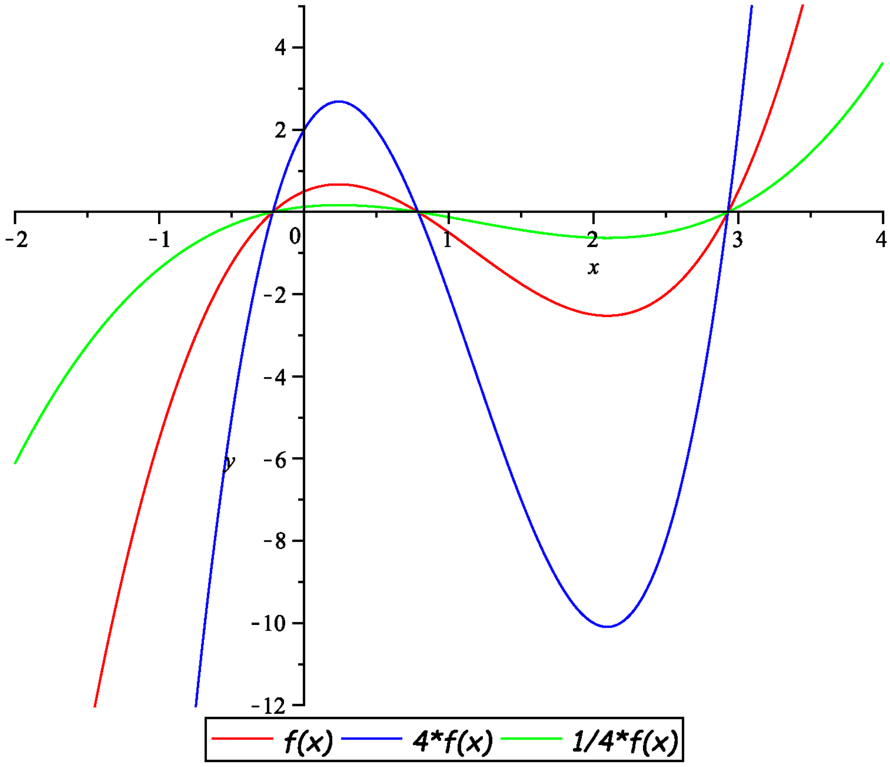
Řešení:

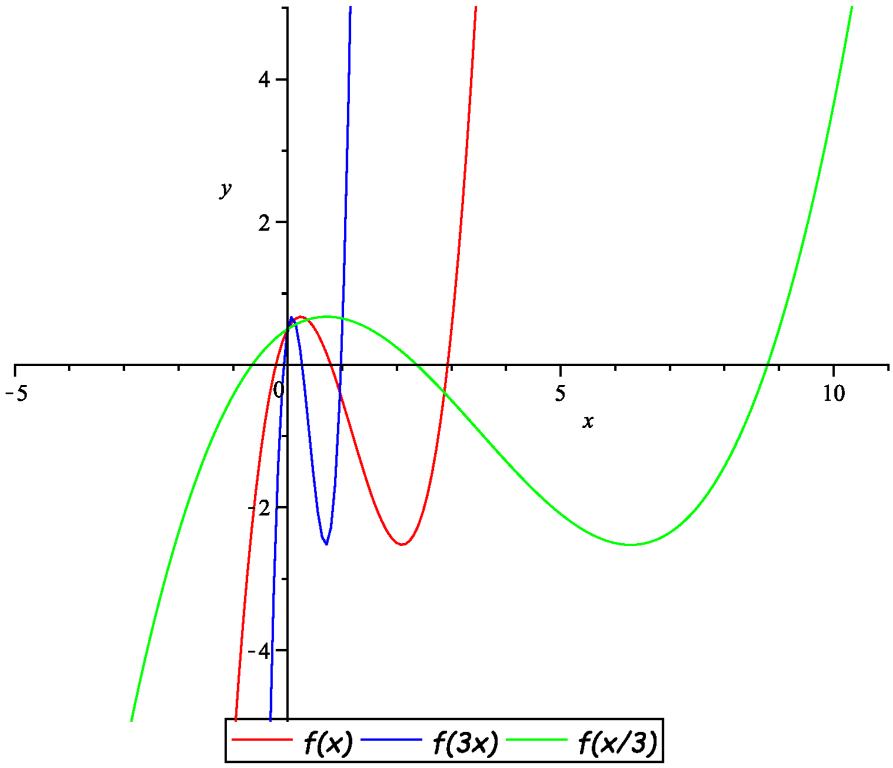





f(x)
f(x)+3
f(x)-3
x
y


f(x)
f(x+2)
f(x-2)
x
y

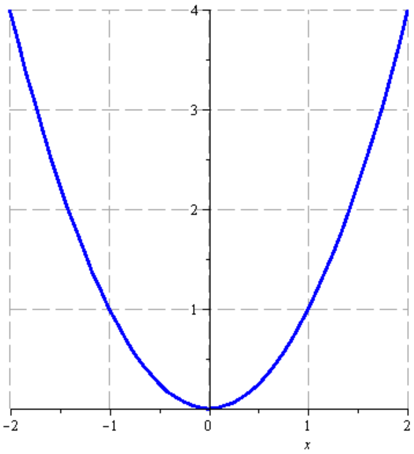

4
2
-2
-1
0
1
2
3
4
x
-2
-4
y
-6
-8
-10
-12
f(x)
4*f(x)
1/4*f(x)


4
y
2
-5
0
5
10
x
-2
-4
f(x)
f(3x)
f(x/3)

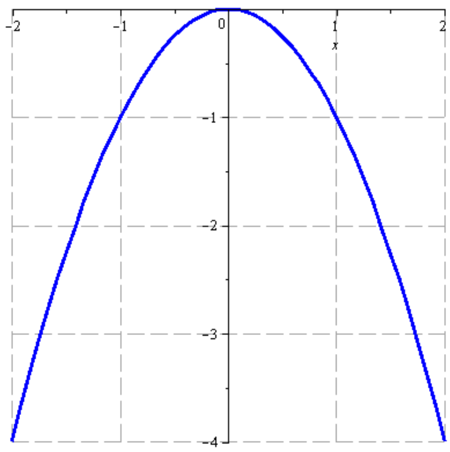
(29) Načrtněte graf funkce

$$(i) y = x^2, \quad (ii) y = -x^2, \quad (iii) y = (-x)^2.$$

Řešení:



Obrázek 1. Řešení (i) a (iii).

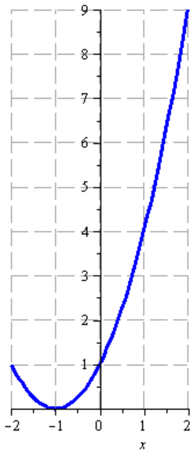


Obrázek 2. Řešení (ii).

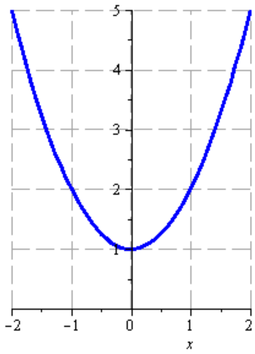
(30) Načrtněte graf funkce

$$(i) y = (x+1)^2, \quad (ii) y = x^2 + 1, \quad (iii) y = (1-x)^3.$$

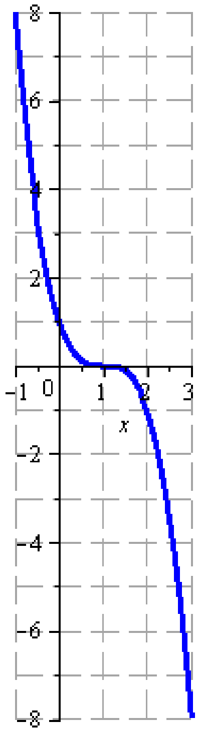
Řešení:



OBRÁZEK 3. Řešení (i).



OBRÁZEK 4. Řešení (ii).

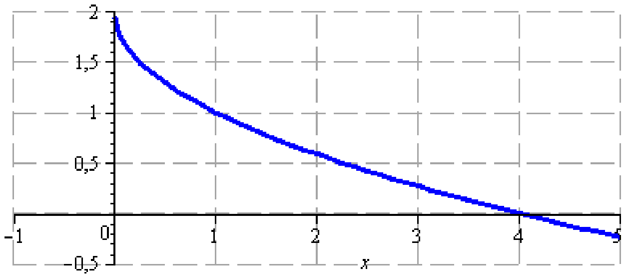


OBRÁZEK 5. Řešení (iii).

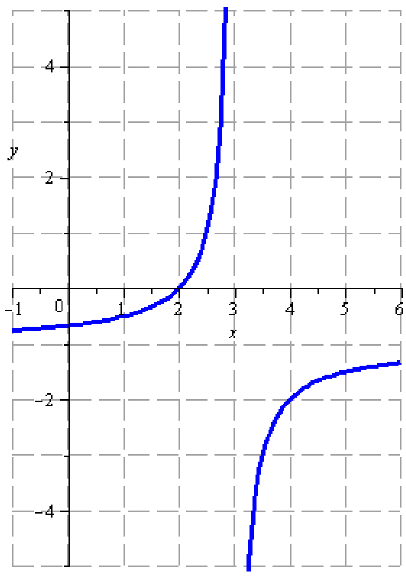
(31) Načrtněte graf funkce

$$(i) y = 2 - \sqrt{x}, \quad (ii) y = \frac{1}{3-x} - 1.$$

Řešení:



Obrázek 6. Řešení (i).

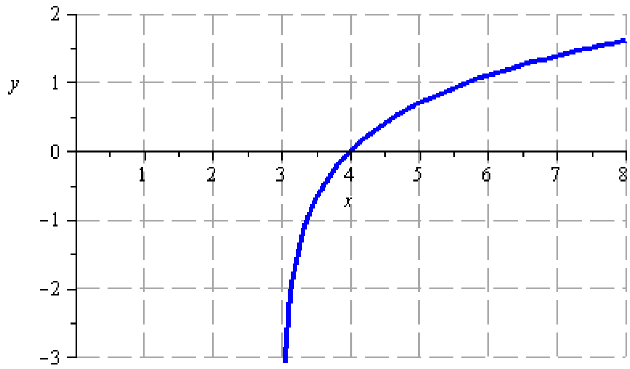


Obrázek 7. Řešení (ii).

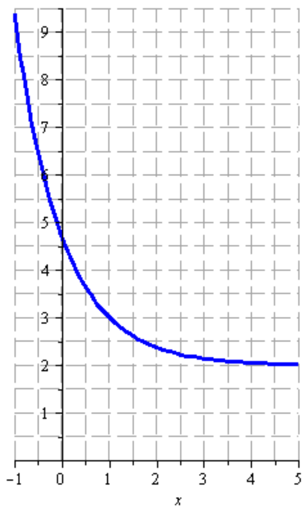
(32) Načrtněte graf funkce

$$(i) y = \ln(x - 3), \quad (ii) y = 2 + e^{1-x}.$$

Řešení:



Obrázek 8. Řešení (i).

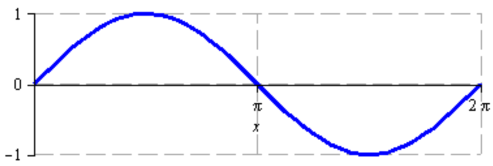


Obrázek 9. Řešení (ii).

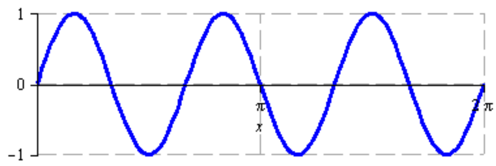
(33) Načrtněte graf funkce

$$(i) y = \sin x, \quad (ii) y = \sin(3x), \quad (iii) y = \sin\frac{x}{5}, \quad (iv) y = 2\sin x.$$

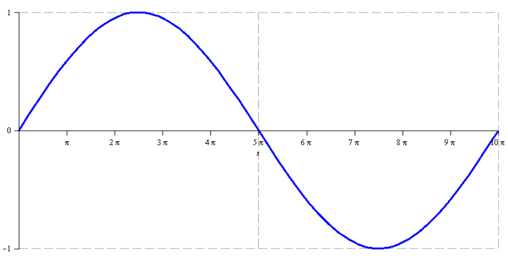
Řešení:



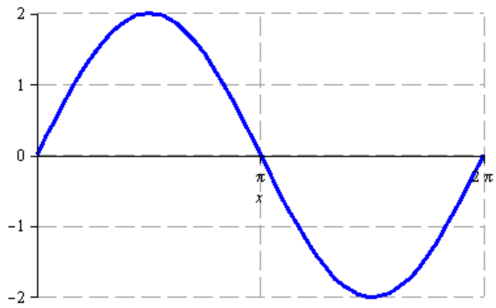
Obrázek 10. Řešení (i).



Obrázek 11. Řešení (ii).



Obrázek 12. Řešení (iii).

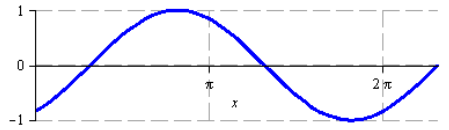


Obrázek 13. Řešení (iv).

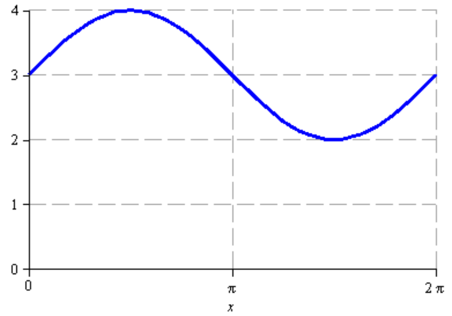
(34) Načrtněte graf funkce

$$(i) y = \sin(x-1), \quad (ii) y = 3 + \sin x, \quad (iii) y = \operatorname{tg}(3x).$$

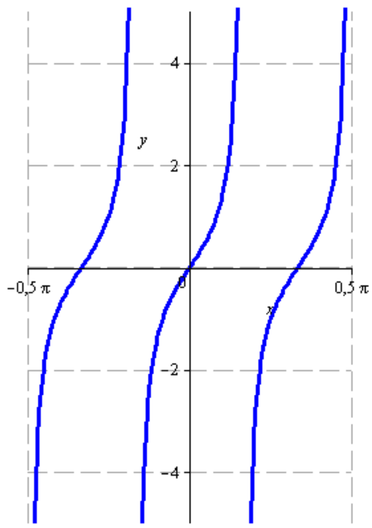
Řešení:



Obrázek 14. Řešení (i).



Obrázek 15. Řešení (ii).



Obrázek 16. Řešení (iii).

(35) Načrtněte graf funkce

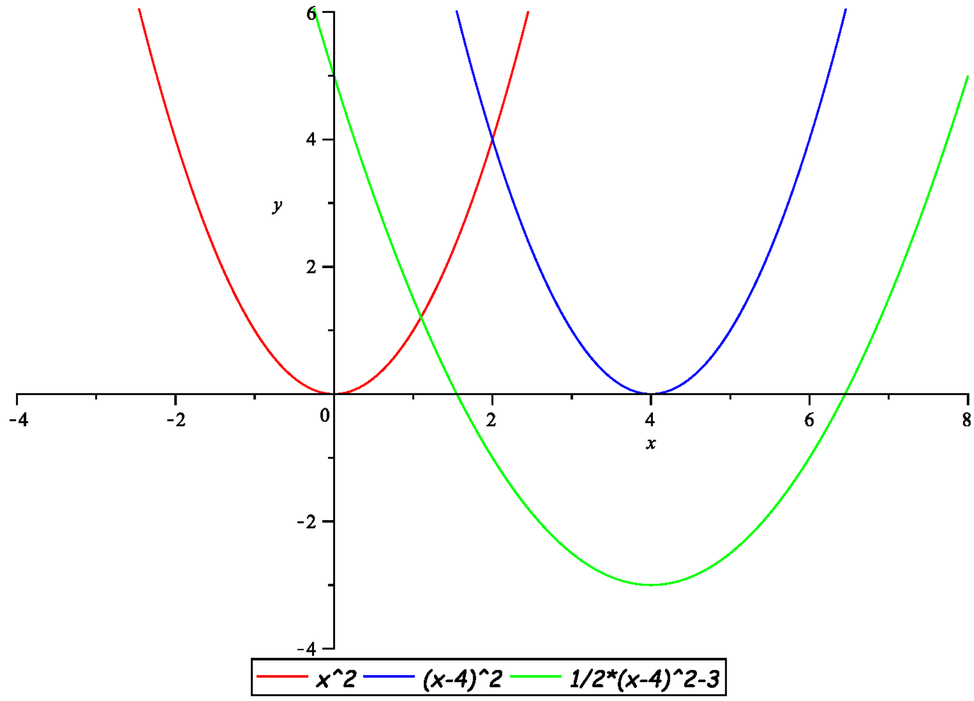
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5.$$

Řešení:

Nejdříve upravíme zadání do tvaru

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 8x + 10\right) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-4)^2 - 6\right] \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 3. \end{aligned}$$

Nyní můžeme využít Příklad 28 a graf funkce $f(x)$ načrtnout díky znalosti grafu funkce x^2, proto

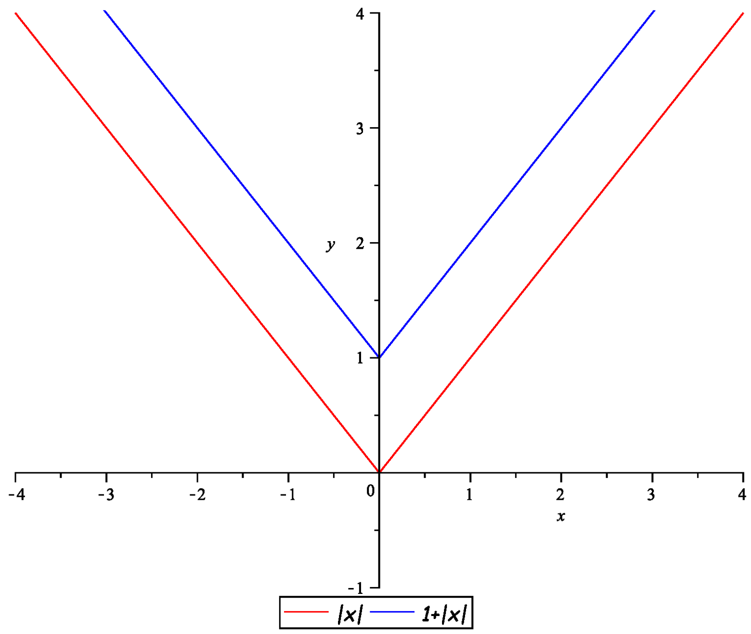


(36) Načrtněte grafy funkcí

$$f_1(x) = |x| + 1 \quad \text{a} \quad f_2(x) = 2\,|x-1| + |x| + 2.$$

Řešení:

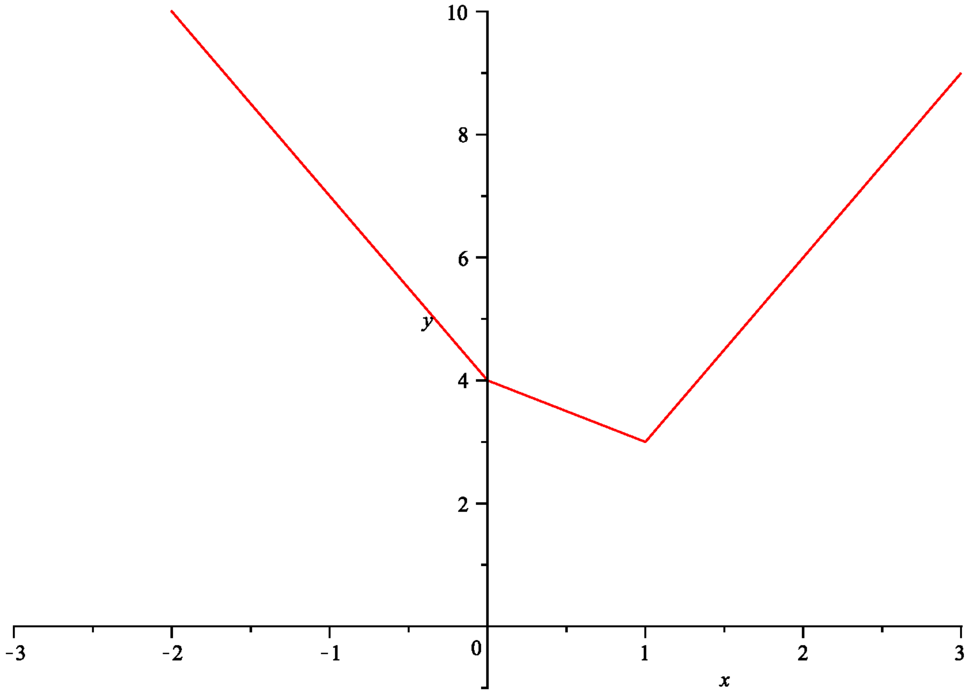
Pomocí řešení Příkladu 28 můžeme ze znalosti grafu funkce $|x|$ načrtnout graf funkce $f_1(x)$, tj.



Nyní načrtneme graf funkce $f_2(x)$. Nejdříve určíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot, tj. $x_1 = -1$ a $x_2 = 0$. Tyto body nám rozdělí reálnou osu na tři subintervaly. Proto

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, 0] \quad &\Rightarrow \quad f_2(x) = -2(x-1) - x + 2 = -3x + 4, \\ x \in (0, 1] \quad &\Rightarrow \quad f_2(x) = -2(x-1) + x + 2 = -x + 4, \\ x \in (1, \infty) \quad &\Rightarrow \quad f_2(x) = 2(x-1) + x + 2 = 3x. \end{aligned}$$

Na jednotlivých subintervalech je graf funkce tvořen přímkami, které prochází postupně body $[-1, 7]$, $[0, 4]$, $[1, 3]$ a $[2, 6]$, tj.


10
8
6
y
4
2
-3
-2
-1
0
1
2
3
x

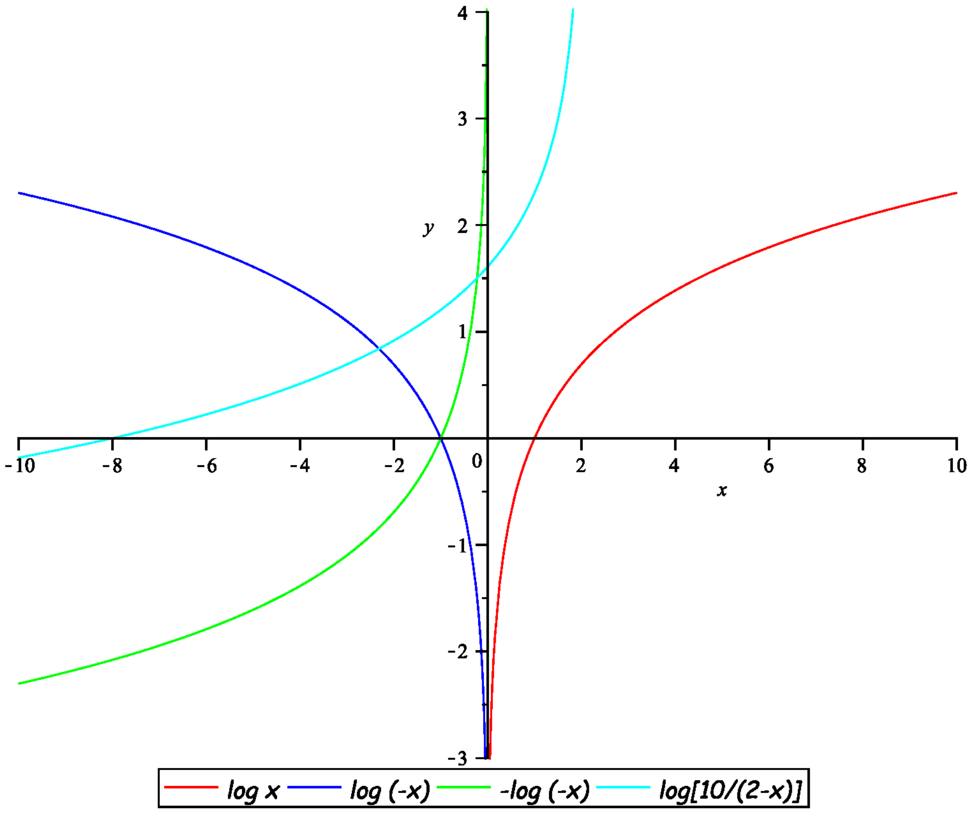
(37) Načrtněte graf funkce
$$f(x) = \log \frac{10}{2-x}.$$

Řešení:

Je zřejmé, že definiční obor funkce je $D(f) = (-\infty, 2)$. Upravíme zadání funkce, tj.
$$\begin{aligned} f(x) = \log \frac{10}{2-x} \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = \log 10 - \log(2-x) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = 1 - \log\left[-(x-2)\right] \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = -\log\left[-(x-2)\right] + 1. \end{aligned}$$

Ještě určíme průsečík s osou x, tj.
$$\begin{aligned} 0 = -\log\left[-(x-2)\right] + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 = \log(2-x) \quad \Leftrightarrow \quad 10 = 2-x \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = -8. \end{aligned}$$

Proto s pomocí Příkladu 28 můžeme načrtnou graf funkce $f(x)$, tj.



Grafy funkcí na obrázku je potřeba brát pouze ilustrativně (na obrázku je ve skutečnosti přirozený logaritmus ln).

(38) Načrtněte graf funkce

$$f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1.$$

Řešení:

Pro snažší náčrt nejdříve určíme průsečík s osou x, tj.

$$2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ nebo}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \ \text{ nebo } \ x = \frac{17\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

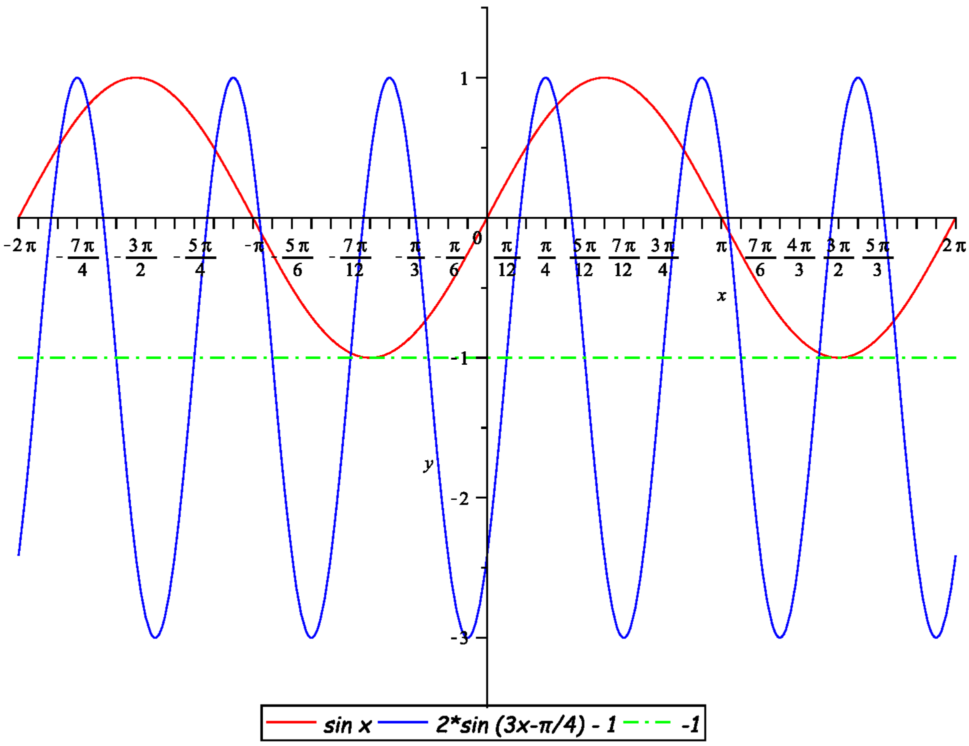
Osa grafu funkce se posune do $y = -1$, proto určíme i průsečíky s touto osou, tj.

$$2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x - \frac{\pi}{4} = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Tedy hledaný graf funkce $f(x)$ má podobu

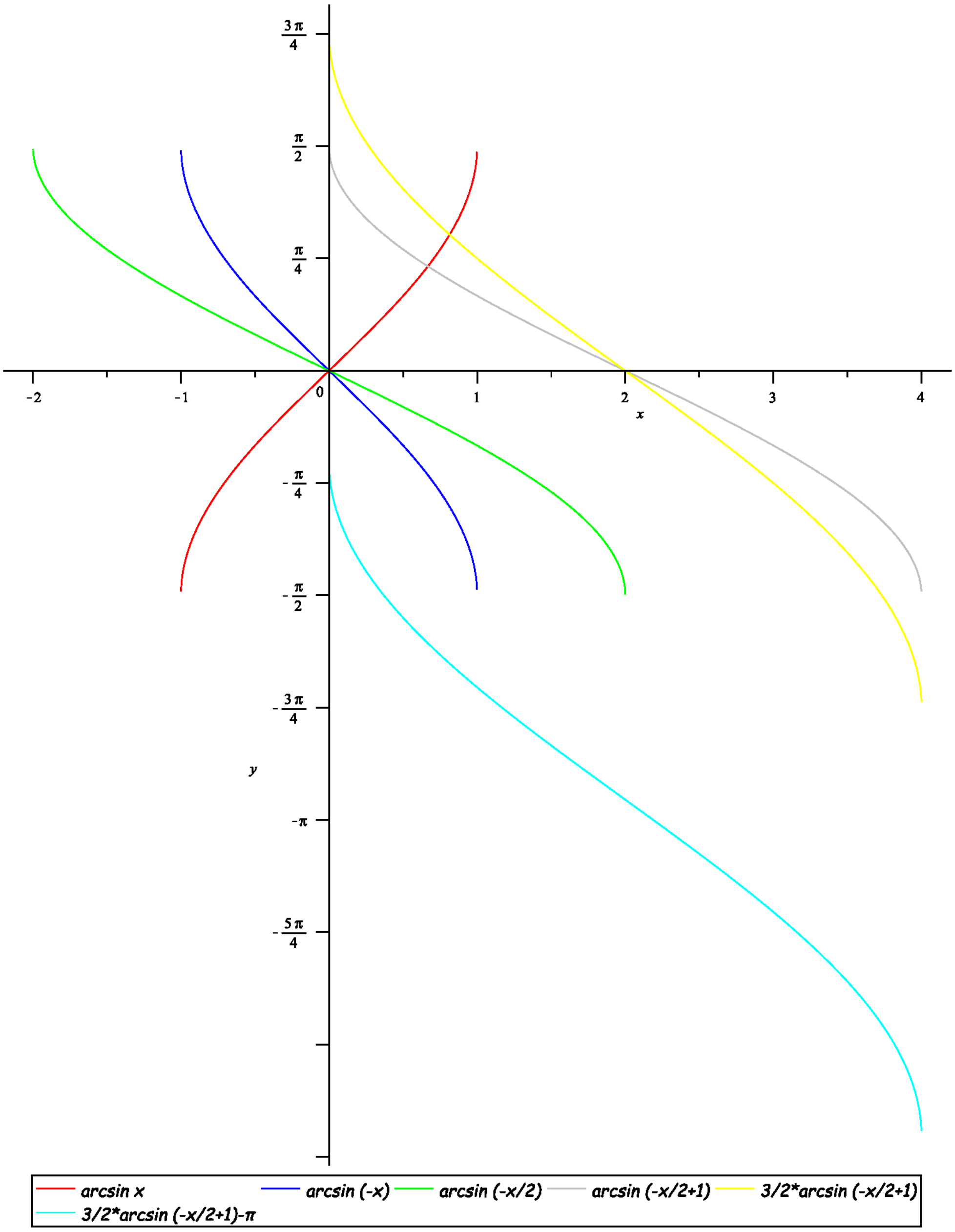


(39) Načrtněte graf funkce

$$y(x) = \frac{3}{2} \arcsin\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) - \pi.$$

Řešení:

S pomocí Příkladu 28 dostaneme



(40) Rozhodněte o paritě funkcí (je daná funkce sudá či lichá?)

i) $f_1(x) = 2$;

ii) $f_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$;

iii) $f_3(x) = \sqrt{x}$;

iv) $f_4(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

v) $f_5(x) = \sin x + \cos x$;

vi) $f_6(x) = x \cosh x$.

Jak se mění parita funkce vzhledem k součtu, rozdílu, součinu a podílu?

Řešení:

i) $f_1(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad f_1(-x) = 2 \quad \Rightarrow$ sudá funkce,

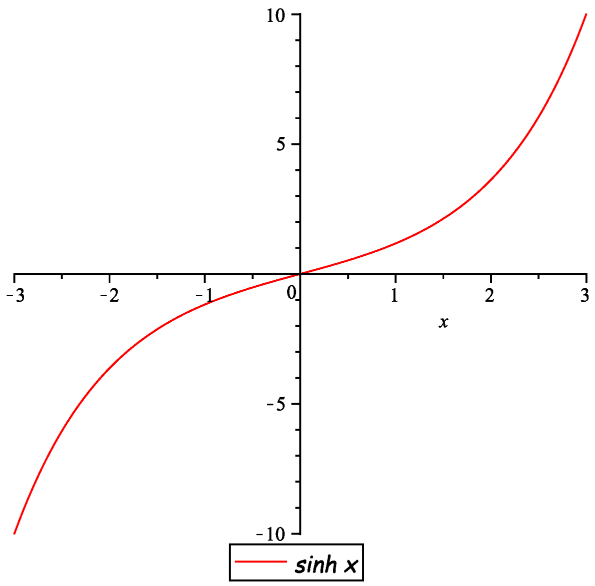
ii) $f_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad f_2(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \Rightarrow$ sudá funkce,

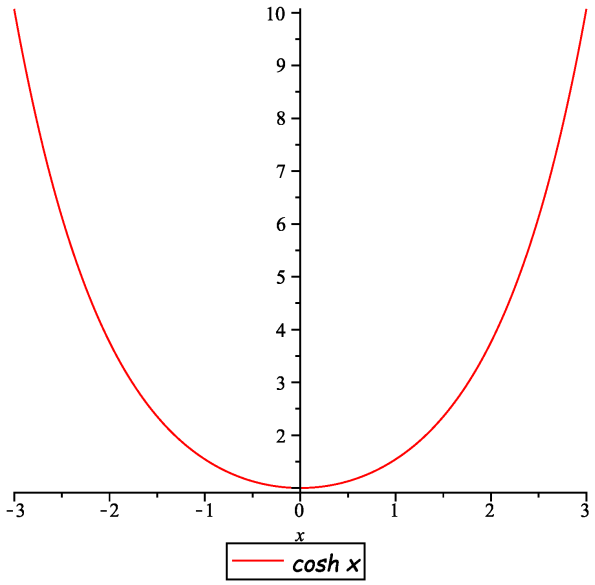
iii) $f_3(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f_3(-x) = \sqrt{-x}$ neexistuje $\Rightarrow$ funkce není sudá ani lichá,

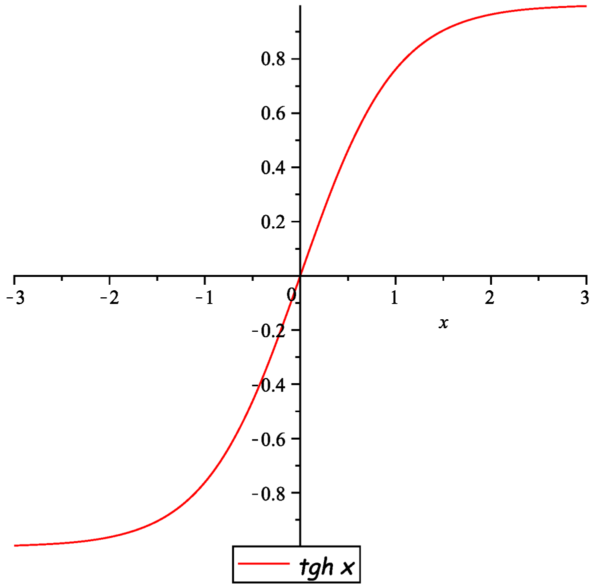
iv) $f_4(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} \quad \Rightarrow \quad f_4(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} =$
$= -\ln \frac{1-x}{1+x} \quad \Rightarrow$ lichá funkce,

v) $f_5(x) = \sin x + \cos x \quad \Rightarrow \quad f_5(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) =$
$= -\sin x + \cos x \quad \Rightarrow$ funkce není sudá ani lichá,

vi) Nyní si připomene definice hyperbolických funkcí a jejich grafy, tj. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ a







Potom dostaneme
$f_6(x) = x\cosh x \quad \Rightarrow \quad f_6(-x) = -x\cosh(-x) = -x\cosh x \quad \Rightarrow$ lichá funkce.
Označme „S“ sudou funkci a „L“ lichou funkci. Pak platí:

$$S \pm S, S \cdot S, L \cdot L, \frac{S}{S}, \frac{L}{L}$$

jsou sudé funkce,

$$L \pm L, S \cdot L, L \cdot S, \frac{S}{L}, \frac{L}{S}$$

jsou liché funkce.

(41) Určete inverzní funkci
$$f(x) = \frac{x-2}{x+2}.$$

Řešení:

Z rovnice
$$y = \frac{x-2}{x+2}$$
musíme vyjádřit x, potom přeznačením $y \rightsquigarrow x$ dostaneme hledaný předpis pro inverzní funkci. Proto
$$y = \frac{x-2}{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad y(x+2) = x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x(y-1) = -2(y+1) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-2(y+1)}{y-1} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{-2(x+1)}{x-1}.$$

(42) Určete inverzní funkci
$$f(x) = 1 + \log(x + 2).$$

Řešení:

Z rovnice
$$y = 1 + \log(x + 2)$$
musíme vyjádřit x, potom přeznačením $y \rightsquigarrow x$ dostaneme hledaný předpis pro inverzní funkci. Proto
$$\begin{aligned} y = 1 + \log(x + 2) \quad &\Leftrightarrow \quad y - 1 = \log(x + 2) \quad \Leftrightarrow \quad 10^{y-1} = x + 2 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = 10^{y-1} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = 10^{x-1} - 2. \end{aligned}$$

(43) Určete inverzní funkci

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1; \\ x^2, & x \in [1, 4]; \\ 2^x, & x > 4. \end{cases}$$

Řešení:

Přímým výpočtem dostaneme výsledek

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x < 1; \\ \sqrt{x}, & x \in [1, 16]; \\ \log_2 x, & x > 16. \end{cases}$$

(44) Určete jednotlivé elementární funkce, z nichž se skládá funkce
$$F(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3 + 3)}.$$

Řešení:

Složky jsou
$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = x^3 + 3.$$
Daná funkce je z nich složena takto:
$$F(x) = f(g(h(x))) = (f \circ g \circ h)(x).$$

(45) Určete jednotlivé elementární funkce, z nichž se skládá funkce

$$F(x) = \log_2 \sqrt{\operatorname{tg}(2+x)}.$$

Řešení:

Složky jsou

$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \operatorname{tg} x, \quad l(x) = 2 + x.$$

Daná funkce je z nich složena takto:

$$F(x) = f(g(h(l(x)))) = (f \circ g \circ h \circ l)(x).$$

(46) Určete jednotlivé elementární funkce, z nichž se skládá funkce

$$a) F(x) = \operatorname{cotg}^5 x, \qquad b) G(x) = \cos x^7.$$

Řešení:

a) Složky jsou

$$f(x) = \operatorname{cotg} x, \quad g(x) = x^5.$$

Daná funkce je z nich složena takto:

$$F(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

b) Složky jsou

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = x^7.$$

Daná funkce je z nich složena takto:

$$F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

(47) Vypočtěte $f(x)$, jestliže $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$.

Řešení:

Musíme za x dosadit takovou hodnotu, aby na levé straně rovnice $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$ zůstala pouze „nějaká“ proměnná, zbytek dostaneme pouze přeznačením. Zvolme $x = \frac{1}{t}$, potom máme

$$f\left(\frac{1}{\frac{1}{t}}\right) = f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{\operatorname{sgn}(t)}{|t|} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|} = \frac{\operatorname{sgn}(t) + \sqrt{1+t^2}}{|t|}.$$

Nyní položíme $t \rightsquigarrow x$ a dostaneme řešení

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x) + \sqrt{1+x^2}}{|x|}.$$

(48) Vypočtěte $f(x)$, jestliže $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$.

Řešení:

Využijeme postup z Příkladu 47. Musíme najít vhodnou hodnotu x. Proto musíme vyřešit rovnici

$$\frac{x}{x+1} = t \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{t}{1-t}.$$

Nyní zvolíme $x = \frac{t}{1-t}$, potom

$$f\left(\frac{\frac{t}{1-t}}{\frac{t}{1-t}+1}\right) = f(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2.$$

Pro $t \rightsquigarrow x$ jsme našli funkční předpis ve tvaru

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2.$$

(49) Vyřešte nerovnici

$$\left|\frac{2x+1}{x-3}+1\right| \leq 1.$$

Řešení:

Nejdříve nerovnost upravíme

$$\left|\frac{2x+1}{x-3}+1\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2x+1+x-3}{x-3}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{3x-2}{x-3}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |3x-2| \leq |x-3|\,.$$

Nulové body absolutních hodnot jsou $x_1 = \frac{2}{3}$ a $x_2 = 3$. Tímto se nám rozdělí reálná osa na tři subintervaly, na kterých budeme muset vyřešit nerovnici zvlášť. Proto

$$x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] : \; -3x+2 \leq -x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \; x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right],$$
$$x \in \left(\frac{2}{3}, 3\right] : \; 3x-2 \leq -x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \; x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{4}\right],$$
$$x \in (3, \infty) : \; 3x-2 \leq x-3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \; x \in \{\emptyset\}\,.$$

Proto řešením je interval $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$.

(50) Dokažte, že aritmetický průměr dvou nezáporných čísel je větší nebo roven jejich průměru geometrickému.

Řešení:

Jinými slovy máme dokázat, že platí

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad a \geq 0,\ b \geq 0.$$

To plyne z této úvahy

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

(51) Pomocí matematické indukce dokažte, že platí *Bernoulliova nerovnost*

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \text{kde } n \in \mathbb{N},\ n > 1,\ x > -1.$$

Řešení:

Nerovnost dokážeme pomocí matematické indukce, proto vezme první možnou hodnotu n, tj. $n = 2$, a ukážeme, že je nerovnost splněna, proto

$$(1+x)^2 \geq 1+2x \quad \Leftrightarrow \quad 1+2x+x^2 \geq 1+2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 0.\checkmark$$

Uděláme indukční krok, proto předpokládejme, že rovnost platí pro nějaké $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tj. $(1+x)^n \geq 1+nx$. Teď ukážeme, že nerovnost platí i pro $n+1$. Proto

$$\begin{aligned}
&(1+x)^n \geq 1+nx \;/\cdot (1+x) > 0 \quad \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow \quad (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \quad \Rightarrow \\
&\qquad \overset{nx^2 \geq 0}{\Rightarrow} \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x \quad \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x.
\end{aligned}$$

Tedy i pro $n+1$ je nerovnice splněna. Tím jsme dokázali Bernoulliovu nerovnost.

(52) Pomocí matematické indukce dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

<u>**Řešení:**</u>

Nejdříve ověříme, že rovnost platí pro $n = 1$, tj.

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}. \checkmark$$

Nechť nyní rovnost platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Pak pro $n + 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + n + 1 &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

čímž je identita dokázána.

(53) Pomocí matematické indukce dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Řešení:

Nejdříve ověříme, že rovnost platí pro $n = 1$, tj.

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1. \checkmark$$

Nechť nyní rovnost platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Pak pro $n+1$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} =$$
$$= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)}{4} = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4},$$

čímž je identita dokázána.

Rozklad na parciální zlomky

- *Lomená racionální funkce* $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$;
- má-li polynom v čitateli stejný, nebo vyšší stupeň než polynom ve jmenovateli, provedeme dělení polynomů – tím získáme polynom a *ryze lomenou racionální funkci* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (tj., $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$);
- určíme reálné kořeny polynomu $Q(x)$ (pomocí Hornerova schématu, vzorců, vytýkáním či jinými úpravami) a zapíšeme $Q(x)$ jakou součin lineárních polynomů ve tvaru $x - x_0$, kde x_0 je reálný kořen, a kvadratických polynomů ve tvaru $(x-a)^2+b^2$, které nemají reálné kořeny;
- zapíšeme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pomocí parciální zlomků s neurčitými koeficienty, přičemž jednoduchému reálnému kořenu x_0, tj. členu $x - x_0$, odpovídá parciální zlomek ve tvaru
$$\frac{A}{x-x_0},$$
jednoduchému komplexnímu kořenu $a+ib$, tj. členu $(x-a)^2+b^2$, odpovídá parciální zlomek
$$\frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2},$$
pro k-násobný reálný kořen x_0, tj. pro člen $(x-x_0)^k$, odpovídá k parciálních zlomků
$$\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-x_0)^k}$$
a pro k-násobný komplexní kořen $a+ib$, tj. pro člen $[(x-a)^2+b^2]^k$, odpovídá k parciálních zlomků ve tvaru
$$\frac{B_1x+C_1}{(x-a)^2+b^2}+\frac{B_2x+C_2}{[(x-a)^2+b^2]^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{[(x-a)^2+b^2]^k};$$
- metodou neurčitých koeficientů (příp. s pomocí dosazení některých kořenů) určíme všechny neznámé koeficienty v čitatelích parciálních zlomků.

(54) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{3x^2 - 5x + 8}{x^3 - 2x^2 + x - 2}.$$

Řešení:

Nejdříve musíme rozložit jmenovatele na součin, tj. učit kořeny. K tomu můžeme využít tzv. Hornerovo schéma (viz později) nebo některou z elementárních úprav, proto

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x-2) + x - 2 = \left(x^2+1\right)(x-2).$$

Proto rozklad na parciální zlomky musí vypadat takto

$$\frac{3x^2 - 5x + 8}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{Ax + B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Pro další výpočet musíme obě strany rovnice vynásobit jmenovatelem původního zlomku, proto

$$3x^2 - 5x + 8 = (Ax+B)(x-2) + Cx^2 + C,$$
$$3x^2 - 5x + 8 = Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2 + C.$$

Pro určení jednotlivých koeficientů lze využít dosazení jednotlivých kořenů (zde pouze $x = 2$), ovšem takovým způsobem dostaneme všechny hledané koeficienty pouze v případě jednoduchých reálných kořenů. Druhou možností je tzv. metoda neurčitých koeficientů, kdy porovnáváme koeficienty u jednotlivých mocnin x, tj.

$$\begin{aligned} x^2: &\qquad 3 = A + C, \\ x^1: &\qquad -5 = -2A + B, \\ x^0 \text{ (koeficienty bez } x): &\qquad 8 = -2B + C. \end{aligned}$$

Tím jsme obdrželi soustavu tří rovnic o třech neznámých, kterou lze vyřešit přímo (metodami známých ze střední školy nebo pomocí matic). Řešením jsou hodnoty $A = 1$, $B = -3$ a $C = 2$. Tedy hledaný rozklad je tvaru

$$\frac{3x^2 - 5x + 8}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{x-3}{x^2+1}.$$

Při hledání je možné použít i kombinaci obou popsaných metod – část koeficientů získat dosazením kořenů a zbytek metodou neurčitých koeficientů, kde bude nutné již vyřešit nižší počet rovnic.

(55) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3+1}.$$

Řešení:

Rozložením jmenovatele (buď se znalostí vhodného vzorce nebo z faktu, že $x = -1$ je kořen tohoto polynomu, a dále pomoci dělení dvou polynomů) obdržíme $x^3 + 1 = (x + 1)\left(x^2 - x + 1\right)$. Proto rozklad musí vypadat takto

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

což vede k rovnici

$$1 = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C.$$

Pomocí metody neurčitých koeficientů dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^2:\ 0 &= A + B, \\ x^1:\ 0 &= -A + B + C, \\ x^0:\ 1 &= A + C, \end{aligned}$$

jejímž řešením je trojice $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ a $C = \frac{2}{3}$. Proto máme

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1}.$$

(56) Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{1}{x^3(x+1)}.$$

Řešení:

Jmenovatel je již ve tvaru požadovaného součinu, proto rozklad musí vypadat takto
$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1},$$
z čehož obdržíme rovnici
$$1 = Ax^3 + Ax^2 + Bx^2 + Bx + Cx + C + Dx^3.$$
Tedy metodou neurčitých koeficientů dostaneme soustavu
$$\begin{aligned} x^3 &: 0 = A + D, \\ x^2 &: 0 = A + B, \\ x^1 &: 0 = B + C, \\ x^0 &: 1 = C, \end{aligned}$$
jejímž řešením je čtveřice $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ a $D = -1$. Proto hledaný rozklad je tvaru
$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

(57) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2}.$$

Řešení:

Jmenovatel upravíme do tvaru

$$x^4-2x^3+2x^2=x^2\left(x^2-2x+2\right),$$

proto parciální zlomky musí být ve tvaru

$$\frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}.$$

Úpravou dostaneme rovnici

$$x^2-2=Ax^3-2Ax^2+2Ax+Bx^2-2Bx+2B+Cx^3+Dx^2,$$

což nám metodou neurčitých koeficientů dá soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
x^3: &\qquad 0=A+C,\\
x^2: &\qquad 1=-2A+B+D,\\
x^1: &\qquad 0=2A-2B,\\
x^0: &\qquad -2=2B.
\end{aligned}$$

Řešením soustavy je čtveřice $A=-1$, $B=-1$, $C=1$ a $D=0$, proto hledaný rozklad je tvaru

$$\frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2-2x+2}.$$

(58) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x-2}.$$

Řešení:

Poněvadž jsou stupně obou polynomů (alespoň) stejné, musíme nejdříve zadaný podíl upravit tak, abychom dostali ryzí racionální lomenou funkci, tj.

$$\begin{array}{l} \left(x^3+3x^2+4\right):\left(x^3+x-2\right)=1+\dfrac{3x^2-x+6}{x^3+x-2}. \\ -\underline{\left(x^3+x-2\right)} \\ \quad 3x^2-x+6 \end{array}$$

Nyní musíme rozložit jmenovatele x^3+x-2 na součin. Má-li polynom celočíselné kořeny, musí to být dělitelé absolutního členu. Má-li polynom racionální kořen (tj. ve tvaru zlomku), je čitatel zlomku tvořen dělitelem absolutního člene polynomu a jmenovatel tohoto kořene je dělitelem koeficientu u nejvyšší mocniny polynomu. Tuto skutečnost využijeme při aplikování Hornerova schématu, kde postupujeme takto:

- Nejprve sepíšeme do tabulky koeficienty studovaného polynomu. (Přitom nesmíme zapomenout na možné nulové koeficienty.)

x^3	x^2	x^1	x^0
1	0	1	-2

- Tabulku rozšíříme o jeden sloupec, do něhož budeme psát kandidáty na kořeny.

kand.	1	0	1	-2
2				

- První (vedoucí) koeficient polynomu sepíšeme do řádku s kandidátem na kořen.

kand.	1	0	1	-2
2	1			

- Nyní nastupuje hlavní část – doplnění zbylých polí druhého řádku tabulky.

kand.	1	0	1	-2
2	1	$2\cdot 1+0=2$		

- Tím dostaneme tabulku

kand.	1	0	1	-2
2	1	2	$2\cdot 2+1=5$	$2\cdot 5$ - $2=8$

- Protože poslední číslo v druhém řádku je různé od nuly, číslo 2 není kořenem studovaného polynomu x^3+x-2. (Poznamenejme, že tato pozice obsahuje funkční hodnotu studovaného polynomu v testovaném čísle.)
- Druhý řádek tabulky vymažeme (v zápise na papír ho škrtáme a rozšíříme tabulku o volný řádek) a otestujeme v něm dalšího kandidáta na kořen.

kand.	1	0	1	-2
1	1	1	2	0

- Poslední pozice druhého řádku je nulová, což znamená, že studovaný polynom nabývá v čísle 1 hodnoty 0. Číslo 1 je tedy kořenem polynomu x^3+x-2. Ostatní čísla (tj. mimo prvního a posledního) v druhém řádku tabulky navíc udávají koeficienty polynomu vzniklého vydělením studovaného polynomu kořenovým činitelem právě nalezeného kořene.

kand.	1	0	1	-2
1	1	1	2	0
–	x^2	x^1	x^0	–

- Shrňme si předchozí postup do jediné tabulky.

–	x^3	x^2	x^1	x^0
kand.	1	0	1	-2
2	1	$2 \cdot 1 + 0 = 2$	5	8
1	1	1	2	0
–	x^2	x^1	x^0	–

Tímto postupem jsme dostali $x^3+x-2=(x-1)\left(x^2+x+2\right)$. Proto rozklad musí být

$$\frac{3x^2-x+6}{x^3+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2},$$

z čehož dostaneme rovnici

$$3x^2-x+6=Ax^2+Ax+2A+Bx^2-Bx+Cx-C,$$

neboli

$$\begin{aligned} x^2: &\qquad 3=A+B,\\ x^1: &\qquad -1=A-B+C,\\ x^0: &\qquad 6=2A-C. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je čtveřice $A=2$, $B=1$ a $C=-2$, proto hledaný rozklad je ve tvaru

$$\frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x-2}=1+\frac{2}{x-1}+\frac{x-2}{x^2+x+2}.$$

(59) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{x+1}{x^5+3x^3+2x}.$$

Řešení:

Nejdříve upravíme jmenovatele, tj. $x^5+3x^3+2x = x\left(x^4+3x^2+2\right)$. S využitím substituce $y = x^2$ dostaneme kvadratickou rovnici y^2+3y+2 s řešeními $y_1 = -1$ a $y_2 = -2$. Proto jmenovatele můžeme rozložit do tvaru $x\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)$. Hledaný rozklad tedy musí být ve tvaru

$$\frac{x+1}{x^5+3x^3+2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{x^2+1},$$

z čehož dostaneme rovnici

$$x+1 = Ax^4+3Ax^2+2A+Bx^4+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^4+2Dx^2+Ex^3+2Ex.$$

Odtud metodou neurčitých koeficientů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
x^4:\ 0 &= A+B+D,\\
x^3:\ 0 &= C+E,\\
x^2:\ 0 &= 3A+B+2D,\\
x^1:\ 1 &= C+2E,\\
x^0:\ 1 &= 2A
\end{aligned}$$

a její řešení $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -1$, $D = -1$ a $E = 1$. Tím jsme získali rozklad na parciální zlomky

$$\frac{x+1}{x^5+3x^3+2x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{x^2+2} + \frac{1-x}{x^2+1}.$$

(60) Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{x-4}{x^4+8x}.$$

Řešení:

Upravíme jmenovatele do tvaru $x^4+8x = x\left(x^3+8\right)$ a s pomocí Hornerova schématu

	1	0	0	8
-2	1	-2	4	0

zjistíme, že $x=-2$ je také kořenem a další rozklad je ve tvaru $x^4+8x = x\left(x^3+8\right) = x(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$, proto rozklad bude mít podobu
$$\frac{x-4}{x^4+8x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+4}.$$
Odtud dostaneme rovnici
$$\begin{aligned} x-4 =& Ax^3-2Ax^2+4Ax+2Ax^2-4Ax+8A+Bx^3-2Bx^2+4Bx+ \\ &+Cx^3+2Cx^2+Dx^2+2Dx. \end{aligned}$$
Metodou neurčitých koeficientů získáme soustavu
$$\begin{aligned} x^3: && 0 &= A+B+C, \\ x^2: && 0 &= -2A+2A-2B+2C+D, \\ x^1: && 1 &= 4A-4A+4B+2D, \\ x^0: && -4 &= 8A \end{aligned}$$
s řešeními $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{4}$ a $D=0$. Proto hledaný rozklad je ve tvaru
$$\frac{x-4}{x^4+8x} = -\frac{1}{2x} + \frac{\frac{1}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}x}{x^2-2x+4}.$$

(61) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 3}{x^2 - 1}.$$

Řešení:

Nejdříve získáme ryzí racionální funkci, tj.

$$\begin{array}{l}
\left(2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 3\right) : \left(x^2 - 1\right) = 2x^2 - x + 3 + \dfrac{2x+6}{x^2-1}.\\
-\left(2x^4 + 2x^2\right)\\
\hline
\quad - x^3 + 3x^2 + 3x + 3\\
\quad - \left(-x^3 + x\right)\\
\hline
\qquad 3x^2 + 2x + 3\\
\qquad - \left(3x^2 - 3\right)\\
\hline
\qquad\quad 2x + 6
\end{array}$$

Poněvadž platí $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, bude rozklad ve tvaru

$$\frac{2x+6}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1},$$

což vede k rovnici

$$2x + 6 = Ax - A + Bx + B.$$

S využitím metody neurčitých koeficientů obdržíme soustavu

$$\begin{aligned}
x^1 :&\ 2 &&= A + B,\\
x^0 :&\ 6 &&= B - A
\end{aligned}$$

s řešením $A = -2$ a $B = 4$. Řešením je tedy rozklad

$$\frac{2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 3}{x^2 - 1} = 2x^2 - x + 3 - \frac{2}{x+1} + \frac{4}{x-1}.$$

(62) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{2x-1}{2x^4+x^3+x^2}.$$

Řešení:

Úpravou jmenovatele obdržíme $2x^4+x^3+x^2 = x^2\left(2x^2+x+1\right)$, proto musí být rozklad ve tvaru

$$\frac{2x-1}{2x^4+x^3+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{2x^2+x+1},$$

což vede na rovnici

$$2x-1 = 2Ax^3 + Ax^2 + Ax + 2Bx^2 + Bx + B + Cx^3 + Dx^2.$$

Pomocí metody neurčitých koeficientů obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} x^3: &\quad 0 = 2A + C, \\ x^2: &\quad 0 = A + 2B + D, \\ x^1: &\quad 2 = A + B, \\ x^0: &\quad -1 = B \end{aligned}$$

a její řešení $A = 3$, $B = -1$, $C = -6$ a $D = -1$. Proto hledaný rozklad je ve tvaru

$$\frac{2x-1}{2x^4+x^3+x^2} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{6x+1}{2x^2+x+1}.$$

(63) Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{-5x+2}{x^4-x^3+2x^2}.$$

Řešení:

Upravíme jmenovatele do tvaru součinu, tj. $x^4 - x^3 + 2x^2 = x^2\left(x^2 - x + 2\right)$, proto bude rozklad mít podobu
$$\frac{-5x+2}{x^4-x^3+2x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+2}.$$
Odtud dostaneme rovnici
$$-5x + 2 = Ax^3 - Ax^2 + 2Ax + Bx^2 - Bx + 2B + Cx^3 + Dx^2,$$
což nás metodou neurčitých koeficientů přivede k soustavě
$$\begin{aligned} x^3 :& \qquad 0 = A + C,\\ x^2 :& \qquad 0 = -A + B + D,\\ x^1 :& \qquad -5 = 2A - B,\\ x^0 :& \qquad 2 = 2B \end{aligned}$$
s řešením $A = -2$, $B = 1$, $C = 2$ a $D = -3$. Proto hledaný rozklad je ve tvaru
$$\frac{-5x+2}{x^4-x^3+2x^2} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2x-3}{x^2-x+2}.$$

(64) Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{2x^2+4x+9}{x^3+3x^2+3x+2}.$$

Řešení:

S pomocí Hornerova schématu dostaneme

	1	3	3	2
-2	1	1	1	0

proto platí $x^3+3x^2+3x+2=(x+2)\left(x^2+x+1\right)$. Tedy rozklad bude ve tvaru
$$\frac{2x^2+4x+9}{x^3+3x^2+3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$
což vede k rovnici
$$2x^2+4x+9=Ax^2+Ax+A+Bx^2+2Bx+Cx+2C.$$
Metodou neurčitých koeficientů dostaneme soustavu
$$x^2:\ 2=A+B,\quad x^1:\ 4=A+2B+C,\quad x^0:\ 9=A+2C$$
s řešením $A=3$, $B=-1$ a $C=3$. Hledaný rozklad je tedy tvaru
$$\frac{2x^2+4x+9}{x^3+3x^2+3x+2}=\frac{3}{x+2}+\frac{-x+3}{x^2+x+1}.$$

(65) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{9x^3 - 4x + 1}{x^4 - x^2}.$$

Řešení:

Upravíme jmenovatele do tvaru $x^4 - x^2 = x^2\left(x^2 - 1\right) = x^2(x-1)(x+1)$, proto rozklad bude ve tvaru

$$\frac{9x^3 - 4x + 1}{x^4 - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}.$$

Odtud dostaneme rovnici ve tvaru

$$9x^3 - 4x + 1 = Ax^3 - Ax + Bx^2 - B + Cx^3 + Dx^3 + Dx^2.$$

Metodou neurčitých koeficientů dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^3: &\quad 9 = A + C + D,\\ x^2: &\quad 0 = B - C + D,\\ x^1: &\quad -4 = -A,\\ x^0: &\quad 1 = -B \end{aligned}$$

s řešením $A = 4$, $B = -1$, $C = 2$ a $D = 3$. Proto hledaný rozklad je ve tvaru

$$\frac{9x^3 - 4x + 1}{x^4 - x^2} = \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1}.$$

(66) Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{x^2-x+10}{(x^2-3x+10)^2}.$$

Řešení:

Jmenovatele již nelze nijak rozložit, proto rozklad musí být v tomto tvaru
$$\frac{x^2-x+10}{(x^2-3x+10)^2}=\frac{Ax+B}{x^2-3x+10}+\frac{Cx+D}{(x^2-3x+10)^2},$$
což vede na rovnici
$$x^2-x+10=Ax^3+3Ax^2+10Ax+Bx^2-3Bx+10B+Cx+D.$$
Metodou neurčitých koeficientů dostaneme soustavu rovnic
$$\begin{aligned} x^3: &\qquad 0=A,\\ x^2: &\qquad 1=3A+B,\\ x^1: &\qquad -1=10A-3B+C,\\ x^0: &\qquad 10=10B+D \end{aligned}$$
s řešením $A=0$, $B=1$, $C=2$ a $D=0$. Proto hledaný rozklad je tvaru
$$\frac{x^2-x+10}{(x^2-3x+10)^2}=\frac{1}{x^2-3x+10}+\frac{2x}{(x^2-3x+10)^2}.$$

(67) Rozložte na parciální zlomky
$$\frac{1}{x^6+2x^4+x^2}.$$

Řešení:

Nejdříve upravíme jmenovatele do tvaru
$$x^6+2x^4+x^2=x^2\left(x^4+2x^2+1\right)=x^2\left(x^2+1\right)^2$$
. Proto bude rozklad ve tvaru
$$\frac{1}{x^6+2x^4+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2},$$
z čehož obdržíme rovnici

$1=Ax^5+2Ax^3+Ax+Bx^4+2Bx^2+B+Cx^5+Cx^3+Dx^4+Dx^2+Ex^3+Fx^2.$

Metodou neurčitých koeficientů dostaneme soustavu
$$\begin{aligned}
x^5:\ 0 &= A+C,\\
x^4:\ 0 &= B+D,\\
x^3:\ 0 &= 2A+C+E,\\
x^2:\ 0 &= 2B+D+F,\\
x^1:\ 0 &= A,\\
x^0:\ 1 &= B
\end{aligned}$$
a řešení $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=-1$, $E=0$ a $F=-1$. Tedy hledaný rozklad je ve tvaru
$$\frac{1}{x^6+2x^4+x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

(68) Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{5x^7+12x^6+24x^5+19x^4+8x^3+4x^2+3x+1}{x^8+3x^7+5x^6+5x^5+3x^4+x^3}.$$

Řešení:

Pomocí vytýkání upravíme jmenovatele do tvaru

$$x^8+3x^7+5x^6+5x^5+3x^4+x^3=x^3\left(x^5+3x^4+5x^3+5x^2+3x+1\right).$$

S využitím Hornerova schématu

	1	3	5	5	3	1
-1	1	2	3	2	1	0

můžeme psát

$$x^8+3x^7+5x^6+5x^5+3x^4+x^3=x^3\left(x^5+3x^4+5x^3+5x^2+3x+1\right)=x^3\left(x+1\right)\left(x^4+2x^3+3x^2+2x+1\right)$$

Proto rozklad bude ve tvaru

$$\frac{5x^7+12x^6+24x^5+19x^4+8x^3+4x^2+3x+1}{x^8+3x^7+5x^6+5x^5+3x^4+x^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+1}+ \\ +\frac{Ex+F}{x^2+x+1}+\frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^2},$$

což vede na rovnici

$$\begin{aligned} &5x^7+12x^6+24x^5+19x^4+8x^3+4x^2+3x+1= \\ &\quad=Ax^7+3Ax^6+5Ax^5+5Ax^4+3Ax^3+Ax^2+Bx^6+3Bx^5+5Bx^4+ \\ &\qquad+5Bx^3+3Bx^2+Bx+Cx^5+3Cx^4+5Cx^3+5Cx^2+3Cx+C+ \\ &\qquad+Dx^7+2Dx^6+3Dx^5+2Dx^4+Dx^3+Ex^7+2Ex^6+2Ex^5+Ex^4+ \\ &\qquad+Fx^6+2Fx^5+2Fx^4+Fx^3+Gx^5+Gx^4+Hx^4+Hx^3. \end{aligned}$$

Pomocí metody neurčitých koeficientů dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x^7:&\quad 5=A+D+E, \\ x^6:&\quad 12=3A+B+2D+2E+F, \\ x^5:&\quad 24=5A+3B+C+3D+2E+2F+G, \\ x^4:&\quad 19=5A+5B+3C+2D+E+2F+G+H, \\ x^3:&\quad 8=3A+5B+5C+D+F+H, \\ x^2:&\quad 4=A+3B+5C, \\ x^1:&\quad 3=B+3C, \\ x^0:&\quad 1=C \end{aligned}$$

s řešením $A = -1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 4$, $E = 2$, $F = 3$, $G = 6$ a $H = -1$. Proto hledaný rozklad je ve tvaru

$$\frac{5x^7 + 12x^6 + 24x^5 + 19x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x^8 + 3x^7 + 5x^6 + 5x^5 + 3x^4 + x^3} =$$
$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x+1} + \frac{2x+3}{x^2+x+1} + \frac{6x-1}{(x^2+x+1)^2}.$$