II. Integrální počet funkcí jedné proměnné

II. 1. Základní integrační metody

Definice 28. Nechť funkce f je definována na intervalu I. Funkce F se nazývá *primitivní* k funkci f na I, jestliže platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$.

Množina všech primitivních funkcí k funkci f na I se nazývá *neurčitý integrál* z funkce f a značí se $\int f(x)\,dx$, tj.

$$\int f(x)\,dx := \{F: \ F \text{ je primitivní funkce k } f \text{ na } I\}.$$

Základní vzorce pro integrování ($k \in \mathbb{R}$):

$$\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$$

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx.$$

Integrování elementárních funkcí ($a, b, k, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \neq 0$ jsou dané konstanty a C je integrační konstanta):

$$\int k\,dx = kx + C, \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \Rightarrow \qquad \int f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C.$$

Věta 29 (Integrování per-partes). *Nechť funkce u a v mají derivaci na intervalu I. Pak platí*

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx,$$

pokud alespoň jeden z uvedených integrálů existuje.

	$u(x)$	$v'(x)$
$P(x) \cdot e^{kx}$	$P(x)$	e^{kx}
$P(x) \cdot a^{kx}$	$P(x)$	a^{kx}
$P(x) \cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x) \cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	$u(x)$	$v'(x)$
$P(x) \cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \log_b^n x$	$\log_b^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arcsin(kx)$	$\arcsin(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arccos(kx)$	$\arccos(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \mathrm{arctg}(kx)$	$\mathrm{arctg}(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \mathrm{arccotg}(kx)$	$\mathrm{arccotg}(kx)$	$P(x)$

TABULKA 1. Jak volit funkce při integrování per-partes ($P(x)$ je polynom, $k \in \mathbb{R}$).

Věta 30 (Substituční metoda). *Nechť funkce* f *má na otevřeném intervalu* J *primitivní funkci* F, *funkce* $\varphi(x)$ *má derivaci na otevřeném intervalu* I *a pro libovolné* $x \in I$ *je* $\varphi(x) \in J$. *Pak má složená funkce* $f(\varphi)\,\varphi'$ *na intervalu* I *primitivní funkci a platí*

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx \left| \begin{array}{c} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x)\,dx = du \end{array} \right| = \int f(u)\,du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C.$$

(314) Vypočtěte

$$\int x \, dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

(315) Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

(316) Vypočtěte

$$\int \sqrt{x}\,dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

(317) Vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int x^{-1/3}\, dx = \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$$

(318) Vypočtěte

$$\int e^{-x}\,dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C.$$

(319) Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,dx.$$

Řešení:

S pomocí úpravy můžeme využít jeden ze základních vzorců, tj.

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{x^2}{3}+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

(320) Vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$

Řešení:

S pomocí úpravy můžeme využít jeden ze základních vzorců, tj.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{2} + C.$$

(321) Vypočtěte

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+2}\,dx.$$

Řešení:

S využitím základních vzorců obdržíme přímo

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+2}\,dx = \ln\left|x^3+x+2\right| + C.$$

(322) Vypočtěte

$$\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 3\sin 5x + 2\cos\frac{x}{2} + 3^x - \frac{7}{2^x} + \frac{4}{3-x} - \frac{2}{3x+2} + 2\,e^{\frac{2x}{3}} \right) dx.$$

Řešení:

Aplikací základních vzorců získáme

$$\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 3\sin 5x + 2\cos\frac{x}{2} + 3^x - \frac{7}{2^x} + \frac{4}{3-x} - \frac{2}{3x+2} + 2\,e^{\frac{2x}{3}} \right) dx =$$

$$= 2\,\mathrm{tg}\,x + \frac{3}{5}\cos 5x + 4\sin\frac{x}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{7}{2^x \ln 2} - 4\ln|3-x| - \frac{2}{3}\ln|3x+2| + 3\,e^{\frac{2x}{3}} + C.$$

(323) Vypočtěte

$$\int \operatorname{tg}^2(au)\,du, \quad a \neq 0.$$

Řešení:

Postupným upravováním obdržíme

$$\int \operatorname{tg}^2(au)\,du = \int \frac{\sin^2(au)}{\cos^2(au)}\,du = \int \frac{1-\cos^2(au)}{\cos^2(au)}\,du = \int \frac{1}{\cos^2(au)}\,du - \int 1\,du =$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{tg}(au) - u + C.$$

(324) Vypočtěte

$$\int \operatorname{tg}(bs)\, ds, \quad b \neq 0.$$

Řešení:

Ze základních vzorců získáme

$$\int \operatorname{tg}(bs)\, ds = \int \frac{\sin(bs)}{\cos(bs)}\, ds = -\frac{1}{b} \ln|\cos(bs)| + C.$$

(325) Vypočtěte

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Řešení:

S využitím metody per-partes dostaneme

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v = \operatorname{tg} x & v' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right| = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx =$$

$$= x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

(326) Vypočtěte

$$\int x \ln x \, dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes získáme

$$\int x \ln x \, dx \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} & v' = x \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

(327) Vypočtěte
$$\int (2x-1)\ln x \,dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes získáme
$$\int (2x-1)\ln x\,dx \left| \begin{array}{ll} u=\ln x & u'=\frac{1}{x} \\ v=x^2-x & v'=2x-1 \end{array} \right| =$$
$$= (x^2-x)\ln x - \int \frac{1}{x}(x^2-x)\,dx = (x^2-x)\ln x - \int (x-1)\,dx =$$
$$= (x^2-x)\ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$$

(328) Vypočtěte

$$\int (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

S opakovaným využitím metody per-partes dostaneme

$$\int (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \left| \begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v = -\mathrm{e}^{-x} & v' = \mathrm{e}^{-x} \end{array} \right| =$$

$$= -(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x} + \int 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \left| \begin{array}{ll} u = 2x & u' = x \\ v' = -\mathrm{e}^{-x} & v = \mathrm{e}^{-x} \end{array} \right| =$$

$$= -(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x} + \int 2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x} + -2\,\mathrm{e}^{-x} + C = -\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x+3) + C.$$

(329) Vypočtěte

$$\int x^2 \operatorname{e}^{-3x} \, dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes získáme

$$\int x^2 \operatorname{e}^{-3x} \, dx \left| \begin{array}{cc} u = x^2 & u' = 2x \\ v = -\frac{1}{3} \operatorname{e}^{-3x} & v' = \operatorname{e}^{-3x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 \operatorname{e}^{-3x} + \frac{2}{3} \int x \operatorname{e}^{-3x} \, dx \left| \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v = -\frac{1}{3} \operatorname{e}^{-3x} & v' = \operatorname{e}^{-3x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 \operatorname{e}^{-3x} - \frac{2}{9}x \operatorname{e}^{-3x} + \frac{2}{9} \int \operatorname{e}^{-3x} \, dx = -\frac{1}{3} \operatorname{e}^{-3x} \left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \right) + C.$$

(330) Vypočtěte
$$\int e^x \sin x \, dx.$$

Řešení:

Po dvojnásobném použití metody per-partes dostaneme
$$\int e^x \sin x \, dx \left| \begin{array}{cc} u = e^x & u' = e^x \\ v = -\cos x & v' = \sin x \end{array} \right| =$$
$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \left| \begin{array}{cc} u = e^x & u' = e^x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{array} \right| =$$
$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx,$$
což znamená, že jsme ve výsledku obdrželi stejný integrál jako v zadání pouze s opačným znaménkem, tj.
$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

(331) Vypočtěte

$$\int \cos^2 x \, dx.$$

Řešení:

S využitím metody per-partes obdržíme

$$\int \cos^2 x \, dx \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{array} \right| =$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) \, dx =$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) \, dx = \cos x \cdot \sin x + x - \int \cos^2 x \, dx.$$

Odtud plyne

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\sin x \cdot \cos x + x) + C.$$

(332) Vypočtěte

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes obdržíme

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + 1 \right| + C.$$

(333) Vypočtěte
$$\int \ln x \, dx.$$

Řešení:

Metodou per-partes obdržíme
$$\int \ln x \, dx \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

(334) Vypočtěte
$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Řešení:

Tento příklad je možné řešit jak substitucí, tak i per-partes.
Per-partes:
$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx \left| \begin{array}{ll} u' = \frac{1}{x} & u = \ln x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| =$$
$$= \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - I$$
$$\Rightarrow \quad I = \ln^2 x - I \quad \Rightarrow \quad 2I = \ln^2 x \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$
Substitucí:
$$\int \frac{\ln x}{x} dx \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

(335) Vypočtěte

$$\int (4-7x)^{10}\,dx.$$

Řešení:

Substituční metodou obdržíme

$$\int (4-7x)^{10}\,dx \;\left|\begin{array}{c} t = 4-7x \\ dt = -7\,dx \end{array}\right| = -\frac{1}{7}\int t^{10}\,dt = -\frac{1}{7}\frac{t^{11}}{11} + C = -\frac{1}{77}(4-7x)^{11} + C.$$

(336) Vypočtěte

$$\int \sqrt{2x-5}\,dx.$$

Řešení:

Použitím substituční metody získáme

$$\int \sqrt{2x-5}\,dx \;\left|\begin{array}{c} t=2x-5 \\ dt=2\,dx \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-5)^3} + C.$$

(337) Vypočtěte

$$\int \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}\,dx.$$

Řešení:

Substituční metodou obdržíme

$$\int \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}\,dx \left| \begin{array}{l} t = 2+\sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{2+\sin x} + C.$$

(338) Vypočtěte

$$\int \frac{(1+\ln x)^4}{x}\,dx.$$

Řešení:

Substituční metodou dostaneme

$$\int \frac{(1+\ln x)^4}{x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}\,dx \end{array} \right| = \int (1+t)^4\,dt = \frac{(1+t)^5}{5}+C = \frac{(1+\ln x)^5}{5}+C.$$

(339) Vypočtěte

$$\int \sin x \cdot \cos^5 x \, dx.$$

Řešení:

Substituční metodou obdržíme

$$\int \sin x \cdot \cos^5 x \, dx \left| \begin{array}{c} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{array} \right| = -\int u^5 \, du = -\frac{u^6}{6} + C = -\frac{\cos^6 x}{6} + C.$$

(340) Vypočtěte

$$\int x\, e^{-x^2}\, dx.$$

Řešení:

Substituční metodou získáme

$$\int x\, e^{-x^2}\, dx \left| \begin{array}{c} t = -x^2 \\ dt = -2x\, dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t\, dt = -\frac{1}{2}\, e^t + C = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2} + C.$$

(341) Vypočtěte

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx.$$

Řešení:

S pomocí substituční metody získáme

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos\,dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \left| \begin{array}{c} u=t+\sqrt{1+t^2} \\ du=\left(1+\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}\right)dt=\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}dt \\ \frac{du}{t+\sqrt{1+t^2}}=\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C = \ln\left|\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right| + C.$$

(342) Vypočtěte
$$\int x^3\, e^{-x^2}\, dx.$$

Řešení:

Kombinace substituce a metody per-partes dává
$$\int x^3\, e^{-x^2}\, dx \left| \begin{array}{c} t = -x^2 \\ dt = -2x\, dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int (-t)\, e^t\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int t\, e^t\, dt \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v = e^t & v' = e^t \end{array} \right| = \frac{1}{2} t\, e^t - \frac{1}{2}\int e^t\, dt =$$
$$= \frac{1}{2} t\, e^t - \frac{1}{2}\, e^t + C = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2}(x^2+1) + C.$$

(343) Vypočtěte

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$$

Řešení:

Kombinace substituce a metody per-partes dává

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx \left|\begin{array}{c} t=\sqrt{x} \\ t^2=x \\ 2t\,dt=dx \end{array}\right| = 2\int t\,e^t\,dt \left|\begin{array}{ll} u=t & u'=1 \\ v=e^t & v'=e^t \end{array}\right| =$$

$$= 2t\,e^t - 2\int e^t\,dt = 2t\,e^t - 2\,e^t + C = 2\,e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$$

(344) Vypočtěte
$$\int x \arcsin x^2 \,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Kombinace substituce a metody per-partes dává

$$\int x \arcsin x^2 \,\mathrm{d}x \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x \,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \arcsin t \,\mathrm{d}t \left| \begin{array}{cc} u = \arcsin t & u' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ v = t & v' = 1 \end{array} \right| =$$
$$= \frac{1}{2} t \arcsin t - \frac{1}{2} \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t \left| \begin{array}{c} w = 1 - t^2 \\ \mathrm{d}w = -2t \,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2} t \arcsin t + \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{w}} =$$
$$= \frac{1}{2} t \arcsin t + \frac{1}{4} \frac{w^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^4} + C.$$

(345) Vypočtěte pomocí per-partes i substituční metodou

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Řešení:

Tento příklad lze řešit dvěma způsoby. Metodou per-partes obdržíme

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \left| \begin{array}{ll} u=\sqrt{1-x^2} & u'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ v=x & v'=1 \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\,dx,$$

tj.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) + C.$$

Vhodnou substitucí dostaneme tentýž výsledek, tj.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \left| \begin{array}{c} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt =$$

$$= \int \cos^2\,dt \overset{\text{Př. (331)}}{=} \frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + \frac{\arcsin x}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

(346) Vypočtěte

$$\int \max\{1, x^2\}\,dx.$$

Řešení:

Pro $|x| \le 1$ platí

$$\int \max\{1, x^2\}\,dx = \int 1\,dx = x + C.$$

Je-li $|x| > 1$, platí

$$\int \max\{1, x^2\}\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Protože výsledná funkce musí být spojitá, platí

$$\int \max\{1, x^2\}\,dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C & \text{pro } x < -1, \\ x + C & \text{pro } |x| \le 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$