4.7 Samuelson-Hicksův růstový model (akcelerátoru a multiplikátoru)

Nejúplnější formulací vzájemného působení multiplikátoru - akcelerátoru při nespojitém (diskrétním) postupu je model, který formuloval nejdříve **Paul Samuelson (1939a,b)** a později rozvinul **J.R.Hicks (1950)**. Jeho hlavní předpoklad je, že se uskutečňují plány spotřeby. Dále je zavedena podmínka, že při fungování modelu se uskuteční plány investic, takže investice *ex ante* se rovnají společné hodnotě úspor a investic *ex post*. Vztah *ex ante* pro investice je akcelerátor se zpožděním. Tato formulace se odlišuje od Harrodovy ve dvou směrech; uskutečňují se plány spotřeby (nikoli úspor) a zpoždění se stávají podstatným rysem ve vztazích *ex ante* pro spotřebu a investice.

Obecně vzato vychází model ze spotřební funkce v lineárním tvaru s rozloženým zpožděním:

(4.51) $$C_t = \gamma + c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2} + c_3 Y_{t-3} + \ldots$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots = c \quad , \text{ přičemž } \quad 0 < c < 1, \quad 0 < c_1, c_2, c_3, \ldots < 1$$

O vztahu pro akcelerátor obdobně předpokládáme, že je rovněž lineární s rozloženým zpožděním:

(4.52) $$I_t = v_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + v_2 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \ldots \quad , \text{k de}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots = v \ , \qquad 0 < v < 1 \quad , \qquad 0 < v_1, v_2, \ldots < 1$$

Plány *ex ante*, představované vztahy **(4.51)** a **(4.52)**, zahrnují nejrůznější možnosti. Úroveň důchodu v běžném roce vyvolává rozhodnutí spotřebitelů spotřebovat jej a odpovídající výdaje jsou rozloženy do několika následujících období, nebo jsou vyrovnány s výdaji příštích let, např. ve formě koupí na splátky. Ještě důležitější je, že běžná změna důchodu vyvolává rozhodnutí investovat a potřebné výdaje jsou plánovány na příští období. Vztahy **(4.51)** a **(4.52)** se týkají spotřebních a investičních nákladů a (výdajů). Mohou záviset na předchozích rozhodnutích o spotřebě a investicích: skutečné dodávky spotřebního zboží a kapitálových statků mohou následovat po skutečném zaplacení, mohou být současné s placením nebo je mohou předcházet. Vše, co zde potřebujeme, je časové rozložení všech výdajů. Skutečné rozložení zpoždění, jak bylo uvedeno, může mít různé formy, např. může být „nakupeno“ nebo rozptýleno“ tím se budeme zabývat později

Takto pojatý **diskrétní model Samuelsonův-Hicksův** lze srovnávat s odpovídajícím modelem ve spojitém vyjádření Oba modely plně užívají, resp. mohou užívat zpoždění.

A.W.Phillips užívá spojitě rozložených zpoždění spotřebitelské poptávky i poptávky po investicích: Případ, kdy neexistuje zpoždění ve spotřebě, byl rozebrán jen pro zjednodušení matematického výkladu.

Model Samuelsonův-Hicksův zavádí rozložení zpoždění u plánované spotřeby i u plánovaných investičních výdajů: to odpovídá Phillipsovu typu zpoždění, klesají-li koeficienty geometrickou řadou, jinak jsou však v Samuelsonově-Hicksově modelu zpoždění ještě obecnějšího charakteru.

Rozdíl mezi Phillipsovým a Samuelsonovým-Hicksovým modelem spočívá v podmínkách, za nichž oba tyto modely **fungují.**

Phillips chápe poptávku a nabídku odděleně: spotřeba v závislosti na zpoždění a investiční plány rovněž se zpožděními představují dohromady celkovou poptávku, nabídka se pak přizpůsobuje poptávce s dalším zpožděním. Důraz je kladen na nezamýšlené investice vyvolané zpoždění nabídky; spotřeba a právě tak i úspory se mohou uskutečnit.

V **Samuelsonově-Hicksově** modelu se rovněž sčítá plánovaná spotřeba a plánované investice, předpokládá se však, že se obojí realizuje. Proto spotřeba a investiční plány, obojí v závislosti na zpoždění *ex ante*, se stávají výdaji *ex post* a tvoří dohromady celkovou produkci. Neexistují zde nezamýšlené investice (ani spotřeba): důraz se klade na nezamýšlené úspory. Toto vše je zčásti problém vhodnosti různých předpokladů při postupu spojitém nebo nespojitém, zčásti pak problém ekonomické interpretace.

V Phillipsově konstruktu následuje po zpoždění v působení akcelerátoru (který určuje poptávku po investicích) další zpoždění, a to v přizpůsobení nabídky kapitálových statků.

V Samuelsonově-Hicksově modelu je celý komplex zpoždění na straně investic vtělen do jednoduchého vztahu pro akcelerátor (2); je proto velmi důležitá pružnost ve formulaci i interpretaci tohoto vztahu.

Nejdříve se budeme zabývat nejjednodušším **Samuelsonovým-Hicksovým případem**, tj. tím případem, kdy jsou všechny investiční výdaje soustředěny neboli „nakupeny“ do období následujícího bezprostředně po období, v němž začala změnu produkce. Je možno zvolit období dosti dlouhé, aby do sebe pojalo všechny počáteční účinky na oběžný kapitál, ne však tak dlouhé, aby již zahrnovalo výdaje na nový fixní kapitál. Investice vyvolané změnami produkce bereme jako očištěné o obnovu. Abstrahujeme od účinků „ozvěny“, tj. od té skutečnosti, že fixní kapitál, který byl původně uveden do provozu ve větším měřítku v jednom období, je třeba obnovit po uplynutí určité doby takřka současně.

Z akcelerátoru v **(4.52)** vezmeme jen první člen. Ten však se vztahuje na dvě minulá období, Y_{t-1}, Y_{t-1}, a Y_{t-2}. Dosáhli bychom proto jen nepatrného zjednodušení, kdybychom použili multiplikátoru Kahnova typu a jen jednoho členu, tj. obsahujícího Y_{t-1} ve spotřební funkci **(4.51)**. Použijeme proto dvou členů, tj. členů obsahujících Y_{t-1}, a Y_{t-2}, takže ve spotřebě je rozložené zpoždění. Jako zvláštní případ můžeme c_2 položit rovno nule, čímž obdržíme multiplikátor Kahnova typu a „elementární případ“ Hicksův (1950).

Podmínka identity modelu je:

(4.53)
$$Y_t = C_t + I_t + A_t$$

kde $C_t = \gamma + c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2}$ je spotřeba, $I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2})$ jsou vyvolané investice a A_t jsou autonomní investice, přičemž chápeme všechny tyto veličiny jako realizované *ex post*. Tato podmínka je ekvivalentní rovnosti investic *ex ante* úsporám a investicím *ex post*. Nic se neříká o úsporách *ex ante*, jež nemusí být a obecně nejsou rovny úsporám a investicím *ex post*; může dojít k nezamýšleným úsporám.

Všechny tři uvažované podmínky se redukují na diferenční rovnici druhého řádu pro Y_t:

(4.54a)
$$Y_t = \gamma + c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2} + v.(Y_{t-1} + Y_{t-2}) + A_t$$

(4.54b)
$$Y_t = (v + c_1).Y_{t-1} - (v - c_2).Y_{t-2} + A_t + \gamma$$

Členy γ zahrneme do A_t a takto upravenou hodnotu $\widetilde{A}_t$ nazveme autonomními vydáními. Položme $c = c_1 + c_2$ (c je celkový mezní sklon ke spotřebě); dále budeme užívat veličiny c, c_2 s vědomím, že $c_1 = c - c_2$

Potom dostaneme:

(4.54c)
$$Y_t = (v + c - c_2).Y_{t-1} - (v - c_2).Y_{t-2} + \widetilde{A}_t$$ **, tj.**

(4.54d) $$Y_t = c.Y_{t-1} + (v - c_2).(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \widetilde{A}_t$$

****

Tuto rovnici je třeba vyřešit, abychom dostali průběh veličiny Y_t, je-li dán časový průběh veličiny A_t. Je-li $A_t = A$ (tj. konstantní), pak jedno řešení rovnice (4.54d) je $Y_t = \overline{Y}$ (konstanta), přičemž $\overline{Y} = A/(1 - c)$, což zjistíme dosazením, do rovnice (4.54d). Úroveň známá z modelu statického multiplikátoru vyhovuje i probíranému modelu. Položíme-li $y_t = Y_t - \overline{Y}$, nabude rovnice (3) tvaru:

(4.55) $$y_t = c\, y_{t-1} + (v - c_2)(y_{t-1} - y_{t-2})$$

Obecné řešení rovnice (4.55) provedeme později. Obvyklý průběh veličiny Y_t vyjadřuje explozívní oscilaci kolem hodnoty $\overline{Y} = A/(1 - c)$. Hicksův elementární případ je popsán nejjednoduššími vztahy:

(4.56) $$C_t = c\, Y_{t-1} \quad a \quad I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

Diferenční rovnici dostaneme z rovnice (4.55), položíme-li $c_2 = 0$:

(4.57) $$y_t = c_{t-1} + v(y_{t-1} - y_{t-2})$$

kde *c* je mezní sklon ke spotřebě a v je síla akcelerátoru. Účinek rozloženého zpoždění spotřeby, který je vyjádřen konstantou c_2 spočívá prostě v redukci síly akcelerátoru z úrovně v (4.57) na $(v - c_2)$ v rovnici (4.54c). Účinek rozloženého zpoždění investic můžeme sledovat, budeme-li ve vztahu (4.52) předpokládat, že se v_2 nerovná nule. Zvláště zajímavý případ, který nebyl studován Hicksem, vznikne při *geometricky rozloženém zpoždění investic*. V tomto případě, jsou-li $Z_t = v(Y_t - Y_{t-1})$ nezpožděné investice, platí:

(4.58) $$I_t = \lambda\{Z_{t-1} + (1 - \lambda)Z_{t-2} + (1 - \lambda)^2 Z_{t-3} + \dots\}$$

kde λ je rychlost reakce $(0 < \lambda < 1)$. Přitom platí:

(4.58a) I_t = Chyba!ZChyba! = Chyba!(vΔYChyba!)

Dosadíme-li tyto výrazy a $C_t = c\, Y_{t-1}$ do rovnice $Y_t = C_t + I_t + A$ (A je konstanta), obdržíme:

(4.59) $Y_t = c\, Y_{t-1}$ + Chyba!(vΔYChyba!) + A

tj. $\Delta Y_t + \lambda Y_t = c\Delta Y_{t-1} + c\lambda Y_{t-1} + \lambda v\Delta Y_{t-1} + \lambda A$ (protože $\Delta A = 0$). Dosadíme-li $\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t$ a $\Delta Y_{t-1} = Y_t - Y_{t-1}$ a sloučíme-li odpovídající členy, obdržíme rovnici:

(4.60) $$Y_t = (1 + c - \lambda + \lambda v)\, Y_t - (c - \lambda c + \lambda v)\, Y_{t-1} + \lambda A$$

Jedním řešením je opět statická úroveň $Y_t = \overline{Y} = A/(1 - c)$. Položme $y_t = Y_t - \overline{Y}$ a pro zjednodušení proveďme posun zpět z období (t + 1) do období t; obdržíme:

(4.61) $$y_t = (1 + c - \lambda + \lambda v)\, y_{t-1} - (c - \lambda c + \lambda v)\, y_{t-2}$$

tj.

(4.61a) $$y_t = c'\, y_{t-1} + v'\, y_{t-2}$$

kde

$$c' = (1 - \lambda) + \lambda c \quad a \quad v' = (1 - \lambda)c + \lambda v$$

Všimněte si, že c'je vážený průměr čísel 1 a c s váhami $(1 - \lambda)$ a λ, přičemž $0 < \lambda < 1$;v' obdobný vážený průměr čísel c a v. Jeli $c < v$, což je obvyklý případ, platí $c < c' < 1$ a $c < v' < v$. Srovnání rovnice (4.61) s rovnicí (4.55) ukazuje, že účinek rozloženého (geometrického) zpoždění u investic opět spočívá ve zmenšení síly akcelerátoru.

Akcelerátor jednoduchého Hicksova modelu, popsaného diferenční rovnici (4) nebo (5), je I_t = v (Y_{t-1} - Y_{t-2}). Interpretace zde podaná pochází v podstatě od Hickse (1950): změna v celkové produkci v období (t - 1) vede k investicím, jež jsou plánovány a realizovány v období t následkem zpoždění, které model obsahuje. Samuelson (1939a) podal poněkud odlišnou interpretaci, podle níž jsou vyvolané investice závislé pouze na změnách v produkci spotřebního zboží (viz cvičení 1). Smithies (1942) dostává tutéž diferenční rovnici ještě jiným způsobem, totiž tím, že vyloučí proměnnou úrokovou míru ve své teorii zápůjčního fondu .

Možnost dynamické rovnováhy v Samuelsonově-Hicksově modelu

Za určitých okolností je možný růst důchodu a produkce geometrickou řadou podle vzorce $Y_t = \overline{Y}_0(1 + \rho)^t$, kde ρ je míra růstu. Dochází k tomu v modelu multiplikátoru, jestliže autonomní výdaje rostou geometrickou řadou při míře ρ; účinek spočívá prostě ve „vynásobení" autonomních výdajů. Dochází k tomu i v modelu multiplikátoru-akcelerátoru, dokonce i tehdy, jsou-li autonomní výdaje konstantní; míra růstu ρ je pak rovna Harrodově zaručené míře růstu **Chyba!**. Tento příklad nám objasňuje explozívní účinek akcelerátoru. V obou případech je průběh důchodu Y_t rovnovážný a nepřestavuje plně dynamické řešení dynamického modelu, tj. jakmile se důchod Y_t, začne pohybovat podél dané trajektorie, udrží se na ní působením vnitřních sil modelu.

Stejnou možnost progresivního růstu důchodu obsahuje i model Samuelsonův-Hicksův. Jde opět o zvláštní řešení spíše rovnovážné než dynamické povahy, jež ukazuje sílu akcelerátoru. V diferenční rovnici tohoto modelu, tj. v rovnici (4), jsou-li autonomní výdaje A konstantní, tedy v rovnici

(4.62) $$\mathbf{y_t = c\, y_{t-1} + (v - c_2)(y_{t-1} - y_{t-2})}$$

se pokusme nalézt partikulární řešení tvaru $y_t = \overline{y}_0(1 + r)^t$. V takovém případě musí být vztah

(4.63) $$\mathbf{\overline{y}_0(1 + r)^t = c\,\overline{y}_0(1 + r)^{t-1} + (v - c_2)\{\overline{y}_0(1 + r)^{t-1} - \overline{y}_0(1 + r)^{t-2}\}}$$

splněn pro všechna t. Vyhovuje zde jakákoli hodnota $\overline{y}_0$ za předpokladu, že r splňuje vztah

(4.64) $$\mathbf{(1 + r)^2 = c(1 + r) + (v - c_2)(1 + r - 1)}$$

který získáme z předchozího vztahu, dělíme-li jeho obě strany výrazem $\overline{y}_0(1 + r)^{t-2}$. Tedy pro každou hodnotu r = ρ jež je přípustným (reálným a kladným) kořenem kvadratické rovnice:

(4.65) $$\mathbf{R = r^2 - (v - c_2 - s - 1)r + s = 0 \qquad (s = 1 - c)}$$

je možný progresivní růst důchodu podle vzorce $\mathbf{y_t = \overline{y}_0(1 + \rho)^t}$ při míře ρ **.** Kořeny kvadratické rovnice R = 0 je možno zkoumat pomocí grafického znázornění. Protože konstantní člen s v R je kladný, protíná křivka osu 0R nad počátkem 0. Proto buď není žádný kořen reálný (křivka R_1, nebo jsou oba kořeny reálné a záporné (křivka R_2), nebo oba kořeny reálné a kladné (křivka R_3). Pro nás má význam pouze poslední případ; vyplývají z něho dvě možné míry růstu, ρ_1, ρ_2 Řešení kvadratické rovnice můžeme snadno vyjádřit algebraicky. Kořeny rovnice R = 0 jsou reálné, jestliže platí:

(4.66) $$\mathbf{(v - c_2 - s - 1)^2 > 4s}$$

a jsou kladné, když:

(4.67) $$\mathbf{(v - c_2 - s - 1) > 2\sqrt{;s} \qquad \text{tj. jestliže} \qquad v - c_2 > (1 + \sqrt{;s})^2}$$

Je tudíž progresivní růst produkce možný při vhodné míře růstu ρ a za předpokladu, že akcelerátor je dostatečně silný; je k tomu zapotřební pouze, aby $v > c_2 + (1 + \sqrt{;s})^2$. Dostaneme pak dvě možné hodnoty pro míru růstu ρ. Kořeny rovnice R = 0 jsou:

(4.68) $$\rho_1, \rho_2 = \text{Chyba!}\{(v - c_{\text{Chyba!}} - s - 1) \pm \text{Chyba!}\}$$

Obě tyto hodnoty dávají možnou míru růstu, jež závisí pouze na strukturních konstantách systému. Jedna z nich je obecně velmi malá (kořen, který obdržíme, vezmeme-li ve vzorci u odmocniny znaménko záporné); to je právě ta hodnota, kterou lze považovat za „realistickou".

To znovu ukazuje explozivní sílu akcelerátoru. I při konstantních autonomních investicích může nepříliš silný akcelerátor (viz cvičení 1) vést k dostatečně velkým vyvolaným investicím umožňujícím progresivní růst ekonomiky. A dále, dochází-li k expanzi autonomních výdajů, vyvolá sám multiplikátor expanzivní růst úrovně produkce a akcelerátor jej jen posílí.

Hicks (1950) věnuje velmi mnoho pozornosti možnostem progresivního růstu, což mu její autoři vytýkali, např. Alexander (1951). Je pravda , že ekonomický růst by měl být v souladu s dynamickým modelem. Progresivní růst představuje pouze partikulární řešení dynamického modelu. Hlavním problémem takového modelu zůstává dynamické řešení diferenční rovnice systému a především otázka, zda průběh produkce Y_t, v čase má schopnost oscilační charakter nebo ne, zda je tlumený nebo explozivní

Jednoduchý model multiplikátoru-akcelerátoru s nakupenými investicemi

Jsou dány autonomní spotřební a investiční výdaje (A_t) v obdobích po sobě následujících tj.t = 0, 1, 2, ... Na časový průběh veličin A_t neklademe žádná omezení, pouze předpokládáme, že je pevně dán. Důchod neboli produkce v čase t je Y_t. Změna produkce od období (t - 2) do období (t - 1) vyvolává investice, které jsou nějak rozloženy do období t a následujících období. V jednoduchém modelu se předpokládá, že vyvolané investice jsou nakupeny v období t, bezprostředně následujícím po změně produkce. Příslušný vztah považujeme za přímou úměrnost, takže:

Vyvolané investice jsou předpokládány jako

(4.69) $$I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

Předpokládáme, že lineární spotřební funkce má zpoždění rozložené následujícím způsobem:

Spotřeba je určena vztahem

(4.70) $$C_t = c_1 Y_{t-1} - c_2 Y_{t-2}$$

Podmínkou modelu je, že se plánované investice a plánovaná spotřeba realizují, takže

(4.71) $$Y_t = C_t + I_t + A_t$$

Z této podmínky vyplývá, že úspory a investice se rovnají ex post, tj. $(Y_t - C_t) = (I_t + A_t)$Neříká se nic o úsporách *ex ante*, které závisí na tom, jaký důchod Y_t spotřebitele očekávají; model připouští nezamýšlené úspory, ale nikoli nezamýšlené investice.
Z podmínky modelu plyne diferenční rovnice druhého řádu , kterou můžeme psát ve tvaru:

(4.72) $$Y_t = (v + c_1)Y_{t-1} - (v - c_2)Y_{t-2} + A_t$$

neboli

(4.73) $$Y_t = cY_{t-1} + (v - c_2)(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + A_t$$

Strukturní konstanty jsou v, c_1 a c_2; $c = c_1 + c_2$ je celkový mezní sklon ke spotřebě $s = 1 - c$ je celkový mezní sklon ke spoření. Pro tyto konstanty platí jedině tato omezení:

$$\mathbf{v > 0 \; ; \; 0 < c_1 , c_2 , c, s < 1}$$

V prvém kroku je třeba nalézt partikulární řešení rovnic (4) a (5); řešením by měl být pokud možno průběh trendu nebo rovnovážná úroveň důchodu Y_t v čase, který bude záviset na předpokládaném průběhu autonomních výdajů A_t.

1) Zkoumali jsme již možnost dynamické rovnováhy $\overline{Y}_t = \overline{Y}_0(1 + \rho)^t$, kde ρ je nějaká pevná míra růstu. Jestliže autonomní výdaje jsou konstantní $A_t = A$ pro všechna t, existuje dynamická rovnováha při míře růstu ρ za předpokladu, že $r = \rho$ je kořen rovnice:

(4.74) $$\mathbf{R = r^2 - (v - c_2 - s - 1)r + s = 0}$$

Obecně připouštějí podmínky modelu takový růst geometrickou řadou i v tom případě, kdy autonomní investice jsou dány v pevné výši.

2) Jestliže autonomní výdaje rostou geometrickou řadou, tj. jestliže $A_t = A_0(1 + r)^t$ pro dané r, pak $\overline{Y}_t = \overline{Y}_0(1 + r)^t$ je partikulární (rovnovážné) řešení rovnice (4), (5), je-li:

(4.75) **Y_0 = Chyba!** za předpokladu že **$R > 0$.**

Zde je r dáno a $\overline{Y}_t$, musí mít stejnou míru růstu ® jako A_t. Trend produkce obecně roste geometrickou řadou a míra jeho růstu je dána mírou růstu autonomních investic.

3) Je-li průběh autonomních investic dán v jiném tvaru, vyvolává jiný rovnovážný průběh produkce $\overline{Y}_t$. Například autonomní výdaje A_t mohou oscilovat daným způsobem v čase; rovnovážný průběh důchodu $\overline{Y}_t$ pak je rovněž oscilační .

Předpokládejme nyní, že při daném průběhu autonomních investic A_t jsme určili nějaký odpovídající trend neboli rovnovážný průběh produkce $\overline{Y}_t$. Položme $y_t = Y_t - \overline{Y}_t$, což je odchylka produkce od hodnoty, které by Y_t, nabylo při rovnovážném průběhu v t. Protože jak Y_t, tak $\overline{Y}_t$ vyhovuje rovnici (4), (5), diferenční rovnice pro y_t nabude tvaru:

$$y_t = (v + c_1)\; y_{t-1} - (v - c_2)\, y_{t-2} \quad \text{neboli}$$

$$y_t = c\, y_{t-1} + w(y_{t-1} - y_{t-2}) \qquad \text{kde} \qquad w = v - c_2$$

Poslední a nejdůležitější krok, abychom získali časový průběh odchylky y_t, jenž odpovídá libovolné počáteční výchylce, je vyřešit rovnici (4.74). Toto řešení nám odpoví na takové otázky jako: osciluje Y_t kolem $\overline{Y}_t$, a jestliže ano, jsou oscilace explozívní nebo tlumené, když t neomezeně roste?

Strukturní konstanty jsou: investiční koeficient v, celkový mezní sklon ke spotřebě c a druhý částečný mezní sklon ke spotřebě c_2. Obvykle není nutné zvlášť si všímat prvního mezního částečného sklonu ke spotřebě $c_1 = c - c_2$. Je-li hodnota c dána, je rozložení zpoždění ve spotřebě určeno konstantou c_2.

Rovnice (4.73) jasně ukazuje, že ve skutečnosti jsou důležité pouze dvě strukturní konstanty, c a $w = (v - c_2)$. Účinek rozloženého zpoždění ve spotřebě prostě redukuje velikost v, tj. zmenšuje sílu akcelerátoru. Konstantu $w = (v - c_2)$ můžeme nazvat redukovaný investiční koeficient. V „elementárním případě“ Hicksově ($c_2 = 0$) je w rovno investičnímu koeficientu v; když se zpoždění ve spotřebě prodlužuje, zmenšuje se hodnota w, ať je investiční koeficient v jakýkoli, neboli dané hodnotě w odpovídají silnější akcelerátory. Chceme-li řešení rovnice (6) interpretovat, je vhodné nahradit druhou konstantu c konstantou s podle vztahu s = 1 - c, tj. mezním sklonem ke spoření.

Mohou nastat čtyři případy:

	Strukturní konstanty (s a $w = v - c_2$)	**Časový průběh odchylky y_t**
I.	$w < (1 - \sqrt{s})$	neoscilující a tlumený
II.	$(1 - \sqrt{s})^2 < w < 1$	oscilující a tlumený
III.	$1 < w < (1 + \sqrt{s})^2$	oscilující a explozivní
IV.	$(1 + \sqrt{s})^2 < w$	neoscilující a explozivní

Je zřejmé, jaký je charakter řešení pro všechny kombinace konstant s a w. Křivka AB má rovnici $w = (1 - \sqrt{s})^2$ a BC má rovnici $w = (1 + \sqrt{s})^2$. Zda je průběh odchylky y_t tlumený ($w < 1$) nebo explozivní ($w > 1$) závisí pouze na w. Vliv konstanty s se projevuje v tom, že určuje meze hodnot w, které vedou k oscilaci. Je-li s velmi malé, osciluje průběh odchylky y_t, jen je-li w blízké jednotce. S růstem konstanty s se rozšiřuje hranice konstanty w, pro které obdržíme oscilační průběh řešení. Nebo, což je totéž, je-li s malé, vyvolává jakákoli hodnota w významně větší než 1 monotónně explozivní růst; čím je s větší, tím musí být větší také w,aby růst odchylky y_t byl monotónně explozivní.

Přesněji řečeno, podmínkou oscilačního průběhu odchylky y_t je, aby platilo $s > (1 - \sqrt{w})^2$. Jeli tedy w mezi 0 a 4, pak vždy existuje hodnota (kladná a menší než 1) pro s, která je dostatečně velká, aby průběh odchylky y_t byl oscilační.

Koeficient c_2, jenž je ukazatelem rozložení zpoždění ve spotřebě, vždy redukuje sílu akcelerátoru.V„elementárním případě“ ($c_2 = 0$) je obor hodnot v pro oscilační průběh odchylky y_t dán nerovnostmi $(1 - \sqrt{s})^2 < v < (1 + \sqrt{s})^2$ a rovnoměrné oscilace vzniknou při v = 1. Je-li zpoždění rozložené, pak s růstem konstanty c_2 se příslušný obor posunuje ve směru osy v a je určen nerovnostmi $(1 - \sqrt{s})^2 + c_2 < v < (1 + \sqrt{s})^2$ c_2 rovnoměrné oscilace vzniknou při $v = 1 + c_2$. Akcelerátor o dané síle účinkuje tím slaběji, čím větší je hodnota c_2 a čím delší je průměrné zpoždění. Pak je pro vznik explozivního průběhu odchylky y_t, třeba silnějšího akcelerátoru. Tlumený průběh vzniká v širším rozmezí síly akcelerátoru. Existence rozloženého zpoždění ve spotřebě přispívá ke konvergenci a stabilitě v průběhu odchylky y_t.

Samuelson - Hicksův růstový model [Samuelson (1939), Hicks (1950)]

Nejúplnější formulací vzájemného působení multiplikátoru - akcelerátoru při nespojitém postupu je model, který formuloval nejdříve Samuelson a později rozvinul Hicks. Jeho hlavním předpokladem je, že se uskutečňují plány spotřeby. *Dále obsahuje podmínku, že při fungování modelu se uskuteční plány investic, takže investice ex ante se rovnají jednaké hodnotě úspor, jednak investic ex post.* Vztah *ex ante* pro investice je akcelerátor se zpožděním.

Formulace se odlišuje od Harrodovy ve dvou směrech :
- uskutečňují se plány spotřeby (nikoli úspor)
- zpoždění se stávají podstatným prvkem ve vztazích *ex ante* pro spotřebu a pro investice.

1] Formálně vzato, model vychází z lineární spotřební funkce vyjádřené s rozloženým zpožděním:

(11) $$C_t = \gamma + c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2} + c_3 Y_{t-3} + \dots \quad \text{, kde}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots = c \qquad 0 < c < 1 \quad , \quad 0 < c_1, c_2, c_3, \dots < 1$$

2] O vztahu pro akcelerátor obdobně předpokládáme, že je rovněž lineární s rozloženým zpožděním:

(12) $$I_t = v_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + v_2 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \dots \text{, kde}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots = v \ , \quad 0 < v < 1 \quad , \quad 0 < v_1, v_2, \dots < 1$$

Plány *ex ante*, představované vztahy (11) a (12), zahrnují nejrůznější možnosti. Úroveň důchodu v běžném roce vyvolává rozhodnutí spotřebitelů spotřebovat jej a odpovídající výdaje jsou rozloženy do několika následujících období nebo jsou vyrovnány s výdaji příštích let, např. ve formě koupí na splátky. Dále, běžná změna důchodu vyvolává rozhodnutí investovat a potřebné výdaje jsou plánovány na příští období. Vztahy (11) a (12) se týkají spotřebních výdajů a investičních nákladů. *Mohou záviset na předchozích rozhodnutích o spotřebě a investicích : skutečné dodávky spotřebního zboží a kapitálových statků mohou následovat po skutečném zaplacení, mohou být současné s placením nebo je mohou předcházet*. Vše, co zde potřebujeme, je časové rozložení všech výdajů. Skutečné rozložení zpoždění, jak bylo uvedeno (11) a (12) může mít různé formy.

Takto pojatý (diskrétní) model Samuelsonův-Hicksův lze srovnávat s odpovídajícím modelem ve spojitém vyjádření Oba modely mají v sobě zahrnuta časová zpoždění.

Phillips užívá spojitě rozložených zpoždění spotřebitelské poptávky i poptávky po investicích : případ, kdy neexistuje zpoždění ve spotřebě, je rozebírá jen pro zjednodušení matematického výkladu.

Model Samuelsonův-Hicksův zavádí rozložení zpoždění u plánované spotřeby i u plánovaných investičních výdajů : to odpovídá Phillipsovu typu zpoždění, klesají-li koeficienty geometrickou řadou, jinak jsou však v Samuelsonově-Hicksově modelu zpoždění ještě obecnějšího charakteru. Rozdíl mezi Phillipsovým a Samuelsonovým-Hicksovým modelem spočívá v podmínkách, za nichž fungují.

a) Phillips chápe poptávku a nabídku odděleně : spotřeba v závislosti na zpoždění a investiční plány (rovněž se zpožděními) představují dohromady celkovou poptávku, nabídka se pak přizpůsobuje poptávce s dalším zpožděním. Důraz je kladen na nezamýšlené investice vyvolané zpožděním nabídky; spotřeba a právě tak i úspory se mohou realizovat.

b) V Samuelsonově-Hicksově modelu se rovněž sčítá plánovaná spotřeba a plánované investice, předpokládá se, že se obojí realizuje. Proto spotřeba a investiční plány, obojí v závislosti na zpoždění a ex ante, se stávají výdaji ex post a tvoří dohromady celkovou produkci. Neexistují zde nezamýšlené investice (ani spotřeba): důraz se klade na nezamýšlené úspory. V Phillipsově konstrukci následuje po zpoždění v působení akcelerátoru (který určuje poptávku po investicích) další zpoždění, a to v přizpůsobení nabídky kapitálových statků. V Samuelsonově-Hicksově modelu je celý komplex zpoždění na straně investic vtělen do jednoduchého vztahu pro akcelerátor (2); je proto velmi důležitá pružnost ve formulaci i interpretaci tohoto vztahu.

Nejdříve se budeme zabývat nejjednodušším Samuelsonovým-Hicksovým případem, tj. případem, kdy jsou všechny investiční výdaje soustředěny neboli „nakupeny" do období následujícího bezprostředně po období, v němž začala změnu produkce.

Investice vyvolané změnami produkce bereme jako očištěné o obnovu/amortizaci. Abstrahujeme od účinků „odezvy", tj. od té skutečnosti, že fixní kapitál, který byl původně uveden do provozu ve větším měřítku v jednom období, je třeba obnovit po uplynutí určité doby takřka současně.

Z akcelerátoru v (12) vezmeme jen první člen. Ten se vztahuje jen na dvě minulá období, Y_{t-1} a Y_{t-2}. Dosáhli bychom proto jen nepatrného zjednodušení, kdybychom použili multiplikátoru Kahnova typu a jen jednoho členu, tj. obsahujícího Y_{t-1}, ve spotřební funkci (11). Použijeme proto dvou členů, tj. členů obsahujících Y_{t-1} a Y_{t-2}, takže ve spotřebě je též rozložené zpoždění. Jako zvláštní případ můžeme c_2 položit = 0, čímž obdržíme multiplikátor Kahnova typu a jde tzv. elementární případ Hicksův (1950).

Základní identitou modelu je podmínka :

(13) $$Y_t = C_t + I_t + A_t$$ **, kde**

(14) $$C_t = \gamma + c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2}$$ **je spotřeba,**

(15) $$I_t = v\,(Y_{t-1} - Y_{t-2})$$ **jsou vyvolané investice**

A_t jsou autonomní investice, přičemž chápeme všechny tyto veličiny jako realizované ex post. Tato podmínka je ekvivalentní rovností investic ex ante úsporám a investicím ex post. Nemluví se o úsporách ex ante, jež se nemusí rovnat úsporám ani investicím ex post; tzn. může dojít k nezamýšleným úsporám.

Dosazením (11) a (12) do (13) přechází identita (13) v diferenční rovnici druhého řádu pro Y_t:

(14) $$Y_t = \gamma + c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2} + v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + A_t$$, neboli po přeskupení členů

(14a) $$Y_t = (v + c_1)Y_{t-1} - (v - c_2)Y_{t-2} + (A_t + \gamma)$$

(Členy γ zahrneme do A_t a takto upravenou hodnotu A_t nazveme autonomními výdaji. Položme $c = c_1 + c_2$ (c je celkový mezní sklon ke spotřebě) ; dále užijeme veličiny c a c_2 s tím, že $c_1 = c - c_2$. Po této substituci dostaneme:

(15) $$Y_t = (v + c - c_2)\,Y_{t-1} - (v - c_2)Y_{t-2} + A_t$$, jinak též

(15a) $$Y_t = c.Y_{t-1} + (v - c_2)(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + A_t$$

Abychom dostali průběh důchodu Y_t, je třeba rovnici (15a) vyřešit (v závislosti na časovém průběhu veličiny A_t) . Je-li $A_t = A$ (tj. konstantní), pak jedním řešením rovnice (15a) je $Y_t = \overline{Y}$ (konstanta), přičemž $\overline{Y} = A/(1 - c)$, což zjistíme přímým dosazením do rovnice (15a). Úroveň převzatá z modelu statického multiplikátoru vyhovuje opět i zde probíranému modelu.

Položíme-li $\varepsilon_t = Y_t - \overline{Y}$, nabude rovnice (15) nebo (15a) tvaru:

(16) $$\varepsilon_t = c\,\varepsilon_{t-1} + (v - c_2)(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})$$

K obecnému řešení rovnice (16) se dostaneme později. Obvyklý průběh veličiny Y_t vyjadřuje explozívní oscilaci kolem hodnoty **Y=A/(1-c)**. Hicksův tzv. elementární případ je popsán vztahy:

(17) $$C_t = c, Y_{t-1} \quad \text{a} \quad I_t = v.(Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

Příslušnou (zjednodušenou) diferenční rovnici dostaneme z rovnice (16) , položíme-li $c_2 = 0$:

(17) $$\varepsilon_t = c\,\varepsilon_{t-1} + v\,(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})$$

(***c*** **je mezní sklon ke spotřebě, v je síla akcelerátoru**). Účinek rozloženého zpoždění spotřeby, který je vyjádřen konstantou c_2 spočívá v redukci síly akcelerátoru z úrovně **v** v rovnici (14) na ***(v - c₂)*** v rovnici (15).

Účinek rozloženého zpoždění investic můžeme sledovat, budeme-li v (12) předpokládat, že se v_2 nerovná nule. Zajímavý případ, který nebyl studován Hicksem, vznikne při ***geometricky rozloženém zpoždění investic.*** V tomto případě, jsou-li $\mathbf{Z_t = v\,.(Y_t - Y_{t-1})}$ nezpožděné investice, platí:

(18) $$I_t = \lambda\,\{ Z_{t-1} + (1-\lambda)\,Z_{t-2} + (1-\lambda)^2 Z_{t-3} + \ldots \}$$

kde λ ***je rychlost reakce*** ***(0 < λ < 1)***. Přitom platí:

(19) I_t = Chyba!Z Chyba! = Chyba!(v. ΔY Chyba!)

Dosadíme-li tyto výrazy a $\mathbf{C_t = c\,Y_{t-1}}$ do rovnice $\mathbf{Y_t = C_t + I_t + A}$, obdržíme:

$Y_t = c\,Y_{t-1}$ + Chyba!(vΔY Chyba!) + A

tj. $\Delta Y_t + \lambda\,Y_t = c\Delta\,Y_{t-1} + c\lambda\,Y_{t-1} + \lambda v\Delta\,Y_{t-1} + \lambda A$ (protože $\Delta A = 0$). Dosadíme-li $\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t$ a $\Delta\,Y_{t-1} = Y_t - Y_{t-1}$ a sloučíme-li odpovídající členy, obdržíme rovnici:

(20) $$Y_t = (1 + c - \lambda + \lambda v)\,Y_t - (c - \lambda c + \lambda v)\,Y_{t-1} + \lambda A$$

Jedním řešením je opět statická úroveň $Y_t = \overline{Y} = A/(1-c)$. Položme opět $\varepsilon_t = Y_t - \overline{Y}$ a pro zjednodušení proveďme posun zpět z období (t + 1) do období t; obdržíme:

(21a) $$\varepsilon_t = (1 + c - \lambda + \lambda v)\,\varepsilon_{t-1} - (c - \lambda c + \lambda v)\,\varepsilon_{t-2}$$ tj.

(21b) $$\varepsilon_t = c^* \,.\, \varepsilon_{t-1} + v^* \,.\, \varepsilon_{t-2}$$, kde

$$c^* = (1-\lambda) + \lambda c \quad \text{a} \quad v^* = (1-\lambda)c + \lambda v$$

Zřejmě c* je vážený průměr čísel 1 a c s vahami (1 - λ) a λ, přičemž 0 < λ < 1 ; v* je obdobně vážený průměr čísel c a v. Je-li c < v, což je obvyklý případ, platí c < c' < 1 a c < v' < v. Srovnání rovnice (21b) s rovnicí (17) ukazuje, že účinek rozloženého (geometrického) zpoždění u investic opět spočívá ve zmenšení síly akcelerátoru. Akcelerátor jednoduchého Hicksova modelu, popsaného rovnicí (16) nebo (17), je $I_t = v\,(Y_{t-1} - Y_{t-2})$. Interpretace zde podaná pochází od Hickse (1950) : změna v celkové produkci v období (t - 1) vede k investicím, jež jsou plánovány a realizovány v období t následkem zpoždění, které model obsahuje. .

Samuelson (1939a) podal poněkud odlišnou interpretaci, podle níž jsou vyvolané investice závislé pouze na změnách v produkci spotřebního zboží. Smithies (1942) dostává tutéž diferenční rovnici ještě jinak, totiž tím, že vyloučí proměnnou úroková míra ve své teorii zápůjčního fondu. .

Možnost dynamické rovnováhy v Samuelsonově - Hicksově modelu

Za jistých okolností je možný růst důchodu/ produkce geometricky podle vzorce $Y_t = \overline{Y}_0(1 + \rho)^t$, kde ρ je míra růstu. Dochází k tomu v modelu multiplikátoru, jestliže autonomní výdaje rostou geometrickou řadou při míře ρ; účinek spočívá prostě ve „vynásobení" autonomních výdajů. Dochází k tomu i v modelu multiplikátoru-akcelerátoru, dokonce i tehdy, jsou-li autonomní výdaje konstantní; míra růstu ρ je pak rovna Harrodově zaručené míře růstu **Chyba!**. Tento příklad indikuje explozivní účinek akcelerátoru. V obou případech je průběh důchodu Y_t rovnovážný a nepřestavuje plně dynamické řešení dynamického modelu, tj. jakmile se důchod Y_t, začne pohybovat podél dané trajektorie, udrží se na ní působením vnitřních sil modelu.

Stejnou možnost progresivního růstu důchodu obsahuje i model Samuelsonův-Hicksův. Jde opět o zvláštní řešení spíše rovnovážné než dynamické povahy, jež ukazuje sílu akcelerátoru. V diferenční rovnici tohoto modelu, tj. v rovnici (16), jsou-li autonomní výdaje A konstantní, tedy v rovnici

(22) $$\varepsilon_t = c_1 . \varepsilon_{t-1} + (v - c_2)\ (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})$$

se pokusme nalézt partikulární řešení tvaru $\varepsilon_t = \overline{\varepsilon}_0(1 + r)^t$. V takovém případě musí být vztah

(23) $$\overline{\varepsilon}_0(1 + r)^t = c\ \overline{\varepsilon}_0(1 + r)^{t-1} + (v - c_2)\{\ \overline{\varepsilon}_0(1 + r)^{t-1} - \overline{y}_0(1 + r)^{t-2}\}$$

splněn pro všechna t. Vyhovuje zde jakákoli hodnota $\overline{y}_0$ za předpokladu, že r splňuje vztah

(24) $$(1 + r)^2 = c(1 + r) + (v - c_2)\ (1 + r\ - 1)$$

který získáme z předchozího vztahu, dělíme-li jeho obě strany výrazem $\overline{y}_0(1 + r)^{t-2}$. Tedy pro každou hodnotu $r = \rho$ jež je přípustným (reálným a kladným) kořenem kvadratické rovnice:

(25) $$R\ (r) = r^2 - (v - c_2 - s - 1)r + s = 0 \qquad (s = 1 - c)$$

je možný progresivní růst důchodu podle vzorce $y_t = \overline{y}_0(1 + \rho)^t$ při míře ρ. Protože konstantní člen s v R je kladný, protíná křivka osu 0R nad počátkem 0. Proto buď není žádný kořen reálný (křivka R_1), nebo jsou oba kořeny reálné a záporné (křivka R_2), nebo oba kořeny reálné a kladné (křivka R_3). Pro nás má význam pouze poslední případ; vyplývají z něho dvě možné míry růstu, ρ_1 a ρ_2.

Řešení kvadratické rovnice můžeme snadno nalézt algebraicky :

1) Kořeny rovnice R = 0 jsou reálné, jestliže platí: $(v - c_2 - s - 1)^2 > 4s$ a přitom

1a) jsou kladné, když: $(v - c_2 - s - 1) > 2\sqrt{;s}$ tj.jestliže $v - c_2 > (1 + \sqrt{;s}\ )^2$

Je tudíž progresivní růst produkce možný při vhodné míře růstu ρ a za předpokladu, že akcelerátor je dostatečně silný; je k tomu zapotřební pouze, aby $v > c_2 + (1 + \sqrt{;s}\ )^2$. Dostaneme pak dvě možné hodnoty pro míru růstu ρ. Kořeny rovnice **R(r) = 0** jsou:

(26) $\rho_1 , \rho_2 =$ **Chyba!**{ $(v - c$ **Chyba!** $- s - 1) \pm$ **Chyba!**}

Obě tyto hodnoty dávají možnou míru růstu, jež závisí pouze na strukturních konstantách systému. Jedna z nich je obecně velmi malá (kořen, který obdržíme, vezmeme-li ve vzorci u odmocniny znaménko záporné); to je právě ta hodnota, kterou lze považovat za „realistickou".

To opět ukazuje na explozivní sílu akcelerátoru. I při konstantních autonomních investicích může nepříliš silný akcelerátor vést ke značně velkým vyvolaným investicím umožňujícím progresivní růst ekonomiky. A dále, dochází-li k expanzi autonomních výdajů, vyvolá sám multiplikátor expanzivní růst úrovně produkce a akcelerátor jej jen posílí.

Hicks (1950) věnuje velmi mnoho pozornosti možnostem progresivního růstu, což mu jiní autoři vytýkali, např. Alexander (1951). Je pravda , že ekonomický růst by měl být v souladu s dynamickým modelem. Progresivní růst představuje pouze partikulární řešení dynamického modelu. Hlavním problémem takového modelu zůstává dynamické řešení diferenční rovnice systému a především otázka, zda průběh produkce Y_t, v čase má schopnost oscilační charakter nebo ne, zda je tlumený nebo explozivní .

Samuelson-Hicksův jednoduchý model (multiplikátoru-akcelerátoru)

Jsou dány autonomní spotřební a investiční výdaje A_t v obdobích po sobě následujících t = 0,1,2, ... Na časový průběh veličin A_t neklademe žádná omezení, pouze předpokládáme, že je pevně dán. Důchod neboli produkce v čase t je Y_t. Změna produkce od období (t - 2) do období (t - 1) vyvolává investice, které jsou nějak rozloženy do období t a následujících období. V jednoduchém modelu se předpokládá, že vyvolané investice jsou soustředěny v období t, bezprostředně následujícím po změně produkce. Příslušný vztah považujeme za přímou úměrnost, takže :

(1) Vyvolané investice $I_t = v.(Y_{t-1} - Y_{t-2})$

Předpokládáme, že lineární spotřební funkce má zpoždění rozložené následujícím způsobem:

(2) Spotřeba $C_t = c_1 Y_{t-1} - c_2 Y_{t-2}$

Podmínkou modelu je, že se plánované investice a plánovaná spotřeba realizují, takže platí

(3) Identita důchodu $Y_t = C_t + I_t + A_t$

Z této podmínky vyplývá, že úspory a investice se rovnají ex post, tj. $(Y_t - C_t) = (I_t + A_t)$ .Neříká se nic o úsporách ex ante, které závisí na tom, jaký důchod Y_t spotřebitele očekávají; model připouští nezamýšlené úspory, ale nikoli nezamýšlené investice.

Z podmínky modelu plyne diferenční rovnice druhého řádu , kterou můžeme psát ve tvaru:

(3) $Y_t = (v + c_1) Y_{t-1} - (v - c_2) Y_{t-2} + A_t$ neboli

(4) $Y_t = c.Y_{t-1} + (v - c_2)(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + A_t$

Strukturní konstanty jsou v, c_1 a c_2; $c = c_1 + c_2$ je celkový mezní sklon ke spotřebě $s = 1 - c$ je celkový mezní sklon ke spoření. Pro uvedené konstanty platí tato omezení:

$$v > 0 \; ; \; 0 < c_1 , c_2 , c, s < 1$$

V prvém kroku je třeba nalézt partikulární řešení rovnic (3), resp. (4); řešením by měl být pokud možno průběh trendu nebo rovnovážná úroveň důchodu Y_t v čase, který bude záviset na předpokládaném průběhu autonomních výdajů A_t :

A) Zkoumali jsme již možnost dynamické rovnováhy $\overline{Y}_t = \overline{Y}_0(1 + \rho)^t$, kde ρ je nějaká pevná míra růstu. Jestliže autonomní výdaje jsou konstantní $A_t = A$ pro všechna t, existuje dynamická rovnováha při míře růstu ρ za předpokladu, že r = ρ je kořen rovnice:

(5) $$R(r) = r^2 - (v - c_2 - s - 1) r + s = 0$$

Obecně podmínky modelu připouštějí takový růst geometrickou řadou i v tom případě, kdy autonomní investice jsou dány v pevné výši.

B) Jestliže autonomní výdaje rostou geometrickou řadou, tj. jestliže $A_t = A_0 (1 + r)^t$ pro dané r, pak $Y_t = \overline{Y}_0 (1 + r)^t$ je partikulární (rovnovážné) řešení rovnice (3), resp. (4), je-li:

(6) Y_0 = **Chyba!** za předpokladu že R > 0.

Zde je r dáno a $\overline{Y}_t$, musí mít stejnou míru růstu jako A_t. Trend produkce obecně roste geometrickou řadou a míra jeho růstu je dána mírou růstu autonomních investic.

C) Je-li průběh autonomních investic dán jinak, vyvolává jiný rovnovážný průběh produkce Y_t. Například pokud autonomní výdaje A_t oscilují daným způsobem v čase; rovnovážný průběh důchodu Y_t, je pak rovněž oscilační .

Předpokládejme nyní, že při daném průběhu autonomních investic A_t jsme určili nějaký odpovídající trend neboli rovnovážný průběh produkce $\overline{Y}_t$. Položme $y_t = Y_t - \overline{Y}_t$, což je odchylka produkce od hodnoty, které by Y_t, nabylo při rovnovážném průběhu v t. Protože jak Y_t , tak $\overline{Y}_t$ vyhovuje rovnici (3), (4), diferenční rovnice pro y_t nabude tvaru:

$$(7) \qquad \varepsilon_t = (v + c_1)\,\varepsilon_{t-1} - (v - c_2)\,\varepsilon_{t-1} \qquad \text{neboli}$$

$$(7a) \qquad \varepsilon_t = c.\,\varepsilon_{t-1} + w\,.\,(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-1}) \qquad \text{, kde } w = v - c_2$$

Poslední a nejdůležitější krok, abychom získali časový průběh odchylky ε_t, jenž odpovídá libovolné počáteční výchylce, je vyřešit rovnici (7a). Toto řešení nám odpoví na takové otázky jako: osciluje Y_t kolem $\overline{Y}_t$, a jestliže ano, jsou oscilace explozivní nebo tlumené, když t neomezeně roste?

Vztah (7a) ukazuje, že pro řešení jsou důležité jen dvě strukturní konstanty : c a $w = (v - c_2)$. Účinek rozloženého zpoždění ve spotřebě redukuje velikost v, tj. zmenšuje sílu akcelerátoru. Konstantu $w = (v - c_2)$ můžeme nazvat redukovaný investiční koeficient.

V „elementárním případě" Hicksově ($c_2 = 0$) je w rovno investičnímu koeficientu v; když se zpoždění ve spotřebě prodlužuje, zmenšuje se hodnota w, ať je investiční koeficient v jakýkoli, neboli dané hodnotě w odpovídají silnější akcelerátory. Chceme-li řešení rovnice (7a) interpretovat, je vhodné nahradit druhou konstantu c konstantou s podle vztahu s = 1 - c, tj. mezním sklonem ke spoření.
Mohou nastat v podstatě čtyři principiálně odlišné případy:

	Strukturní konstanty (s , $w = v - c_2$)	**Časový průběh odchylky ε_t**
I.	$w < (1 - \sqrt{s})$	**neoscilující a tlumený**
II.	$(1 - \sqrt{s})^2 < w < 1$	**oscilující a tlumený**
III.	$1 < w < (1 + \sqrt{s})^2$	**oscilující a explozivní**
IV.	$(1 + \sqrt{s})^2 < w$	**neoscilující a explozivní**

Charakter řešení udávají kombinace konstant s a w :

a) Zda je průběh odchylky ε_t tlumený (w <1) či explozivní (w >1) závisí pouze na hodnotě w. Vliv konstanty **s** se projevuje v tom, že určuje meze hodnot **w**, které vedou k oscilaci. Je-li **s** velmi malé, osciluje průběh odchylky ε_t, jen je-li **w** blízké 1. S růstem konstanty **s** se rozšiřuje hranice konstanty **w**, pro které získáme oscilační průběh řešení. Je-li **s** malé, vyvolává jakákoli hodnota **w** významně větší než 1 monotónně explozivní růst; čím je **s** větší, tím musí být větší také **w**, aby růst odchylky ε_t byl monotónně explozivní.

b) Podmínkou oscilačního průběhu odchylky y_t je, aby platilo $s > (1 - \sqrt{w})^2$. Je-li tedy **w** mezi 0 a 4, pak vždy existuje hodnota (kladná a menší než 1) pro **s**, která je dostatečně velká, aby průběh odchylky ε_t byl oscilační. Koeficient c_2, jenž je ukazatelem rozložení zpoždění ve spotřebě, vždy redukuje sílu akcelerátoru.V„elementárním případě" ($c_2 = 0$) je obor hodnot v pro oscilační průběh odchylky ε_t dán nerovnostmi $(1 - \sqrt{s})^2 < v < (1 + \sqrt{s})^2$ a **rovnoměrné oscilace vzniknou při v = 1.**
Je-li zpoždění rozložené, pak s růstem konstanty c_2 se příslušný obor posunuje ve směru osy **v** a je dán nerovnostmi $(1 - \sqrt{s})^2 + c_2 < v < (1 + \sqrt{s})^2 + c_2$ **rovnoměrné oscilace vzniknou při $v = 1 + c_2$.** Akcelerátor o dané síle působí tím slaběji, čím větší je hodnota c_2 a čím delší je průměrné zpoždění. Pak je pro vznik explozivního průběhu odchylky ε_t, třeba silnějšího akcelerátoru. Tlumený průběh vzniká v širším rozmezí síly akcelerátoru. Existence rozloženého zpoždění ve spotřebě přispívá ke konvergenci a stabilitě v průběhu odchylky ε_t.