Drsná matematika III – 10. demonstrovaná cvičení
Toky v sítích

Martin Panák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

28.11. 2006

1. Domácí úlohy z minulého týdne
   - Příklad 1
   - Příklad 2.
   - Příklad 3.
2. Toky v sítích
   - Řezy
   - Ford-Fulkersonův algoritmus

Příklad 1. *Kolik existuje různých koster grafu* K_5*? Kolik různých jich existuje až na izomorfismus?*

Příklad 1. *Kolik existuje různých koster grafu K_5? Kolik různých jich existuje až na izomorfismus?*

Řešení. Existují tři navzájem neizomorfní kostry (se skóre $(1,2,2,2,1)$, $(1,2,3,1,1)$, $(4,1,1,1,1)$). Příslušné třídy isomorfních grafů mají postupně $5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2$, $5 \cdot 4 \cdot 3$ a 5 prvků, celkem 125 různých koster. $\square$

Prüferova posloupnost.

Prüferovu posloupnost můžeme přiřadit kostře grafu K_n a to následujícím způsobem: označme vrcholy v grafu K_n postupně od 1 do n a odstraňujme postupně listy dané kostry (od nejmenšího) a s každým odstraněným listem zapíšme do posloupnosti souseda právě odstraněného listu. Opakujeme tak dlouho, dokud v kostře nezbubou pouze dva vrcholy.
Získaná posloupnost má evidentně $n-2$ členů, které mohou nabývat hodnot od 1 do n. Obráceně není těžké dokázat, že pro každou takovou posloupnost existuje právě jedna kostra grafu K_n, která se do této posloupnosti výše popsaným postupem zakóduje.
Celkem dostáváme, že existuje právě n^{n-2} různých koster grafu K_n.

Příklad 2. *Uvažme následující postup pro určování minimální cesty mezi dvěma vrcholy v ohodnoceném neorientovaném grafu: nejprve nalezneme minimální kostru grafu, za minimální cestu pak prohlásíme jedinou cestu spojující dva dané vrcholy v minimální kostře. Dokažte, že je tento postup správný, nebo uveďte protipříklad.*

Příklad 2. *Uvažme následující postup pro určování minimální cesty mezi dvěma vrcholy v ohodnoceném neorientovaném grafu: nejprve nalezneme minimální kostru grafu, za minimální cestu pak prohlásíme jedinou cestu spojující dva dané vrcholy v minimální kostře. Dokažte, že je tento postup správný, nebo uveďte protipříklad.*

Řešení. Postup není správný. Stačí uvážit například kružnici s hranami ohodnocenými až na jednu jedničkami, zbývající hrana ohodnocená dvojkou. □

Příklad 3. *Máme dánu následující tabulku vzdáleností světových metropolí: Londýna, Mexico City, New Yorku, Paříže, Pekingu a Tokia:*

$$\begin{pmatrix} & L & MC & NY & P & Pe & T \\ L & & 5558 & 3469 & 214 & 5074 & 5959 \\ MC & & & 2090 & 5725 & 7753 & 7035 \\ NY & & & & 3636 & 6844 & 6757 \\ P & & & & & 5120 & 6053 \\ Pe & & & & & & 1307 \end{pmatrix}$$

Jaká je nejmenší délka kabelu, kterým je možné propojit tato města? (předpokládáme, že délka kabelu potřebného k propojení daných dvou měst je právě vzdálenost v tabulce).

Příklad 3. *Máme dánu následující tabulku vzdáleností světových metropolí: Londýna, Mexico City, New Yorku, Paříže, Pekingu a Tokia:*

$$\begin{array}{c} \\ L \\ MC \\ NY \\ P \\ Pe \end{array}\begin{pmatrix} L & MC & NY & P & Pe & T \\ & 5558 & 3469 & 214 & 5074 & 5959 \\ & & 2090 & 5725 & 7753 & 7035 \\ & & & 3636 & 6844 & 6757 \\ & & & & 5120 & 6053 \\ & & & & & 1307 \end{pmatrix}$$

Jaká je nejmenší délka kabelu, kterým je možné propojit tato města? (předpokládáme, že délka kabelu potřebného k propojení daných dvou měst je právě vzdálenost v tabulce).

Řešení. Aplikací algoritmu na hledání minimální kostry zjistíme, že hledaná délka je 12154. (v kostře jsou hrany LPe, LP, LNY, PeT, MCNY). □

1. Domácí úlohy z minulého týdne
   - Příklad 1
   - Příklad 2.
   - Příklad 3.

2. Toky v sítích
   - Řezy
   - Ford-Fulkersonův algoritmus

Různé definice řezů.

Nalezněte všechny řezy v následujícím grafu:

Najděte maximální tok v následujícím ohodnoceném orientovaném grafu: