Drsná matematika III – 12. demonstrovaná cvičení

Martin Panák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

5.12. 2006

Příklad 1. *Označme vrcholy v grafu* K_5 *postupně čísly* 1, 2,. . . 5 *a každou hranu* i, j, $i = 1, \ldots, 5$ *ohodnoťme číslem* 1, *pokud je* $(i + j)$ *liché, číslem* 2, *pokud je* $(i + j)$ *sudé. Kolik existuje různých maximálních koster v tomto grafu?*

Příklad 1. *Označme vrcholy v grafu K_5 postupně čísly* 1, 2,. . . 5 *a každou hranu* i, j, $i = 1, \dots, 5$ *ohodnoťme číslem* 1, *pokud je* $(i + j)$ *liché, číslem* 2, *pokud je* $(i + j)$ *sudé. Kolik existuje různých maximálních koster v tomto grafu?*

Řešení. 18. □

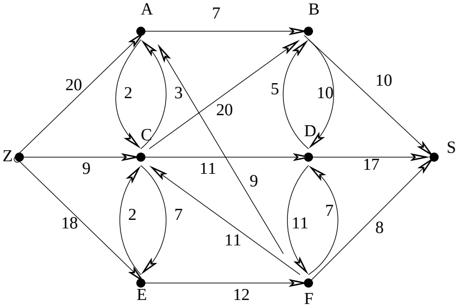
Příklad 2. *Označme vrcholy v grafu* K_6 *postupně čísly* 1, 2,. . . 6. *Kterou hranu grafu* K_6 *objeví algoritmus „prohledávání do šířky", bude-li počátečním vrcholem vrchol* 5 *a hrany ze zpracovávaného vrcholu budeme procházet postupně podle velikosti druhého koncového vrcholu hrany (od nejmenšího).*

Příklad 2. *Označme vrcholy v grafu K_6 postupně čísly 1, 2,... 6. Kterou hranu grafu K_6 objeví algoritmus „prohledávání do šířky“, bude-li počátečním vrcholem vrchol 5 a hrany ze zpracovávaného vrcholu budeme procházet postupně podle velikosti druhého koncového vrcholu hrany (od nejmenšího).*

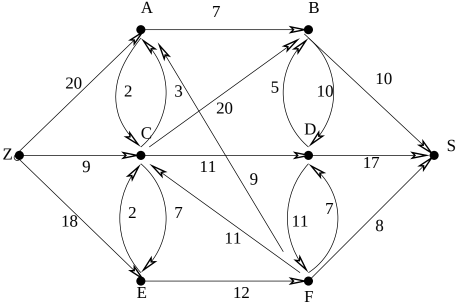
Řešení. $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$, $(5,6)$, $(1,2)$, $(1,3)$,..., $(4,6)$.

$\square$

Příklad 3. *Určete maximální tok a jemu odpovídající minimální řez v následujícím ohodnoceném orientovaném grafu:*



Příklad 3. *Určete maximální tok a jemu odpovídající minimální řez v následujícím ohodnoceném orientovaném grafu:*



Řešení. Min. řez je dán množinou $\{Z, A, E\}$. Hodnota je 32. $\square$

Příklad 1. *Označme vrcholy v grafu* K_5 *postupně čísly* 1, 2,. . . 5 *a každou hranu* $\{i, j\}$, $i = 1, \dots, 5$ *ohodnoťme číslem* 1, *pokud je* $(i + j)$ *liché, číslem* 2, *pokud je* $(i + j)$ *sudé. Kolik existuje různých minimálních koster v tomto grafu?*

Příklad 1. *Označme vrcholy v grafu* K_5 *postupně čísly* 1, 2,. . . 5 *a každou hranu* $\{i, j\}$, $i = 1, \ldots, 5$ *ohodnoťme číslem* 1, *pokud je* $(i + j)$ *liché, číslem* 2, *pokud je* $(i + j)$ *sudé. Kolik existuje různých minimálních koster v tomto grafu?*

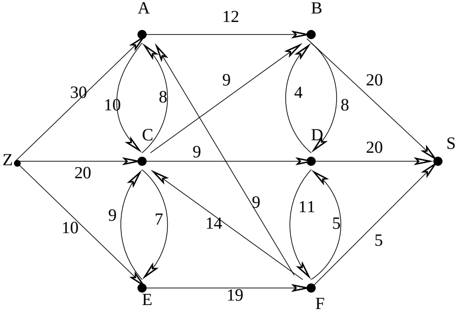
Řešení. 12. □

Příklad 2. *Označme vrcholy v grafu* K_6 *postupně čísly* 1, 2,. . . 6. *Napište posloupnost hran grafu* K_6 *tak, jak je bude procházet algoritmus „prohledávání do hloubky", bude-li počátečním vrcholem vrchol* 5 *a hrany ze zpracovávaného vrcholu budeme procházet postupně podle velikosti druhého koncového vrcholu hrany (od nejmenšího).*

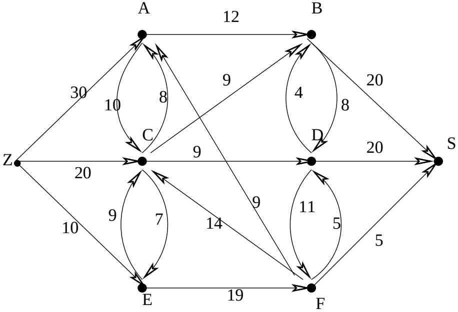
Příklad 2. *Označme vrcholy v grafu K_6 postupně čísly 1, 2,. . . 6. Napište posloupnost hran grafu K_6 tak, jak je bude procházet algoritmus „prohledávání do hloubky“, bude-li počátečním vrcholem vrchol 5 a hrany ze zpracovávaného vrcholu budeme procházet postupně podle velikosti druhého koncového vrcholu hrany (od nejmenšího).*

Řešení. $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(5, 6)$, $(6, 1)$,. . . $(1, 2)$ □

Příklad 3. *Určete maximální tok a jemu odpovídající minimální řez v následujícím ohodnoceném orientovaném grafu:*



Příklad 3. *Určete maximální tok a jemu odpovídající minimální řez v následujícím ohodnoceném orientovaném grafu:*



Řešení. Min. řez odpovídá množině (B, D, S). Hodnota je 40. $\square$

Příklad 1. *Označme vrcholy v grafu* K_6 *postupně čísly* 1, 2,$\ldots$6 *a každou hranu* i, j, $i = 1, \ldots, 6$ *ohodnoťme číslem* 1, *pokud je* $(i + j)$ *dává zbytek* 1 *po dělení třemi, číslem* 2, *pokud je* $(i + j)$ *dává zbytek* 2 *po dělení třemi a konečně číslem* 3, *pokud je* $(i + j)$ *dělitelné třemi. Kolik existuje různých minimálních koster v tomto grafu?*

Příklad 1. *Označme vrcholy v grafu K_6 postupně čísly* 1, 2,. . . 6 *a každou hranu* i, j, $i = 1, \ldots, 6$ *ohodnoťme číslem* 1, *pokud je* $(i + j)$ *dává zbytek* 1 *po dělení třemi, číslem* 2, *pokud je* $(i + j)$ *dává zbytek* 2 *po dělení třemi a konečně číslem* 3, *pokud je* $(i + j)$ *dělitelné třemi. Kolik existuje různých minimálních koster v tomto grafu?*

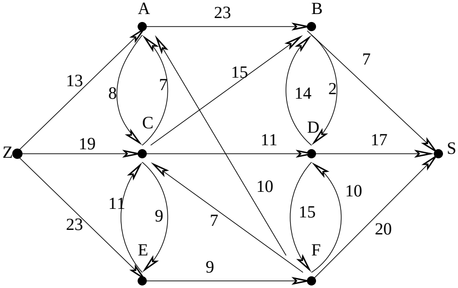
Řešení. 16. □

Příklad 2. *Označme vrcholy v grafu K_6 postupně čísly* 1, 2,...6. *Napište posloupnost hran grafu K_6 tak, jak je bude procházet algoritmus „prohledávání do hloubky", bude-li počátečním vrcholem vrchol* 3 *a hrany ze zpracovávaného vrcholu budeme procházet postupně podle velikosti druhého koncového vrcholu hrany (od nejmenšího).*

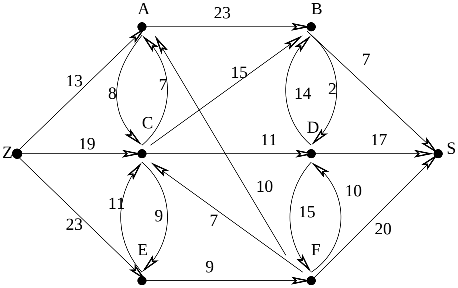
Příklad 2. *Označme vrcholy v grafu K_6 postupně čísly* 1, 2,. . . 6. *Napište posloupnost hran grafu K_6 tak, jak je bude procházet algoritmus „prohledávání do hloubky“, bude-li počátečním vrcholem vrchol* 3 *a hrany ze zpracovávaného vrcholu budeme procházet postupně podle velikosti druhého koncového vrcholu hrany (od nejmenšího).*

Řešení. $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(6,1)$, $(6,2)$, $(6,4)$, $(6,5)$, $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,4)$, $(4,1)$, $(4,2)$, $(2,1)$. $\square$

Příklad 3. *Určete maximální tok a jemu odpovídající minimální řez v následujícím ohodnoceném orientovaném grafu:*



Příklad 3. *Určete maximální tok a jemu odpovídající minimální řez v následujícím ohodnoceném orientovaném grafu:*



Řešení. Řez je dán množinou $\{F, S, D\}$, hodnota je 29. □

Příklad 1. *Označme vrcholy v grafu K_6 postupně čísly* 1, 2,. . . 5 *a každou hranu* i, j, $i = 1, \ldots, 6$ *ohodnoťme číslem* 1, *pokud je* $(i + j)$ *dává zbytek* 1 *po dělení třemi, číslem* 2, *pokud je* $(i + j)$ *dává zbytek* 2 *po dělení třemi a konečně číslem* 3, *pokud je* $(i + j)$ *dělitelné třemi. Kolik existuje různých maximálních koster v tomto grafu?*

Příklad 1. *Označme vrcholy v grafu K_6 postupně čísly* 1, 2,. . . 5 *a každou hranu* i, j, $i = 1, \dots, 6$ *ohodnoťme číslem* 1, *pokud je* $(i + j)$ *dává zbytek* 1 *po dělení třemi, číslem* 2, *pokud je* $(i + j)$ *dává zbytek* 2 *po dělení třemi a konečně číslem* 3, *pokud je* $(i + j)$ *dělitelné třemi. Kolik existuje různých maximálních koster v tomto grafu?*

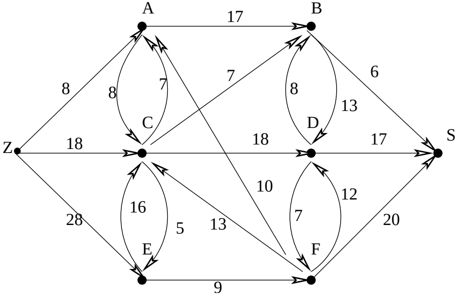
Řešení. 16. □

Příklad 2. *Označme vrcholy v grafu K_6 postupně čísly* 1, 2,. . . 6. *Napište posloupnost hran grafu K_6 tak, jak je bude procházet algoritmus „prohledávání do šířky", bude-li počátečním vrcholem vrchol* 3 *a hrany ze zpracovávaného vrcholu budeme procházet postupně podle velikosti druhého koncového vrcholu hrany (od nejmenšího).*

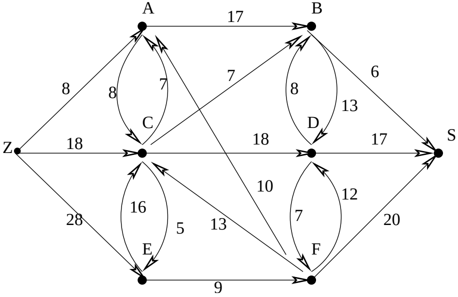
Příklad 2. *Označme vrcholy v grafu K_6 postupně čísly* 1, 2,. . . 6. *Napište posloupnost hran grafu K_6 tak, jak je bude procházet algoritmus „prohledávání do šířky", bude-li počátečním vrcholem vrchol* 3 *a hrany ze zpracovávaného vrcholu budeme procházet postupně podle velikosti druhého koncového vrcholu hrany (od nejmenšího).*

Řešení. $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(1,2)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $\ldots(5,6)$. □

Příklad 3. *Určete maximální tok a jemu odpovídající minimální řez v následujícím ohodnoceném orientovaném grafu:*

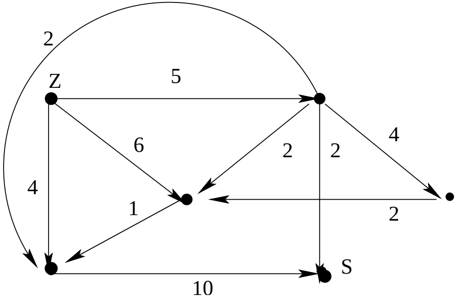


Příklad 3. *Určete maximální tok a jemu odpovídající minimální řez v následujícím ohodnoceném orientovaném grafu:*

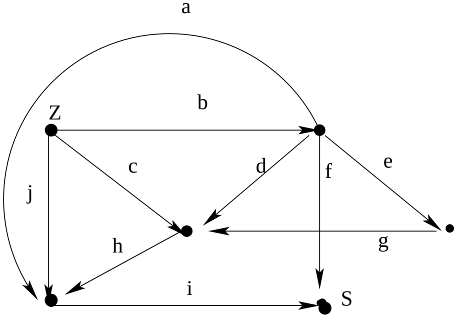


Řešení. Min. řez. dán množinou $\{F, S\}$, jeho hodnota je 39. □

Příklad 1. *Řezem v síti (V, E, z, s, w) můžeme také rozumět množinu hran $C \subset S$ takovou, že v síti $(V, E \setminus C, z, s, w)$ neexistuje žádná cesta ze zdroje z do stoku (cíle, spotřebiče) s, ale pokud z C odebereme libovolnou hranu e, tak už nová množina tuto vlastnost mít nebude, tedy v $(V, E \setminus C \cup e, z, s, w)$ existuje cesta ze z do s. Určete všechny tyto řezy (a jejich hodnoty) v následující síti:*



Řešení. Označíme-li hrany dle obrázku



pak jsou řezy následující: {f,i},{f,h,j,a},{f,j,c,a,d,e},{f,j,c,a,d,f}, {b,j,c},{b,j,h},{b,i}, jejich hodnoty jsou pak 12, 9, 20, 18, 15, 10, 15. □

Příklad 2. *Najděte maximální tok v síti z příkladu 1 pomocí Fordova-Fulkersonova algoritmu.*

Příklad 2. *Najděte maximální tok v síti z příkladu 1 pomocí Fordova-Fulkersonova algoritmu.*

Řešení. Hodnota je 9, $(f(a) = 2, f(b) = 4, f(c) = 1, f(h) = 1, f(j) = 4, f(f) = 2, f(i) = 7$, jinak nuly), není určen jednoznačně. $\square$

Příklad 3. *Rozhodněte zda platí (při definici řezu z příkladu 1):*

a) *Minimální řez v libovolné síti je právě jeden.*
b) *Počet řezů v síti je roven počtu cest ze zdroje do stoku.*
c) *Řezů je v síti alespoň tolik, co různých cest ze zdroje do stoku.*
d) *Řezů v síti může být jak více tak méně než cest ze zdroje do stoku.*

Příklad 3. *Rozhodněte zda platí (při definici řezu z příkladu 1):*

a) *Minimální řez v libovolné síti je právě jeden.*
b) *Počet řezů v síti je roven počtu cest ze zdroje do stoku.*
c) *Řezů je v síti alespoň tolik, co různých cest ze zdroje do stoku.*
d) *Řezů v síti může být jak více tak méně než cest ze zdroje do stoku.*

Řešení.

a) Ne. (třeba zdroj a stok jsou propojeny právě dvěma neprotínajícími se cestami se stejnou propustností)
b) Ne. (viz graf z př. 1)
c) Ano. (důkaz např. indukcí vzhledem k počtu vrcholů)
d) Ne.

□

Floydův algoritmus na výpočet nejkratších cest

Zlepšení algoritmu počítající matici vzdáleností v grafu.
Idea: počítáme postupně matice U_0, $U_1,\ldots$, U_k, které udávají nejkratší vzdálenosti vrcholů po cestách, které prochází pouze vrcholy $1,\ldots,k$, tedy $u_k(i,j)$ je délka nekratší cesty mezi vrcholy i a j, která jde pouze přes vrcholy $1,\ldots,k$.

Nechť D je matice délek hran v grafu o n vrcholech. Následující algoritmus z ní spočítá matici vzdáleností.

Algoritmus:

```
for k to n do
  for i to n do
    for j to n do
      if D(i,j) > D(i,k) + D(k,j) then
           D(i,j) := D(i,k) + D(k,j);
    od;
  od;
od;
```