# Drsná matematika III – 14. demonstrovaná cvičení
# Vytvořující funkce

Martin Panák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

19.12. 2006

**Příklad 1.** *Uvažujme hru nim dvou hráčů s jednou hromádkou s devíti sirkami: hráči se střídají v tazích, tah je odebrání jedné až tří sirek. Kdo nemůže odebrat žádnou sirku prohrává. Vyjádřete tuto hru ve tvaru acyklického grafu a spočítejte Spragueovu-Grundyovu hodnotu všech jeho vrcholů. Pro kterého hráče existuje výherní strategie?*

**Příklad 2.** *Uvažujme hru nim se dvěma hromádkami, jedna s čtyřmi, jedna se šesti sirkami. Opět můžeme odebírat jeden až tři sirky. Vyjádřete tuto hru ve tvaru acyklického grafu a spočítejte Spragueovu-Grundyovu hodnotu všech jeho vrcholů. Využijte toho, že tato hra je součtem dvou her. Pro kterého hráče existuje výherní strategie?*

**Příklad 3.** *Uvažme následující hru dvou hráčů: na tabuli jsou napsána přirozená čísla od jedné do deseti. Hráči se střídají v tazích, tah spočívá ve smazání nějakého čísla na tabuli a také všech jeho dělitelů. Vyjádřete tuto hru ve tvaru acyklického grafu a spočítejte Spragueovu-Grundyovu hodnotu všech jeho vrcholů. Pro kterého hráče existuje výherní strategie?*

**Příklad 1.** *Určete minima a maxima funkce* $x^2 + y + z$ *na křivce v* $\mathbb{R}^3$: $x + y + z = 0$, $x^2 - y^2 + z^2 = 0$.

**Příklad 2.** *Určete objem tělesa omezeného elipsoidem* $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ *a poloprostorem obsahujícím bod* $[1, 3, 5]$ *a ohraničeném rovinou* $x + y + z = 1$.

**Příklad 3.** *Nakreslete nějaký graf o sedmi vrcholech, který má právě šest koster. Kolik je těchto koster až na izomorfismus?*

**Příklad 4.** *Nestandardní úloha vyžadující nápad?*

**Příklad 5.** *Dokažte, že pokud Dijkstrův algoritmus běží z vrcholu a na grafu* $G = (V, H)$ *s ohodnocením* $w : H \to \mathbb{R}^+$, *tak libovolnou hranu stačí testovat pouze jednou (tj. je-li* $U : V \to \mathbb{R}$ *funkce udávající aktuální minimální vzdálenost od vrcholu a po dosud objevených cestách, tak pokud otestujeme nejprve podmínku* $U(x) + w(x, y) \leq U(y)$ *v aktivním vrcholu* $x$, *tak potom již nemusíme testovat podmínku* $U(y) + w(y, x) \leq U(x)$ *v momentě, kdy bude aktivním vrcholem* $y$*).*

Určete počet slov $s(n)$ délky $2n$ v bezkontextové gramatice

$$\begin{aligned} a &\rightarrow N|ab \\ b &\rightarrow LaP \end{aligned}$$

**Řešení**. Označme $s$ vytvořující funkci posloupnosti udávající počet slov vzniklých z neterminálu $a$, dále $t$ vytvořující funkci posloupnosti udávající počet slov vzniklých z neterminálu $b$. Rozborem prvního pravidla gramatiky dostáváme:

$$\begin{aligned} s &= st + 1 \\ t &= x^2 s \end{aligned}$$

Dosadíme a vyřešíme: