Drsná matematika III – 4. demonstrovaná cvičení
Vázané extrémy

Martin Panák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

17.10. 2006

1. Domácí úlohy z minulého týdne
   - Příklad 1
   - Příklad 2
   - Příklad 3

2. Návodné úlohy
   - Rovnice se separovanými proměnnými
   - Model změny teploty
   - Růst bakterií

Určete povrch části válce $x^2 + z^2 = 16$, který leží uvnitř válce $x^2 + y^2 = 16$.

Určete povrch části válce $x^2 + z^2 = 16$, který leží uvnitř válce $x^2 + y^2 = 16$.

Řešení.

$$S = 8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = 128.$$

$\square$

Určete objem části prostoru ležící uvnitř válce $x^2 + y^2 = 4$ a ohraničené rovinami $z = 0$ a $z = x + y + 2$.

Řešení. Těleso rozdělíme na dvě části, ležící nad, respektive pod rovinou $z = 0$, jejich objemy označíme V_1, resp. V_2. Dále si všimněme, že částí tělesa o objemu V_1 je i jehlan s vrholy $[0,0,0],[0,0,2],[-2,0,0],[0,-2,0]$. Část tělesa ležící nad rovinou $z = 0$ tedy rozdělíme ještě na dvě části, jejichž objem spočítáme zvlášť.

Řešení. Těleso rozdělíme na dvě části, ležící nad, respektive pod rovinou $z = 0$, jejich objemy označíme V_1, resp. V_2. Dále si všimněme, že částí tělesa o objemu V_1 je i jehlan s vrholy $[0, 0, 0], [0, 0, 2], [-2, 0, 0], [0, -2, 0]$. Část tělesa ležící nad rovinou $z = 0$ tedy rozdělíme ještě na dvě části, jejichž objem spočítáme zvlášť.

$$\begin{aligned} V_1 - V_{\text{jehlan}} &= \int_{-\pi/2}^{\pi} \int_0^2 r^2(\sin(\phi) + \cos(\phi)) + 2r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi = 6\pi + \frac{16}{3}, \\ V_{\text{jehlan}} &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Řešení. Těleso rozdělíme na dvě části, ležící nad, respektive pod rovinou $z = 0$, jejich objemy označíme V_1, resp. V_2. Dále si všimněme, že částí tělesa o objemu V_1 je i jehlan s vrholy $[0,0,0], [0,0,2], [-2,0,0], [0,-2,0]$. Část tělesa ležící nad rovinou $z = 0$ tedy rozdělíme ještě na dvě části, jejichž objem spočítáme zvlášť.

$$\begin{aligned} V_1 - V_{\text{jehlan}} &= \int_{-\pi/2}^{\pi} \int_0^2 r^2(\sin(\phi) + \cos(\phi)) + 2r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi = 6\pi + \frac{16}{3}, \\ V_{\text{jehlan}} &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Dále

$$V_1 - V_2 = \int_{-\pi} \pi \int_0^2 r^2(\sin(\phi) + \cos(\phi)) + 2r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi = 8\pi,$$

tedy $V_1 + V_2 = 4\pi + \frac{40}{3}$. $\square$

Určete objem a souřadnice těžiště kužele o kruhové podstavě s poloměrem r a výšce h.

Řešení. Otočíme-li kužel vrcholem dolů a ten umístíme do počátku souřadnic, pak ve válcových souřadnicích:

Řešení. Otočíme-li kužel vrcholem dolů a ten umístíme do počátku souřadnic, pak ve válcových souřadnicích:

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r}\int_{\frac{h}{r}\rho}^{h} \rho \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{3}\pi h r^2.$$

Řešení. Otočíme-li kužel vrcholem dolů a ten umístíme do počátku souřadnic, pak ve válcových souřadnicích:

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^h \rho \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi = \frac{1}{3}\pi h r^2.$$

Těžiště zjevně leží na ose z. Pro z-tovou souřadnici pak máme

$$z = \frac{1}{V}\int_{\text{kužel}} z dV = \frac{1}{V}\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^h z\rho \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi = \frac{3}{4}h.$$

Těžiště tedy leží ve výšce $\frac{1}{4}h$ nad středem podstavy kužele. □

1. Domácí úlohy z minulého týdne
   - Příklad 1
   - Příklad 2
   - Příklad 3

2. Návodné úlohy
   - Rovnice se separovanými proměnnými
   - Model změny teploty
   - Růst bakterií

Vyřešte rovnici

$$y' + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)}.$$

Vyřešte rovnici

$$y' + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)}.$$

Vyřešte rovnici

$$y' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}.$$

Rychlost změny telploty tělesa je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a prostředí, které jej obklopuje. Uvařili jsme šálek zeleného čaje (o teplotě $80^\circ\ C$). Teplota čaje klesla v místnosti o teplotě $20^\circ\ C$ za pět minut na $60^\circ\ C$. Za jak dlouho klesne teplota čaje na $40^\circ\ C$.

Tempo růstu počtu bakterií v dané kultuře je přímo úměrné počtu bakterií v této kultuře. Určete funkci popisující množství bakterií v dané kultuře.