Příklad 1. *Rozhodněte, zda funkce* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2y$ *nabývá extrémů na ploše* $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. *Pokud ano, tak tyto extrémy nalezněte a určete o jaké extrémy se jedná.*

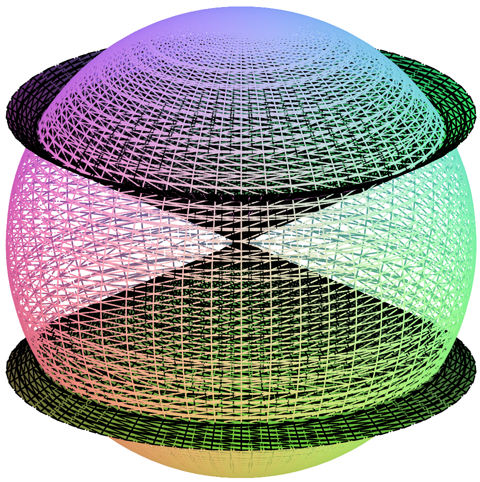
Řešení. Protože vyšetřujeme extrémy spojité funkce na kompaktní množině (elipsoidu) – je to uzavřená a omezená množina v $\mathbb{R}^n$ – musí na něm daná funkce nabývat jak minima, tak maxima. Navíc, protože vazební podmínka je dána spojitě diferencovatelnou funkcí a zkoumaná funce je diferencovatelná, extrémy musí nastat ve stacionárních bodech vyšetřované funkce na dané množině. Pro stacionární body sestavíme soustavu:

$$\begin{aligned} 2xy &= 4kx \\ x^2 &= 4ky \\ 0 &= 2kz \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou body $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0)$ a $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0)$. Funkce nabývá pouze dvou funkčních hodnot v těchto čtyřech stacionárních bodech. Z výše uvedeného vyplývá, že první dva uvedené stacionární body jsou maxima dané funkce na uvedeném elipsoidu a druhé dva potom minima. □

Příklad 2. *Určete objem tělesa v* $\mathbb{R}^3$, *které je dáno nerovnostmi* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $3x^2 + 3y^2 \geq z^2$, $x \geq 0$.

Řešení.



Objem spočítáme asi nejlépe jako rozdíl objemu poloviny koule a poloviny kulové výseče dané zadaným kuželem (všimněme si, že objem tělesa se nezmění, nahradíme-li podmínku $x \geq 0$ podmínkou $z \geq 0$ – výseč řežeme buď „vodorovně“ nebo „svisle“, ale vždy napolovic) Budeme počítat ve sférických souřadnicích.

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi)\sin(\psi) \\ y &= r\sin(\varphi)\sin(\psi) \\ z &= r\cos(\psi) \end{aligned}$$

Zadané zobrazení má Jakobián $r^2 \sin(\psi)$.

$$V = \frac{2}{3}\pi - \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 \sin\psi \,\mathrm{d}\psi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Mohli bychom též počítat objem přímo:

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^1\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} r^2 \sin\psi \,\mathrm{d}\psi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Ve válcových souřadnicích

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned}$$

s Jakobiánem této transformace r, vypadá výpočet objemu jako rozdílu objemu koule a kulové výseče následovně:

$$V = \frac{2}{3}\pi - \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^1 r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Všimněme si, že ve válcových souřadnicích nemůžeme spočítat objem tělesa přímo, musíme ho rozdělit na dvě tělesa daná navíc omezením $r \le \frac{1}{2}$, resp. $r \ge \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} V = V_1 + V_2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\sqrt{3}r} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

□

Další alternativou by byl výpočet objemu jako objemu rotačního tělesa, opět bychom těleso rozdělili na stejné dvě části jako v předchozím případě a to na část „pod kuželem“ a část „pod sférou“. Tyto části však nejsou přímo rotačními tělesy, které dostaneme rotací podle některé z os. Objem první z nich spočítáme jako rozdíl objemu válce $x^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$, $0 \le z \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ a části kužele $3x^2 + 3y^2 \le z^2$, $0 \le z \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, objem druhé pak jako rozdíl objemu rotačního tělesa vzniklého rotací části oblouku $y = \sqrt{(1 - x^2)}$, $\frac{1}{2} \le x \le 1$ kolem osy z a válce $x^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$, $0 \le z \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned} V = V_1 + V_2 &= \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi\sqrt{3}}{24}\right) + \left(\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1 - r^2)\,\mathrm{d}r - \frac{\pi\sqrt{3}}{8}\right) \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Příklad 3. *Uvažme následující hru dvou hráčů: na tabuli jsou napsána čísla 3,4,6,8. Hráči se střídají na tahu. Tah spočívá ve smazání čísla a všech jeho násobků. Nakreslete graf této hry, určete hodnotu Spragueovy-Grundyovy funkce všech vrcholů tohoto grafu a rozhodněte, za kterého hráče existuje vyhrávající strategie.*

Řešení. Výhra za druhého hráče. □

Příklad 4.

a) *Dokažte nebo vyvraťte: sjednocení (případně i nekonečně mnoha) uzavřených podmnožin v $\mathbb{R}^n$ je uzavřená podmnožina v $\mathbb{R}^n$.*

b) *Určte počet různých koster grafu K_6.*

c) *Napište Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy + x$ v bodě $(1, 1)$.*

Řešení.

a) Tvrzení neplatí. Jako protipříklad uvažme následující sjednocení uzavřených podmnožin v $\mathbb{R}$:

$$\bigcap_{i=3}^{\infty} \langle \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i} \rangle = (0, 1),$$

které je rovno otevřené podmnožině $(0, 1)$ v $\mathbb{R}$.

b) 6^4.

c) $xy + x$. (Taylorův rozvoj polynomu je polynom samotný).

$\square$