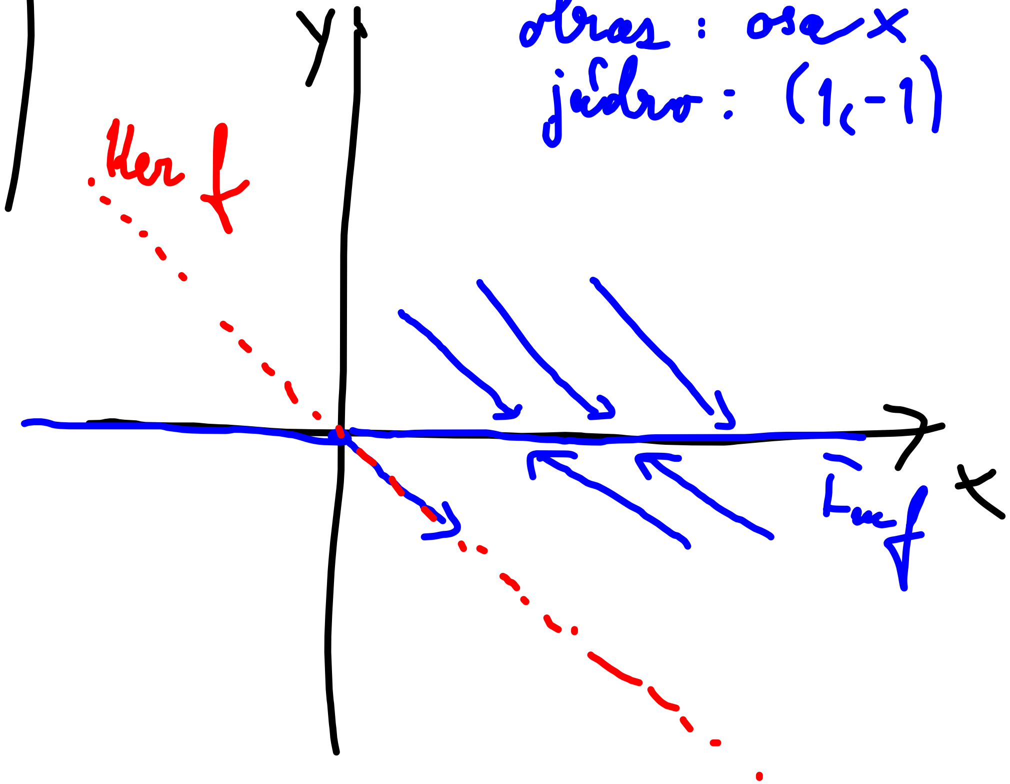
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

f: projekce na osu x podle vektoru $(1,-1)$

obraz: osa x

jádro: $(1,-1)$



f prosté $\iff \operatorname{Ker} f = \vec{o}$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f: V \to V$ $\quad$ v vlastní vektor f, $v \neq \vec{o}$

$f(v) = \lambda \cdot v$, $\quad \lambda \in \mathbb{F}$ $\quad$ λ vlastní hodnota f

$$Av = \lambda \cdot v$$

$$Av - \lambda \cdot v = 0$$

$$Av - \lambda E \cdot v = |A - \lambda E| v = 0$$

Pokud tato soustava má netriviální řešení, pak

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} - \lambda & 0 & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 - \lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-3\lambda & 0 & 4 \\ 2 & 3-3\lambda & -2 \\ 2 & 0 & 1-3\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-s & 0 & 4 \\ 2 & 3-s & -2 \\ 2 & 0 & 1-s \end{vmatrix} =$$

$$s = 3\lambda$$

$$= (-1-s)(3-s)(1-s) - 8(3-s) =$$

$$= (s^2-1)(3-s) - 24 + 8s =$$

$$= 3s^2 - s^3 - 3 + s - 24 + 8s = -s^3 + 3s^2 + 9s - 27 =$$

	-1	3	9	-27
3	-1	0	9	0

$$= (s-3)(-s^2+9) =$$

$$= (s-3)(3-s)(3+s)$$

$$\left.\begin{aligned} s_{1,2} &= 3 \\ s_3 &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 1 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

Vlastní vektory odpovídající vl. číslu 1:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3$$

Řešením je prostor $\langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle = \{ (t,s,t) \mid t,s \in \mathbb{R} \}$

Vlast. vektory odpovídající č. -1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 \end{array}$$

Řešením je prostor $\langle (-2,1,1) \rangle = \{ (-2t, t, t), t \in \mathbb{R} \}$

$$\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}2-\lambda&1\\0&2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2$$

Vlastní vektory příslušné číslu 2:

$$\begin{pmatrix}2-2&1\\0&2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0 \sim \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} =$$

$= x_2 = 0 \Rightarrow$ vlastní vektory $\langle(1,0)\rangle = \{(l,0) \mid l \in \mathbb{R}\}$

Hledáme ortogonální bázi $\{f_1, f_2, f_3\}$ prostoru V

$l_1 = (0,1,1,1)$
$l_2 = (1,2,1,1)$
$l_3 = (2,1,1,1)$

1, za f_1 volíme $(0,1,1,1)$.

2, f_2 volíme jako lin. kombinaci

$f_2 = l_2 + a \cdot f_1 \, . \quad a \in R$

a určíme tak, aby $f_2 \perp f_1$, neboli $(f_1, f_2) = 0$

$$0 = (f_2, f_1) = (l_2, f_1) + a(f_1, f_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = -\frac{(l_2, f_1)}{(f_1, f_1)} = -\frac{4}{3}$$

$$f_2 = (1,2,1,1) + \left(-\tfrac{4}{3}\right) \cdot (0,1,1,1) = \left(1, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)$$

volme $f_2 = (3,2,-1,-1)$ $\quad \left((3,2,-1,-1) \cdot (0,1,1,1) = 2 \cdot 1 - 1 - 1 = 0 \right)$

3, volíme $f_3 = e_3 + a\cdot f_1 + b\cdot f_2 \qquad /(\cdot, f_1)$

$$0 = (f_3, f_1) = (e_3, f_1) + a(f_1, f_1) + b\cdot \underbrace{(f_2, f_1)}_{0}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{(e_3, f_1)}{(f_1, f_1)} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$b = -\frac{(e_3, f_2)}{(f_2, f_2)} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$$

$$f_3' = (2,1,1,1) - (0,1,1,1) - \frac{2}{5}(3,2,-1,-1) =$$

$$= \left(\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

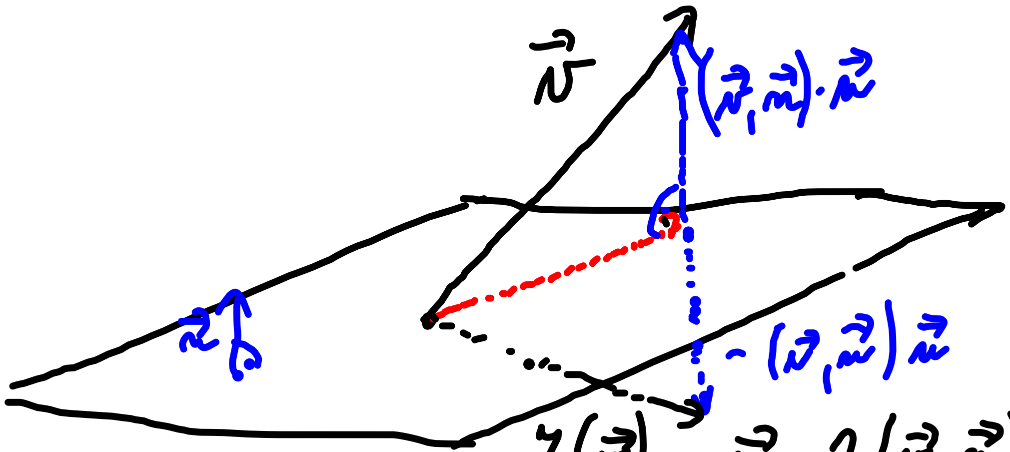
$$f_3 = (2,-2,1,1)$$

Báze (f_1, f_2, f_3) je ortogonální bází V, báze

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{15}}(3,2,-1,-1),\ \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-2,1,1)\right)$$

je pak ortonormální.

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$$



$$Z(\vec{v}) = \vec{v} - 2(\vec{v},\vec{n})\cdot\vec{n}$$

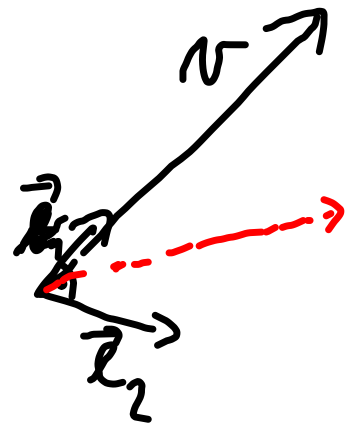
$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto \underbrace{(x_1,x_2,x_3)}_{\vec{v}} - 2\cdot\underbrace{\frac{1}{6}(x_1+2x_2+x_3)(1,2,1)}_{(\vec{v},\vec{n})\cdot\vec{n}} =$$

$$(x_1, x_2, x_3) + \left(-\tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3,\ -\tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}x_3,\ -\tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3\right) =$$

$$= \left(\tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3,\ -\tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}x_3,\ -\tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{2}{3}x_3\right)$$

Tedy matice dané projekce je

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



Kolmý průmět v do $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ je

$$(\vec{v}, \vec{e}_1)\cdot \vec{e}_1 + (\vec{v}, \vec{e}_2)\cdot \vec{e}_2$$

$V_1 \cap V_2$:

$$\underbrace{a\cdot(0,1,-1,1)+b(1,2,0,1)+c(1,1,1,0)}_{\in V_1} = \underbrace{d\cdot(1,1,1,1)+e(0,2,1,0)}_{\in V_2}$$

$a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$

Tedy řešíme soustavy

$$b+c-d=0 \Rightarrow b+c-a-b = c-a = 0 \Rightarrow c=a$$

$$a+2b+c-d-2e=0 \Rightarrow a+2b+c-a-b-2c+2b+4a = \%$$

$$-a+c-d-e=0 \Rightarrow e = -a+c-d = -a+c-a-b = $$

$$a+b-d=0 \Rightarrow d=a+b \qquad = c-b-2a$$

$$\%\ 4a+3b-c=0 \Rightarrow 3a+3b=0 \Rightarrow a=-b=c$$

průnik: $\{t(0,1,-1,1)-t(1,2,0,1)+t\cdot(1,1,1,0) \mid t\in\mathbb{R}\} = \{\vec{o}\}$

Tedy průnikem je nulový vektor. Zároveň vidíme, že generátory V_1 byly lineárně závislé.