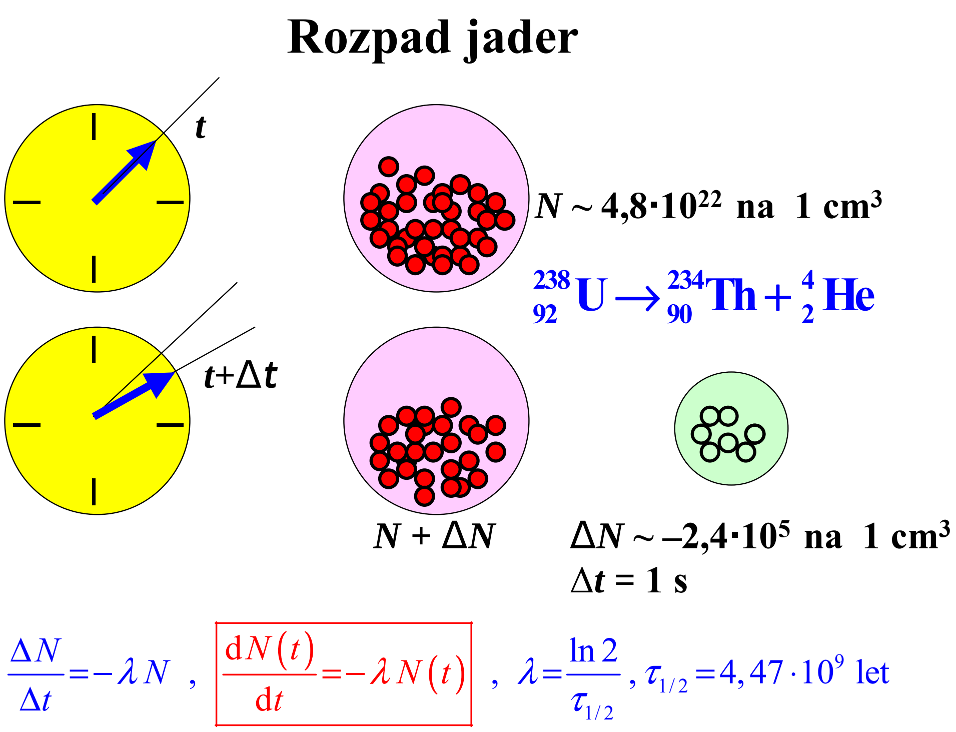
Matematika pro radiologické asistenty

1. Základní pojmy

1.1 Úvod

Fyzika jako exaktní věda má svůj jazyk – matematiku. Ve Feynmanově knize Feynman’s Tips on Physics se o tom píše: „Matematika je překrásný předmět, má své vstupy a výstupy, ale my se snažíme zjistit, co obsahuje to minimum, které musíme znát *pro potřeby fyziky*. Přístup, který teď zvolím se neohlíží na matematiku a sleduje pouhou účelnost. Nepokouším se pronikat do matematiky. Nejdřív se musíme naučit derivovat tak, jako když počítáme 3 krát 5 nebo 5 krát 7…..“ No dobře, Feynman mluví o studentech inženýrství. Jak je tomu tedy s potřebnou matematikou pro studenty bakalářského studia oboru Radiologický asistent? Určitě se dají znalosti matematiky potřebné pro pochopení principů diagnostických nebo terapeutických metod, se kterými se bude v praxi radiologický asistent setkávat hodně redukovat. Ale třeba to zmíněné derivování se objeví mnohokrát, byť v podobně jednoduché formě, jako na ilustračním obrázku.



1.2 Reálná čísla

Počátek představ o množině reálných čísel je v úvahách o operacích sečítání a odečítání přirozených čísel, tj. čísel $1,2,3,\ldots$ Velmi brzo dojdeme k tomu, že abychom zůstali při odečítání v této množině, bylo by třeba zavádět nepohodlná omezení. Množina přirozených čísel byla proto velmi brzo rozšířena o záporná celá čísla a nulu na množinu celých čísel.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & 2 & \cdots \\ \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array}$$

Ale opět při operacích násobení a dělení je možno zůstat v množině celých čísel jen při zavedení nepohodlných omezení. Množina celých čísel byla proto rozšířena na množinu racionálních čísel, tvořenou všemi různými podíly celých čísel (se zákazem nuly ve jmenovateli).

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & -1 & & & & & & 0 & & & & & & 1 & \cdots \\ \cdots & -1 & \cdots & -\frac{3}{4} & \cdots & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{4}{5} & \cdots & 1 & \cdots \end{array}$$

Stále však nemáme všechna reálná čísla. Pokud mají být odmocniny z reálných kladných čísel opět reálná čísla, nemohou být tato čísla pouze racionální, tj. vyjádřitelné ve tvaru zlomku. Vezmeme velmi jednoduchý příklad: druhou odmocninu ze dvou. Platí nerovnosti

$$\begin{array}{ccccc} \frac{17}{12} \doteq 1{,}416666667 & > & \sqrt{2} & > & \frac{41}{29} \doteq 1{,}413793103 \\ \frac{99}{70} \doteq 1{,}414285714 & > & \sqrt{2} & > & \frac{239}{169} \doteq 1{,}414201183 \\ \frac{3363}{2378} \doteq 1{,}414213625 & > & \sqrt{2} & > & \frac{1393}{985} \doteq 1{,}414213198 \end{array}$$

Vidíme, jak se interval ohraničený dvěma zlomky (tj. racionálními čísly) zmenšuje, ale číslo $\sqrt{2}$ zlomkem vyjádřit nejde, říkáme, že je to číslo iracionální. Iracionálními čísly jsou mimo jiné Ludolfovo číslo π (podle Ludolpha van Ceulena), Eulerovo číslo e (podle Lenharda Eulera). Číselná osa (uspořádaná množina reálných čísel $\mathbb{R}$) je tvořena podle velikosti uspořádanými racionálními a iracionálními čísly.

1.3 Eulerovo číslo

Všimněme si hodnot posloupnosti

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

nebo

$$1+\frac{1}{1!},1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!},1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!},\dots,1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!},\dots$$

v následující tabulce

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$
1	2	2
2	2,25	2,5
4	2,441406250	2,708333333
8	2,565784514	2,718278770
16	2,637928497	2,718281828
32	2,676990129	2,718281828
64	2,697344953	2,718281828

Vidíme, že se členy posloupnosti blíží (u první pomaleji, u druhé rychleji) limitní hodnotě. Tato hodnota je iracionální číslo, které je nazýváno Eulerovým číslem (taktéž základem přirozených logaritmů) a značení se e. Přibližné hodnoty dvou základních čísel elementární matematiky jsou

$$\pi \doteq 3,14159265358979323385$$
$$e \doteq 2,71828182845904523354$$

Číslo e je tedy limitní hodnota konečné řady pro $n \to \infty$

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

Faktoriál nuly je definován jako $0!=1$, proto můžeme užít kompaktnějšího zápisu

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

1.4 Mocnina

Základem jsou mocniny s celočíselnými koeficienty. n–tá mocnina je n–krát opakované násobení čísla sebou samým

$$x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n} \quad , \quad x^1=x \quad , \quad x^2=x\cdot x \quad \dots$$

Je hned vidět, že

$$x^{n+1}=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n+1}=x\cdot\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n}=x\cdot x^n$$

Je-li $n=0$, dostáváme

$$x = x \cdot x^0 \quad \Rightarrow \quad x^0 = 1$$

Je-li $n = -1$, dostáváme

$$x^0 = x \cdot x^{-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = x \cdot x^{-1} \quad \Rightarrow \quad x^{-1} = \frac{1}{x}$$

obecně

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Další důležité pravidlo je

$$\left(x^n\right)^k = \underbrace{\underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n}}_{k} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x}_{n \cdot k}$$

tedy

$$\left(x^n\right)^k = x^{nk}$$

Stejnými úvahami odvodíme pravidla

$$\left(x\,y\right)^n = x^n\,y^n \quad , \quad x^{n+k} = x^n\,x^k$$

Velkým zobecněním je zavedení n – té odmocniny jako čísla, pro které platí

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$

Běžně užívané značení je

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad , \quad \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{1}{n}n} = x^1 = x$$

Definiční obor n – té odmocniny není triviální, vždy jsou to však všechna nezáporná reálná čísla. Nyní máme připraveno zobecnění mocnitele na racionální čísla jako

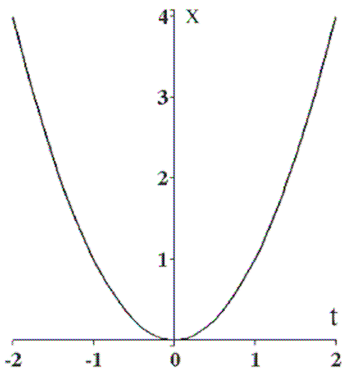
$$x^{\frac{k}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^k = \left(x^k\right)^{\frac{1}{n}}$$

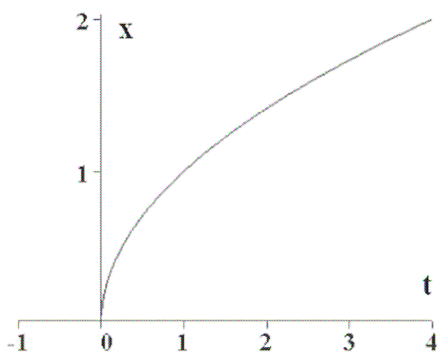
Poslední zobecnění mocnitele je mít na jeho místě libovolné reálné číslo, toto zobecnění může počkat až po definici exponenciální a logaritmické funkce.

2. Funkce, její limita a spojitost

S jistou dávkou matematické nepřesnosti lze říci, že funkce vyjadřuje závislost určité veličiny (závisle proměnné) na veličinách jiných (nezávisle proměnných). Příkladem mohou být již zmíněné závislosti souřadnic částice na čase.

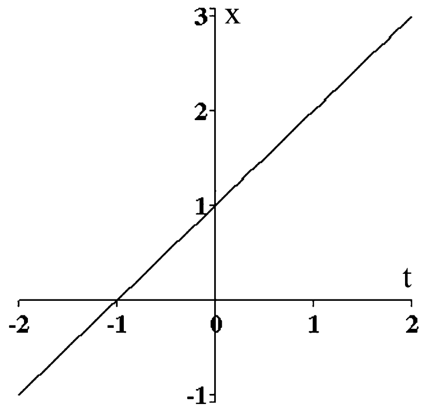
Uvažujme nyní o případu jedné reálné nezávisle proměnné *t* a jedné reálné závisle proměnné *x*. Píšeme $x = f(t)$ a čteme „*x* je funkcí *t*". Symbol *f*, tzv. funkční předpis, určuje pravidlo, kterým jsou hodnotám *t* přiřazeny hodnoty *x*. Někdy píšeme jen $x = x(t)$ (tento zápis bývá ve fyzice častější). Hodnoty, kterých může nabývat proměnná *t*, tvoří definiční obor funkce značený D_f. Obor D_f je buď zadán současně s uvedením pravidla *f*, nebo je automaticky chápán jako množina všech hodnot *t*, pro něž lze podle pravidla *f* vyčíslit hodnotu *x*. Např. pro $x = \sqrt{t}$ musí být $t \geq 0$, neboť záporné hodnoty nelze odmocňovat. Říkáme, že *f* je definována na množině D_f. Hodnoty, jichž bude nabývat proměnná *x*, probíhá-li *t* definiční obor D_f, tvoří obor hodnot funkce, H_f. V rovině souřadnic *t* (vodorovná osa) a *x* (svislá osa) vytvoří body o souřadnicích $[t, f(t)]$ graf funkce, označovaný jako G_f. Na následujících obrázcích jsou čtyři příklady.

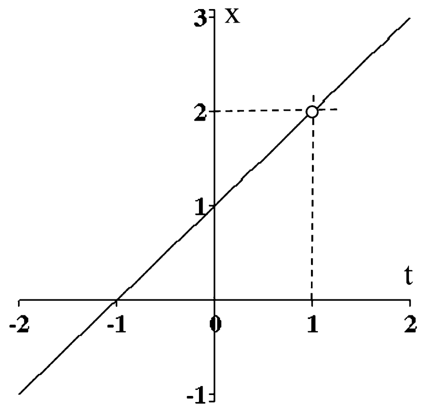




Na prvním obrázku je graf funkce $x = t^2$. Definičním oborem je celá reálná osa $D_f = (-\infty, \infty)$, obor hodnot funkce je $H_f = [0, \infty)$. Na druhém obrázku je graf funkce $x = \sqrt{t}$. Definičním oborem je kladná reálná poloosa $D_f = [0, \infty)$, obor hodnot funkce je $H_f = [0, \infty)$.

Na třetím obrázku (nalevo) je graf funkce $x = t + 1$. Definičním oborem je celá reálná





osa $D_f = (-\infty, \infty)$, obor hodnot funkce je taktéž celá reálná osa $H_f = (-\infty, \infty)$. Na čtvrtém obrázku je graf funkce

$$x = \frac{t^2 - 1}{t - 1}$$

Tato funkce není definována v bodě $t = 1$, je tedy jejím definičním oborem sjednocení intervalů $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ a oborem hodnot $H_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Protože však tato funkce má v bodě $t = 1$ limitu

$$\lim_{t \to 1} \frac{t^2 - 1}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{(t-1)(t+1)}{t - 1} = \lim_{t \to 1} (t + 1) = 2$$

můžeme definovat novou funkci

$$x = \begin{cases} \dfrac{t^2 - 1}{t - 1} & t \neq 1 \\ 2 & t = 1 \end{cases}$$

a tato funkce už má jako definiční obor i obor hodnot celou reálnou osu. Toto je příklad, kdy „dodefinováním“ původní funkce dosáhneme toho, že „nová“ funkce má širší definiční obor, často pak celou reálnou osu

3. Některé elementární funkce

3.1 Polynomy

Funkci

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

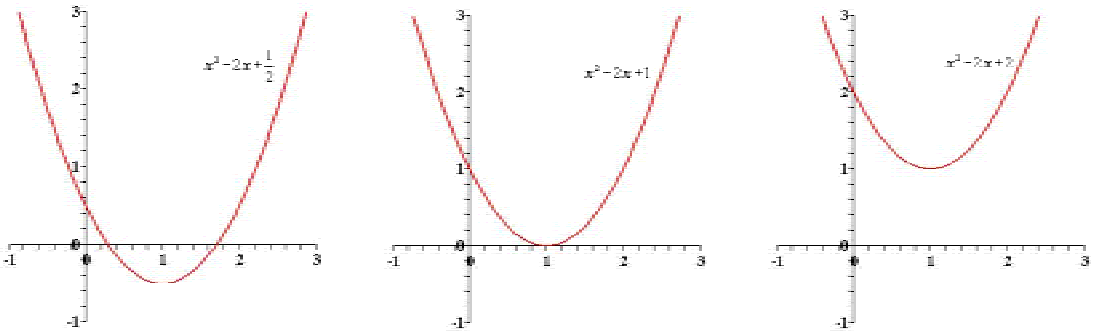
kde koeficienty jsou reálná čísla ($a_0, \dots a_n \in \mathbb{R}$) nazýváme polynomem n-tého stupně (předpokládáme $a_n \neq 0$). Pomocí součtového symbolu zkracujeme zápis na

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, x^k$$

Při tomto zápisu bereme v úvaho, že $x^0 = 1$ pro všechna *x*. Vezměme polynomy nejnižších stupňů (pro vytvoření grafu funkce v rovině *x*-*y* značíme $y = f(x)$)

$$y = a \quad , \quad y = a\,x + b \quad , \quad y = a\,x^2 + b\,x + c$$

Grafem polynomu stupně nula je přímka vedená rovnoběžně s osou *x* ve vzdálenosti *a*, grafem polynomu stupně jedna je přímka se směrnicí *a* (podle předpokladu je *a* jako koeficient u nejvyšší mocniny různý od nuly), která protíná osu *y* v bodě *b* a osu x v bodě $-b/a$. Grafem polynomu stupně dva je parabola, která protíná osu *y* v bodě *c*, protíná osu *x* ve dvou bodech (pokud $b^2 > 4\,a\,c$), dotýká se osy *x* v bodě $-b/(2\,a)$ (pokud $b^2 = 4\,a\,c$) nebo leží celá nad nebo pod osou *x* (pokud $b^2 < 4\,a\,c$). Uvedené tři případy jsou na obrázcích.



Zmíníme se ještě o polynomu, který vzniká z mocniny dvojčlenu

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \dots + \binom{n}{n-1} x\,a^{n-1} + a^n$$

kde

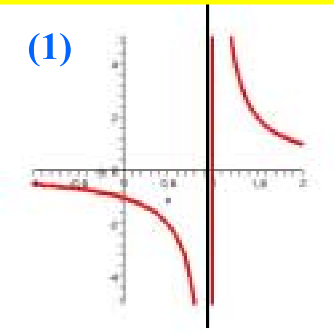
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad , \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad , \quad 0! = 1$$

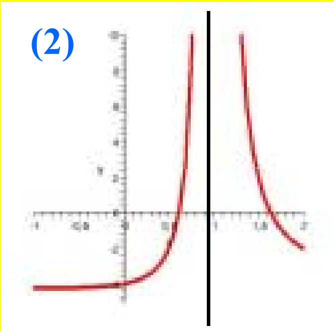
S výrazy typu kombinačního čísla nebo faktoriálu se také setkáme při úvahách o pravděpodobnosti.

3.2 Racionální funkce lomená

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

$n = 0$, $m = 1$ … nepřímá úměra **$y = a\,(x - c)^{-1}$**





(1) $y = \dfrac{1}{x-1}$

(2) $y = \dfrac{-3x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}$

3.3 Exponenciální funkce a logaritmus

Připomeňme, že jsme zapsali Eulerovo číslo jako nekonečnou řadu

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Nyní definujeme exponenciální funkci jako

$$y = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Pro exponenciální funkci se často užívá také označení $\exp(x)$. Při zápisu prvních několika členů řady máme

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Vezměme součin dvou exponenciálních funkcí

$$\exp(x)\exp(y) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots\right) =$$

$$1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2!} + \cdots = \exp(x+y)$$

Toto je velmi důležitá vlastnost: exponenciální funkce součtu je rovna součinu exponenciálních funkcí jednotlivých sčítanců

$$\boxed{\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)} \quad \boxed{\exp(k\,x)=\left[\exp(x)\right]^k}$$

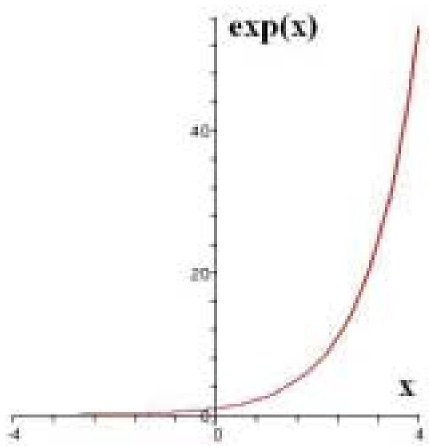
Z definice exponenciální funkce pomocí nekonečné řady plyne $\exp(0)=1$. Dále vidíme, že funkční hodnoty nabývají pouze kladných hodnot. Pro $x>0$ je zřejmé z definice pomocí řady (všechny členy jsou kladné a prvním členem je jednička), že dokonce $x>0 \Rightarrow \exp(x)>1$. Pro $x<0$ vyjdeme ze vztahu

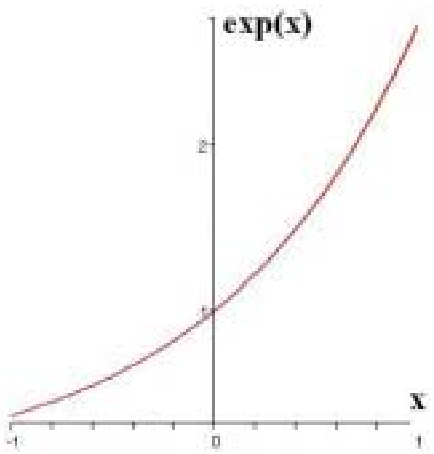
$$\exp(x)\exp(-x)=1 \quad \Rightarrow \quad \exp(x)=\frac{1}{\exp(-x)}>0$$

a protože $-x$ je kladné, je jako v předešlém případě $\exp(-x)$ kladné a větší jak jedna. Rozdíl je v tom, že nyní $x<0 \Rightarrow 0<\exp(x)<1$. Funkce $\exp(x)$ je rostoucí. Pro $y>0$ je

$$\exp(x+y)-\exp(x)=\exp(x)\left[\exp(y)-1\right]>0$$

Graf exponenciální funkce je na obrázku.





Přirozený logaritmus je inversní funkcí k exponenciální funkci. To znamená, že zobrazujeme-li funkcí přirozený logaritmus číslo, které jsme získali zobrazením čísla x exponenciální funkcí, dostaneme opět číslo x, resp. v opačném pořadí zobrazujeme-li exponenciální funkcí číslo, které jsme získali zobrazením čísla x logaritmickou funkcí, dostaneme opět číslo x

$$\ln\left(\exp(x)\right)=x \quad , \quad \exp\left(\ln(x)\right)=x$$

Z definice je zřejmé, že definičním oborem funkce logaritmus jsou nezáporná čísla. Protože $\exp(0)=1$, musí být $\ln(1)=0$. Označíme-li si $x=\exp(\xi)$ a $y=\exp(\eta)$, můžeme psát

$$\ln(x)+\ln(y)=\xi+\eta=\ln\big(\exp(\xi+\eta)\big)=\ln\big(\exp(\xi)\exp(\eta)\big)=\ln(x\,y)$$

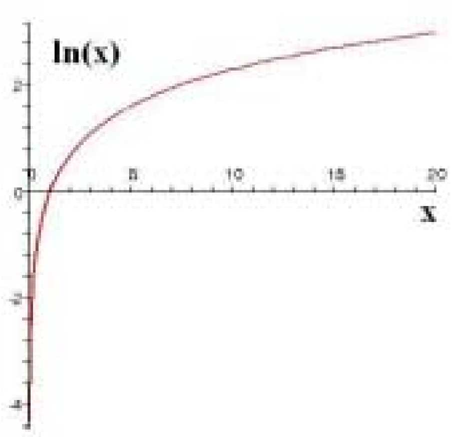
Dostáváme tak důležitý vztah: logaritmus součinu je roven součtu logaritmů jednotlivých součinitelů

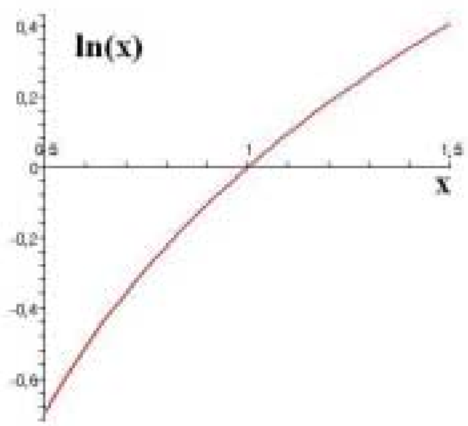
$$\boxed{\ln(x\,y)=\ln(x)+\ln(y)} \quad \boxed{\ln\left(x^k\right)=k\ln(x)}$$

Jak z této vlastnosti plyne (položme $y=1/x$), platí

$$\ln(x)=-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

a logaritmus je rostoucí funkce, pro $x>1$ kladná, pro $0<x<1$ záporná. Graf logaritmické funkce je na obrázku.





Mocninu s libovolným reálným mocnitelem definujeme pomocí vztahu

$$a^x=\left[\exp\big(\ln(a)\big)\right]^x=\exp\big(x\ln(a)\big)$$

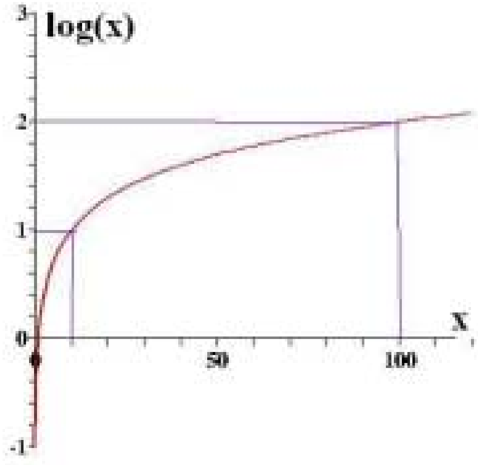
Kromě přirozeného logaritmu lze definovat také logaritmus při libovolném základu pomocí vztahu

$$\log_a\left(a^x\right)=x \quad , \quad a^{\log_a(x)}=x$$

Působení funkce přirozený logaritmus na obě strany druhého výrazu dává

$$\log_a(x)\ln(a)=\ln(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

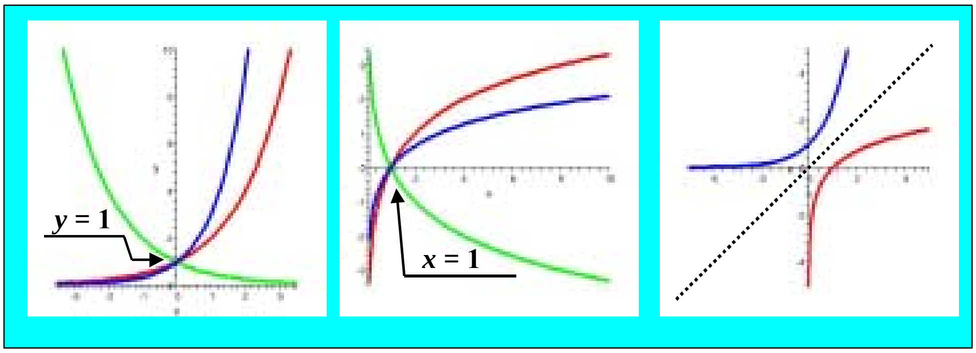
Nejčastěji je užíván dekadický logaritmus (tj. logaritmická funkce se základem $a=10$), mnohdy proto není ani základ zmiňován, mluví se prostě o logaritmu. Graf dekadického logaritmu $\log(x)$ s vyznačením $\log(10)=1$ a $\log(100)=\log\left(10^2\right)=2$ je na obrázku.



Na obrázku je znázorněno několik příkladů umocnění pevného základu na x a odpovídající inverzní operace.

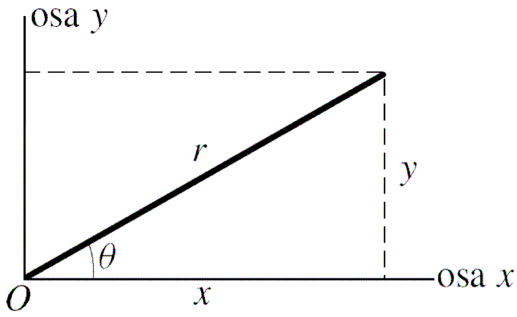
$$y = z^x, \quad x = \log_z y, \quad z > 0, \; z \neq 1$$

$$0{,}5^x, 2^x, 3^x \qquad \log_{0{,}5} x, \log_2 x, \log_3 x \qquad 10^x, \log x$$



3.4 Goniometrické funkce

Vycházíme z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku. Goniometrické funkce jsou pro úhly z intervalu $(0, \pi/2)$ definovány jako poměry stran tohoto trojúhelníku:



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \mathrm{tg}\theta = \frac{y}{x} \quad , \quad \mathrm{cotg}\theta = \frac{x}{y}$$

Je přímo vidět, že

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \mathrm{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\mathrm{tg}\theta}$$

a z Pythagorovy věty

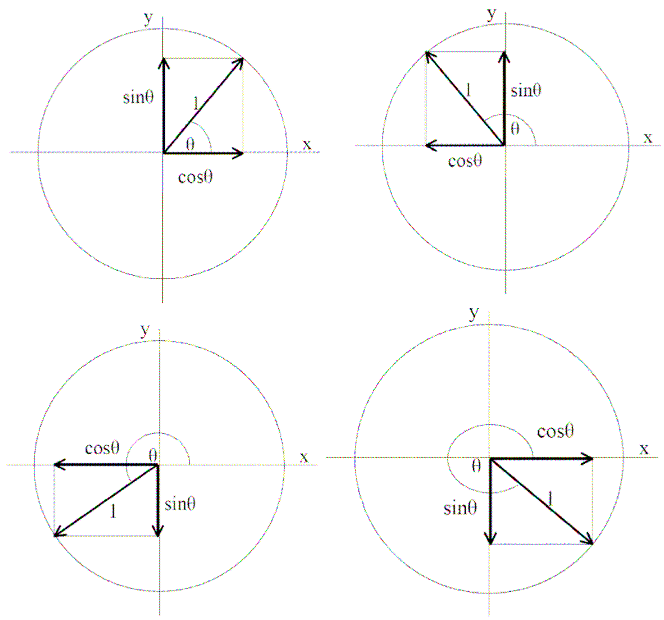
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

V krajních hodnotách intervalu je

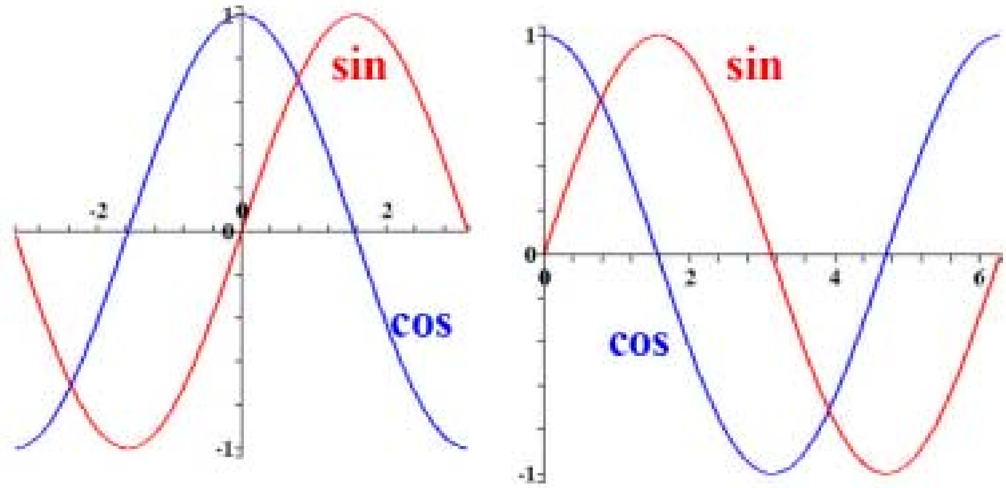
$$\sin 0 = \mathrm{tg} 0 = 0 \quad , \quad \cos 0 = 1 \quad , \quad \mathrm{cotg} 0 = \infty$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \mathrm{cotg}\frac{\pi}{2} = 0 \quad , \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad , \quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$$

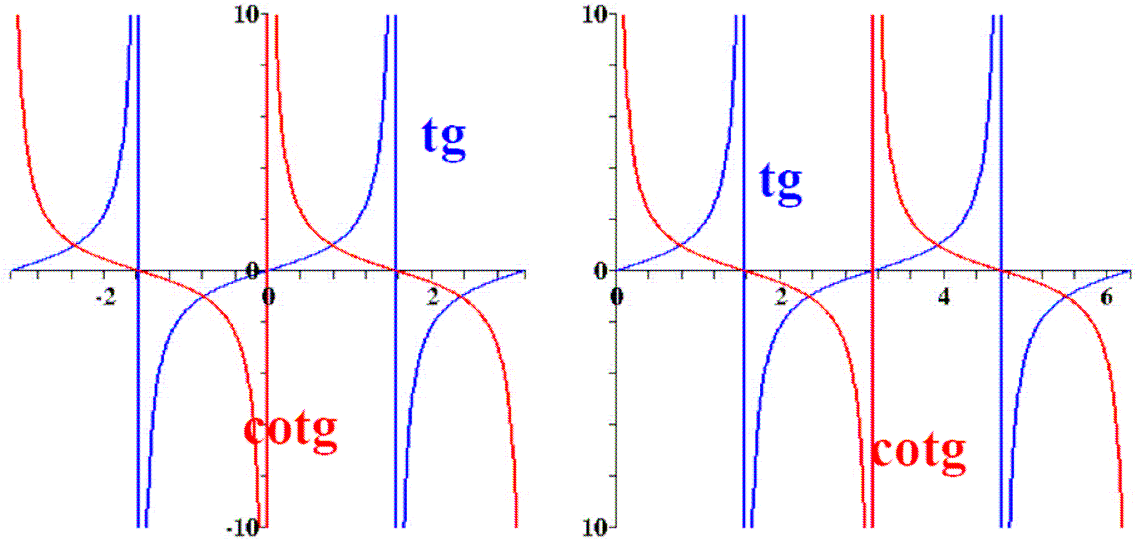
O znaménku funkcí sinus a kosinus ve čtyřech kvadrantech dává představu následující obrázek:



Průběh funkcí sinus a kosinus na intervalech $[-\pi,\pi]$ a $[0,2\pi]$ je na obrázcích:



Na dalších obrázcích je na těchže intervalech zobrazen průběh funkcí tangens a kotangens:



Vzhledem k vlastnostem průmětů průvodičů bodů na jednotkové kružnici a periodě 2π na této kružnici můžeme pro goniometrické funkce psát řadu užitečných vztahů. Pro kosinus tak máme

$$\sin\theta = \sin(2\pi+\theta) = \sin(\pi-\theta) = -\sin(-\theta) = -\sin(\pi+\theta) =$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

a pro kosinus

$$\cos\theta = \cos(2\pi+\theta) = -\cos(\pi-\theta) = \cos(-\theta) = -\cos(\pi+\theta) =$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

Funkce tangens a kotangens jsou periodické s periodou π, takže

$$\mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}(\pi+\theta) = -\,\mathrm{tg}(-\theta)$$
$$\mathrm{cotg}\,\theta = \mathrm{cotg}(\pi+\theta) = -\,\mathrm{cotg}(-\theta)$$

Již jsme uvedli důležitý vztah (všimněte si trochu jiného zápisu druhé mocniny)

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Pro úpravy výrazů s goniometrickými funkcemi jsou nepostradatelné tzv. součtové vzorce. Pro funkce součtu či rozdílu dvou úhlů platí

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Pro součet nebo rozdíl funkcí dvou úhlů pak platí

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad , \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \quad , \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Na obrázku jsou příklady goniometrických funkcí obecného lineárního argumentu $\alpha = a\,x + b$.

$\cos x, \cos(x-\frac{\pi}{3})$ $\qquad$ $\cos x, \cos\frac{x}{2}$ $\qquad$ $\cos x, \cos\frac{x}{2}, \cos 2x$