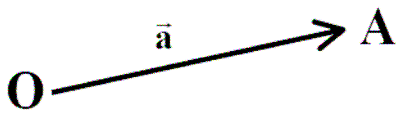
Matematika pro radiologické asistenty

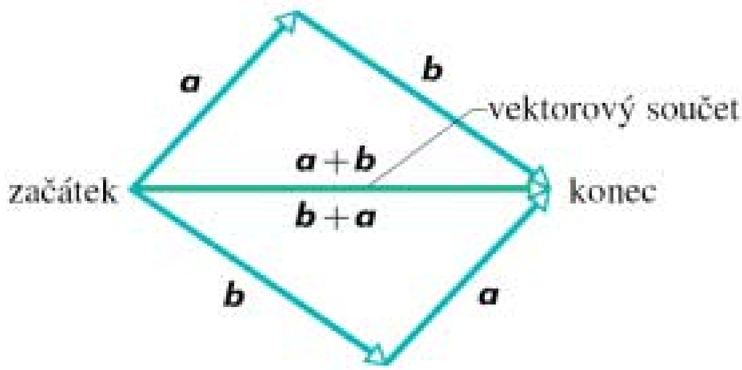
4. Počítání s vektory

(Většina obrázků převzata z učebnice HRW: Fyzika.)

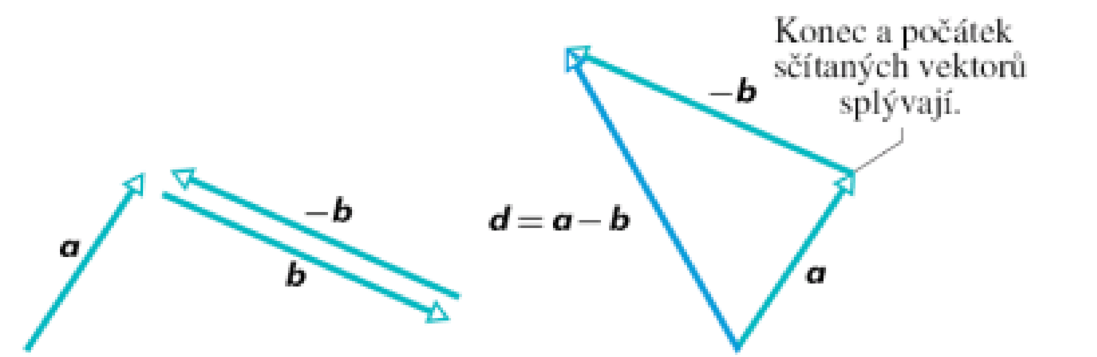
Vektor je zadán směrem a velikostí. Je tedy zobrazen orientovanou úsečkou (vyznačení šipkou).



Vektory můžeme násobit reálnými čísly. Absolutní hodnota násobitele udává, kolikrát se změní délka vektoru, znaménko pak, zůstane-li orientace stejná nebo zda se změní na opačnou. Vektory můžeme sčítat a odečítat (odečtení vektoru $\vec{b}$ od vektoru $\vec{a}$ je totéž jako přičtení vektoru $-\vec{b}$ k vektoru $\vec{a}$. Grafické znázornění je na následujících dvou obrázcích. Všimněme si, že i když budeme uvažovat vektory ve třech rozměrech našeho prostoru, vždy najdeme rovinu (tedy dvourozměrný prostor), ve které leží uvažované dva vektory a obrázky tedy můžeme pohodlně malovat v této rovině. Sečítání vektorů je komutativní (nezáleží na pořadí sčítanců).

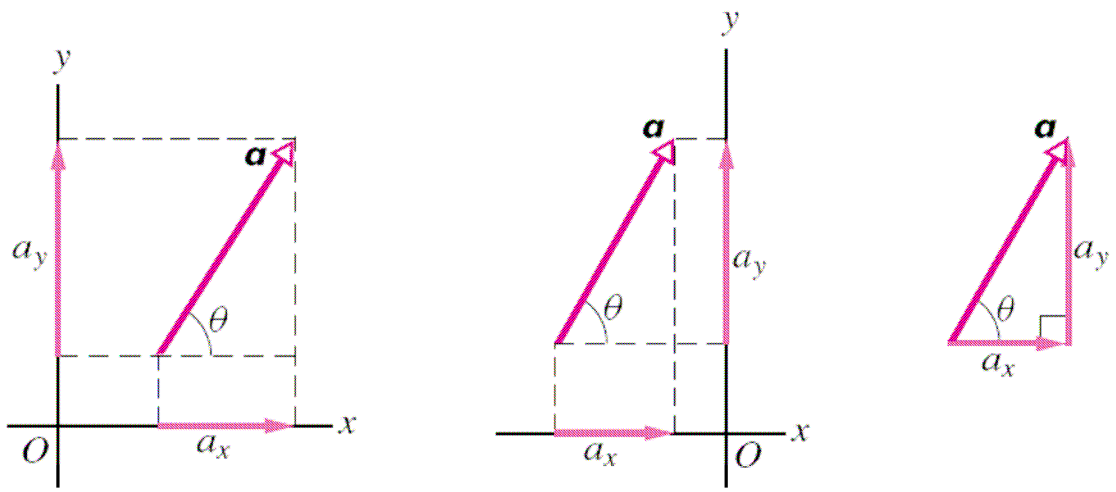


Odečtení vektoru je, jak již bylo řečeno, totéž jako přičtení vektoru opačně orientovaného:



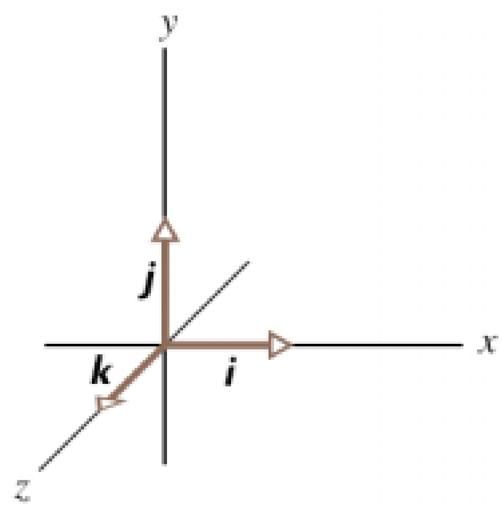
Početně je snadnou cestou rozklad vektorů do složek kartézské soustavy ($a_x = a\cos\theta$, $a_y = a\sin\theta$), takže pro součet vektorů je

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad , \quad c_x = a_x + b_x \quad , \quad c_y = a_y + b_y$$



Ve třech rozměrech značíme tři základní jednotkové vektory (pravotočivé) kartézské soustavy $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a libovolné dva vektory zapíšeme jako

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad , \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$



Běžný způsob zápisu vektoru pomocí jeho složek je

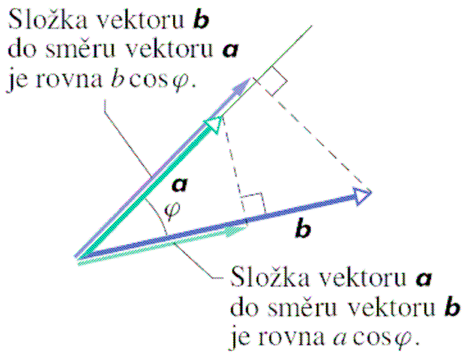
$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

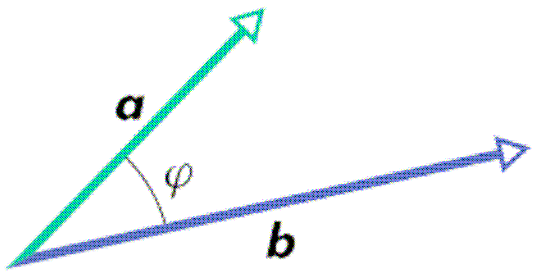
Lineární kombinace vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (první vektor násobíme nějakým reálným číslem α a přičteme k němu druhý násobený číslem β) je opět vektor

$$\vec{c} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} \quad , \quad \vec{c} = \left(\alpha\,a_x + \beta\,b_x, \alpha\,a_y + \beta\,b_y, \alpha\,a_z + \beta\,b_z\right)$$

Při násobení vektorů rozeznáváme dva druhy součinů – skalární a vektorový. Pro skalární součin je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b\cos\varphi$$





Velikost vektoru je podle tohoto vztahu odmocninou ze skalárního součinu vektoru se sebou samým, protože

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \cos 0 = a^2$$

Standardní značení velikosti vektoru $\vec{a}$ je $\left|\vec{a}\right|$. Pouze tam, kde nemůže dojít k záměně (jako v našich vztazích zde), stačí psát jen *a*. Jsou-li dva vektory navzájem kolmé, je jejich skalární součin roven nule, protože

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Pro jednotkové navzájem kolmé vektory kartézské soustavy tak máme

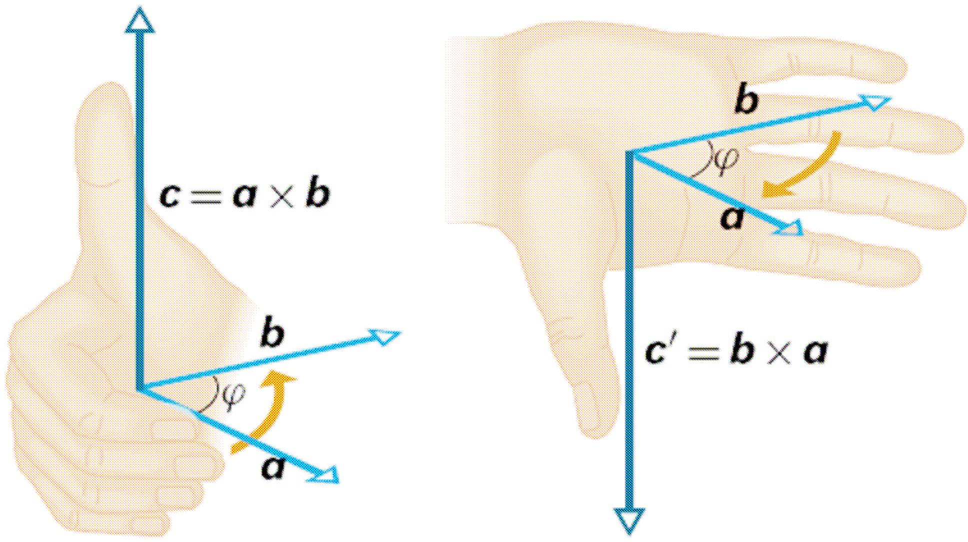
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad , \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

Potom můžeme skalární součin dvou libovolných vektorů zapsat ve složkách jako

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}\right) = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z$$

Vektorový součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ vytváří vektor $\vec{c}$, který je kolmý k rovině, v níž leží tyto vektory a má velikost

$$c = a\,b\sin\varphi$$



Vektorový součin vektoru se sebou samým dává nulový vektor, protože pro velikost máme

$$c = a^2 \sin 0 = 0$$

Vektorový součin dvou navzájem kolmých jednotkových vektorů má opět jednotkovou velikost, protože

$$c = 1 \cdot 1 \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Pro základní vektory kartézské soustavy tedy můžeme psát

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0 \quad , \quad \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \quad , \quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \quad , \quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$

Potom můžeme vektorový součin dvou libovolných vektorů zapsat ve složkách jako

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}\right)\times\left(b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}\right) =$$
$$\left(a_y\,b_z - b_y\,a_z\right)\vec{i} + \left(a_z\,b_x - b_z\,a_x\right)\vec{j} + \left(a_x\,b_y - b_x\,a_y\right)\vec{k}$$

nebo ve standardním zápisu

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_y\,b_z - b_y\,a_z\,, a_z\,b_x - b_z\,a_x\,, a_x\,b_y - b_x\,a_y\right)$$