Matematika pro radiologické asistenty

5. Soustavy lineárních rovnic, matice

5.1 Triviální příklady

V jedné nejmenované nemocnici byli zvyklí na dodávku ampulí s lékem, který se přidával do infuzí. Ampule měly vždy objem V a koncentrace účinné látky v ní byla p% objemových. Personál měl příkaz vrchní sestry dávat do infuze o výsledném objemu W vždy jednu ampuli léku. Jednou dodala lék jiná firma a ampule měly objem dvojnásobný, tj. $2V$, koncentrace účinné látky byla také dvojnásobná. Vrchní sestra přikázala dávat do infuzí polovinu obsahu ampule. Co myslíte, je to správný příkaz?

Řešení: Zavedeme označení: objemy budou v cm³ (ml), tedy W objem infuze (v obou případech stejný) a V objem ampule první firmy. p bude koncentrace účinné látky v objemových procentech v prvním případě. Objem účinné látky a koncentrace jsou

$$U_1 = \frac{p}{100}V \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{U_1}{W} = \frac{p}{100}\frac{V}{W} \quad ,$$
$$U_2 = \frac{2p}{100}\frac{2V}{2} \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{U_2}{W} = 2\frac{p}{100}\frac{V}{W} = 2q_1$$

Závěr: Snad nebyla dvojnásobná dávka smrtelná. Obecnější úloha je taková: Předpokládejme, že druhá firma dodala ampule o objemu Ω=20 ml s koncentrací účinné látky p=50 % (objemových). Do jakého objemu základu infuze mají sestry vmíchat jednu ampuli, aby dosáhly předepsané koncentrace q=5 % ? Označme x objem infuze (neznámá místo objemu W z předchozí úlohy). Objem účinné látky v ampuli je

$$\omega = \frac{p}{100}\Omega$$

Rovnice pro neznámy objem x (lineární rovnice pro neznámou veličinu x) je pak

$$q = 100 \cdot \frac{\omega}{x+\Omega} \quad \Rightarrow \quad q\,x + (q-p)\Omega = 0$$

Řešení:

$$x = \Omega\left(\frac{p}{q} - 1\right)\text{ml} = 20\left(\frac{50}{5} - 1\right)\text{ml} = 180\text{ ml}$$

Nepatrně složitější úloha je tato: Do infuze o celkovém objemu W=200 ml se přidávají dvě účinné látky. První z nich je v ampulích o objemu V_1=20 ml v koncentraci p_1=30 % (objemových), druhá v ampulích o objemu V_2 =40 ml v koncentraci p_2=50 %. Výsledná koncentrace obou účinných látek v infuzi má být q=15 % a poměr jejich koncentrací $q_1/q_2 = p = 0{,}5$ (jedna ku dvěma). Kolik ml roztoku 1 a kolik ml roztoku 2 je třeba dát do infuze ? Řešení – záznam úlohy: Označme x hledaný objem roztoku 1 a y hledaný objem roztoku 2 (máme tedy dvě neznámé, x a y). Objem účinné látky 1 v objemu x bude $U_1 = (p_1/100)\,x$, objem účinné látky 2 v objemu y bude $U_2 = (p_2/100)\,y$. Koncentrace látek v infuzi pak budou

$$q_1 = \frac{U_1}{W} = \frac{p_1}{100}\frac{x}{W} \quad , \quad q_2 = \frac{U_2}{W} = \frac{p_2}{100}\frac{y}{W}$$

Pro naše dvě neznámé máme dvě podmínky

$$q_1 + q_2 = q \quad , \quad \frac{q_1}{q_2} = p$$

Přepíšeme tyto podmínky pomocí neznámých veličin x a y a známých hodnot p_1, p_2, W, q a p na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} p_1\,x + p_2\,y &= q\,W \\ p_1\,x - p\,p_2\,y &= 0 \end{aligned}$$

Řešení soustavy rovnic: Odečteme druhou rovnici od první a vyřešíme vzhledem k y, potom dosadíme toto řešení do druhé rovnice (samozřejmě je možné dosadit i do první rovnice, řešení pro x musí být stejné). Dostaneme tak

$$x = \frac{p\,q\,W}{p_1(1+p)}\,,\ y = \frac{q\,W}{p_2(1+p)} \quad \Rightarrow \quad x \doteq 33,\ y = 40$$

5.2 Matice

Tabulku tvořenou m řádky a n sloupci čísel nazýváme maticí dimense $m \times n$

$$\mathbf{A} \equiv (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matice stejné dimense $m \times n$ můžeme sečítat a násobit číslem

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad &\Rightarrow \quad (c_{ik}) = (a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik}) \\ \mathbf{C} = \alpha\,\mathbf{A} \quad &\Rightarrow \quad (c_{ik}) = \alpha(a_{ik}) = (\alpha\,a_{ik}) \end{aligned}$$

Matici $\mathbf{A}$ dimense $m \times n$ můžeme zprava vynásobit maticí $\mathbf{B}$ dimense $n \times s$ a získat tak matici $\mathbf{C}$ dimense $m \times s$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad (c_{ik}) = \left(\sum_{p=1}^{n} a_{ip}\, b_{pk} \right)$$

nebo můžeme matici $\mathbf{A}$ dimense $m \times n$ vynásobit zleva maticí $\mathbf{B}$ dimense $s \times m$ a získat tak matici $\mathbf{C}$ dimense $s \times n$

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad (c_{ik}) = \left(\sum_{p=1}^{m} b_{ip}\, a_{pk} \right)$$

Vidíme, že pro sčítání zůstává komutativita (nezávislost na pořadí) sčítanců zachována i u matic, u násobení to pro součinitele obecně neplatí. Především: násobit můžeme jen matice, které mají stejný počet řádků nebo sloupců. Ale i pro čtvercové matice (dimense $n \times n$) je komutativita spíše výjimkou.

Obrazně vyjádřeno, prvky matice součinu vytváříme takto: v prvním řádku jsou postupně „první řádek levé matice krát první sloupec pravé matice“, „první řádek levé matice krát druhý sloupec pravé matice“ až „první řádek levé matice krát poslední sloupec pravé matice“, v druhém řádku jsou postupně „druhý řádek levé matice krát první sloupec pravé matice“, „druhý řádek levé matice krát druhý sloupec pravé matice“ až „druhý řádek levé matice krát poslední sloupec pravé matice“ atd. až po poslední řádek matice součinu, kde jsou postupně „poslední řádek levé matice krát první sloupec pravé matice“, „poslední řádek levé matice krát druhý sloupec pravé matice“ až „poslední řádek levé matice krát poslední sloupec pravé matice“. Součin „řádek krát sloupec“ pak znamená, že sečteme součin prvního prvku řádku s prvním prvkem sloupce se součinem druhého prvku řádku s druhým prvkem sloupce atd. až po součin posledního prvku řádku s posledním prvkem sloupce.

Příklad pro čtvercové matice dimense 2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Počítáme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + -1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + -1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot -1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot -1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot -1 \\ 0 \cdot 1 + -1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + -1 \cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Při počítání se nám objevila (ne náhodně, příklad je tak vybrán) jednotková matice

$$\mathbf{E} = (\delta_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

tj. čtvercová matice, která má na diagonále jedničky a ostatní prvky jsou rovny nule. Symbol δ_{ik} je Kroneckerovo delta, pro které

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Násobení jednotkovou maticí ponechává původní matici nezměněnou. Vezměme jednotkovou matici dimense $n \times n$, matici $\mathbf{A}$ dimense $m \times n$ a matici $\mathbf{B}$ dimense $n \times s$. Potom je

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad c_{ik} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}\, \delta_{pk} = a_{ik} \quad , \quad \mathbf{C} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad c_{ik} = \sum_{p=1}^{n} \delta_{ip}\, b_{pk} = b_{ik}$$

Obecně nemusí být všechny řádky matice lineárně nezávislé (tj. pro nějaký řádek je v takovém případě možné najít lineární kombinaci zbývajících řádků, že je rovna tomuto řádku). Totéž platí, uvažujeme-li místo řádků o sloupcích. **Hodnost matice** je definována jako maximální počet lineárně nezávislých řádků. Hodnost matice hraje podstatnou roli při úvahách o počtech řešení soustavy lineárních rovnic.

5.3 Matice a řešení soustavy rovnic

Uvažujme soustavu *m* lineárních rovnic o *n* neznámých

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde a_{ij}, b_i ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$) jsou koeficienty soustavy rovnic (tj. známá čísla) a x_j $1 \le j \le n$ jsou **neznámé**. Všechny *n*-tice $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, které vyhovují rovnicím, tvoří **řešení** soustavy rovnic. Se soustavou rovnic jsou spojeny matice soustavy a rozšířená matice soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic jsou ty úpravy, které nemění jejich řešení. Je to zajisté násobení libovolné rovnice nenulovým číslem a také přičtení násobku libovolné rovnice k jiné libovolné rovnici. U matic soustavy jsou to tytéž úpravy prováděná s řádky matic. Máme proto tyto ekvivalentní úpravy matice soustavy:

(1) násobení všech prvků v libovolném řádku nenulovým číslem

(2) přičtení k - násobku prvků v libovolném řádku k jinému libovolnému řádku

Hodnost matice jsme definovali jako počet lineárně nezávislých řádků. Převedeme-li ekvivalentními úpravami matici na schodovitý tvar (v daném řádku je vlevo více sloupců s nulami než v řádku nad ním), je pak hodnost přímo dána počtem nenulových řádků. Nejlépe bude ukázat příklady. Musíme jich však zvolit celou řadu, protože máme také velký výběr situací: jaký je počet rovnic a počet neznámých a jaké jsou hodnosti matice soustavy a rozšířené matice soustavy (budeme značit $h(A)$ a $h(B)$) .

Příklad 1 ($m=n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -2x+y-z&=1 \\ x+y+z&=2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy: (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé a (2) první rovnici vynásobenou (–1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji)

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ 5y+5z&=5 \\ -y-2z&=0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Další úpravy jsou (3) druhou rovnici násobíme 1/5 (tj. dělíme ji 5) a (4) druhou rovnici (po předchozí úpravě) přičteme k třetí rovnici

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ y+z&=1 \\ -z&=1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Dostali jsme tak ekvivalentní soustavu rovnic, která má stejné řešení jako původní. Řešení najdeme dosazováním „odzadu“. Soustava má jediné řešení $x=1$, $y=2$, $z=-1$. Matice i rozšířená matice jsou ve stejném schodovitém tvaru a mají tři nenulové řádky – hodnost obou matic ($h(A)=h(B)=3$) je rovna počtu neznámých, dostáváme jediné řešení.

Příklad 2 ($m=n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -2x+y-z&=1 \\ -3x+4y+z&=4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy: (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé a (2) první rovnici vynásobenou 3 přičteme k třetí

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ 5y+5z&=5 \\ 10y+10z&=10 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & 10 & 10 \end{array}\right)$$

Další úpravy jsou (3) druhou rovnici násobíme 1/5 (tj. dělíme ji 5), (4) třetí rovnici násobíme 1/10 (tj. dělíme ji 10) a nakonec (5) druhou rovnici vynásobenou (–1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji)

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ y+z&=1 \\ 0&=0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ekvivalentní soustava rovnic má stejné řešení jako původní. Najdeme je snadno dosazováním „odzadu“. V tomto případě zůstává jedna volná neznámá, existuje tedy nekonečně mnoho řešení $x=-z$, $y=1-z$, z libovolné. Matice i rozšířená matice jsou ve stejném schodovitém tvaru a mají dva nenulové řádky – hodnost obou matic ($h(A)=h(B)=2$) je menší než počet neznámých, dostáváme nekonečně mnoho řešení.

Příklad 3 ($m=n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -2x+y-z&=1 \\ -x+3y+2z&=8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy: (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé a (2) první rovnici přičteme k třetí

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ 5y+5z&=5 \\ 5y+5z&=10 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Další úpravy jsou (3) druhou rovnici vynásobenou (–1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji) a (4) druhou rovnici násobíme 1/5 (tj. dělíme ji 5)

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ y+z&=1 \\ 0&=5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

I toto je ekvivalentní soustava rovnic. Zjevně nemá řešení, neboť žádnou volbou proměnných nedosáhneme „0=5“. Matice soustavy i rozšířená matice jsou ve schodovitém tvaru, ale hodnost matice soustavy ($h(A)=2$) je menší než hodnost rozšířené matice ($h(B)=3$).

Příklad 4 ($m=2$, $n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -2x+y-z&=1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy: (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé a (2) upravenou druhou rovnici vynásobíme 1/5 (tj. vydělíme 5)

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ y+z&=1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ze schodovitého tvaru matic vidíme, že hodnosti jsou stejné a menší než počet neznámých ($h(A)=h(B)=2$), dostáváme nekonečně mnoho řešení $x=-z$, $y=1-z$, z libovolné.

Příklad 5 ($m=2$, $n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -2x-4y-6z&=-5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -6 & -5 \end{array}\right)$$

Stačí provést úpravu (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ 0&=-1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ekvivalentní soustava rovnic zjevně nemá řešení, neboť žádnou volbou proměnných nedosáhneme „0=-1“. Matice soustavy i rozšířená matice jsou ve schodovitém tvaru, ale hodnost matice soustavy ($h(A)=1$) je menší než hodnost rozšířené matice ($h(B)=2$).

Příklad 6 ($m=4$, $n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -2x+y-z&=1 \\ x+y+z&=2 \\ -x+2y&=3 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy: (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé, (2) první rovnici vynásobenou (–1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji) a (3) první rovnici přičteme ke třetí

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 5y + 5z &= 5 \\ -y - 2z &= 0 \\ 4y + 3z &= 5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Další úpravy jsou: (3) druhou rovnici vynásobíme 1/5 (tj. vydělíme 5), (4) upravenou druhou rovnici přičteme k třetí rovnici, (5) upravenou druhou rovnici vynásobenou (–4) přičteme k třetí a konečně (6) upravenou třetí rovnici odečteme od čtvrté

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ y + z &= 1 \\ -z &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení této ekvivalentní soustavy rovnic najdeme dosazováním „odzadu“. Soustava má jediné řešení $x=1$, $y=2$, $z=-1$. Matice i rozšířená matice jsou ve stejném schodovitém tvaru a mají tři nenulové řádky – hodnost obou matic ($h(A)=h(B)=3$) je rovna počtu neznámých, dostáváme jediné řešení.

Příklad 7 ($m=4$, $n=3$):

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ -2x + y - z &= 1 \\ -x + 3y + 2z &= 3 \\ 3x + y + 4z &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy: (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé, (2) první rovnici přičteme k třetí a (3) první rovnici vynásobenou (–3) přičteme ke čtvrté

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 5y + 5z &= 5 \\ 5y + 5z &= 5 \\ -5y - 5z &= -5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

Při dalších úpravách (4) přičteme druhou rovnici ke čtvrté, (5) odečteme druhou rovnici od třetí a nakonec (6) vynásobíme tuto rovnici 1/5 (dělíme 5)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ y + z &= 1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení $x = -z$, $y = 1 - z$, z libovolné. Počet schodů, tj. počet nenulových řádků obou matic je stejný, jejich hodnosti $h(A)=h(B)=2$, což je hodnota o jedničku menší než počet neznámých $n=3$.

Příklad 7 ($m=4$, $n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -x-2y-3z&=-2 \\ 2x+4y+6z&=4 \\ -3x-6y-9z&=-6 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ -3 & -6 & -9 & -6 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy, v tomto příkladu velmi jednoduché: (1) první rovnici přičteme ke druhé, (2) první rovnici vynásobenou (-2) přičteme ke třetí a (3) první rovnici vynásobenou 3 přičteme ke čtvrté

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ 0&=0 \\ 0&=0 \\ 0&=0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hodnosti matic jsou shodné $h(A)=h(B)=1$ a jsou o 2 menší než počet neznámých $n=3$. Soustava má nekonečně mnoho řešení $x = 2 - 2y - 3z$, y a z libovolné.

5.4 Shrnutí Gaussovy eliminační metody

V předchozí části byl na příkladech ukázán způsob řešení soustavy rovnic převodem matice soustavy rovnic a rozšířené matice (tj. k matici soustavy přidáváme sloupec pravých stran) na schodovitý tvar. Tomuto způsobu říkáme Gaussova eliminační („likvidační“) metoda. Zavedli jsme pojem **hodnost matice** (počet nenulových řádků jejího schodovitého tvaru) a označení $h(A)$ pro hodnost matice soustavy a $h(B)$ pro hodnost rozšířené matice.

Soustava m rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, je-li $h(A)=h(B)=h$, tj. počet nenulových řádků je stejný (schodovité tvary mají stejný počet schodů). Počet volných neznámých je

$$d = n - h$$

To znamená, že soustava má jediné řešení (nejsou žádné volné neznámé) pro $d=0$, tedy v případě, kdy hodnosti matic jsou stejné a rovnu počtu neznámých.