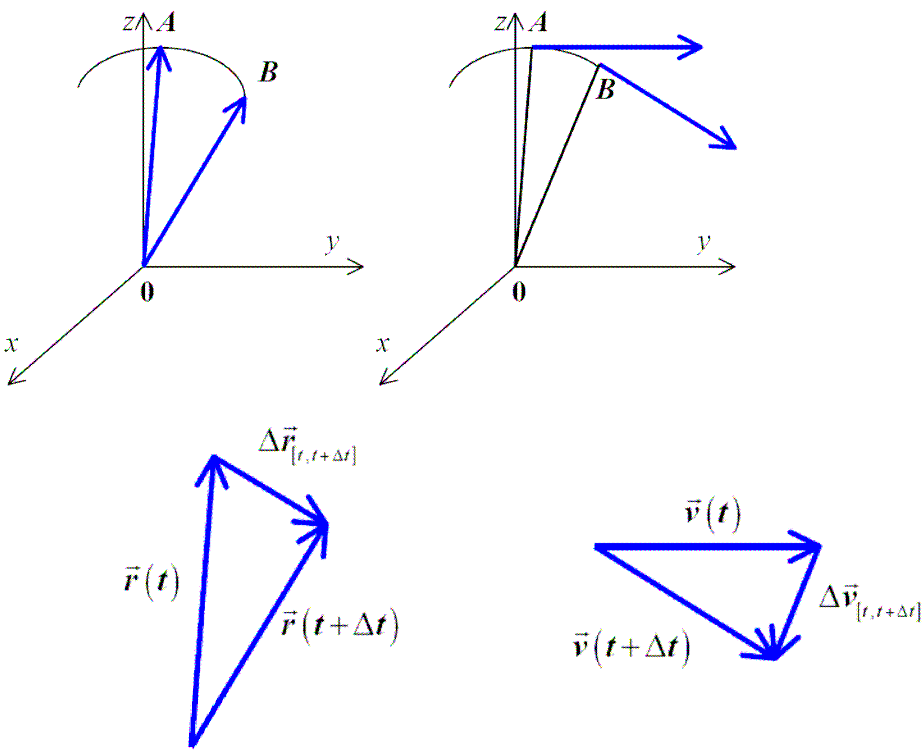
Matematika pro radiologické asistenty

6. Limita a derivace

6.1 Motivace – rychlost a zrychlení

Všimněme si úseku trajektorie částice (říkáme také hmotného bodu) mezi blízkými body A a B, ve kterých se částice nachází v čase t a $t+\Delta t$. Některé veličiny se vztahují k jednomu časovému okamžiku, jiné k intervalu mezi dvěma časovými okamžiky. V našem příkladu máme:



polohový vektor částice v časovém okamžiku t

$$\vec{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$$

polohový vektor částice v časovém okamžiku $t+\Delta t$

$$\vec{r}(t+\Delta t)=\big(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t),z(t+\Delta t)\big)$$

rychlost částice v časovém okamžiku t

$$\vec{v}(t)=\big(v_x(t),v_y(t),v_z(t)\big)$$

rychlost částice v časovém okamžiku $t+\Delta t$

$$\vec{v}(t+\Delta t)=\big(v_x(t+\Delta t),v_y(t+\Delta t),v_z(t+\Delta t)\big)$$

vektor posunutí částice v časovém intervalu $[t, t+\Delta t]$

$$\Delta\vec{r}_{[t,t+\Delta t]} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \big(x(t+\Delta t) - x(t), y(t+\Delta t) - y(t), z(t+\Delta t) - z(t)\big)$$

vektor průměrné rychlosti částice v časovém intervalu $[t, t+\Delta t]$

$$\langle\vec{v}\rangle_{[t,t+\Delta t]} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\right)$$

vektor změny rychlosti částice v časovém intervalu $[t, t+\Delta t]$

$$\Delta\vec{v}_{[t,t+\Delta t]} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t) = \big(v_x(t+\Delta t) - v_x(t), v_y(t+\Delta t) - v_y(t), v_z(t+\Delta t) - v_z(t)\big)$$

vektor průměrného zrychlení částice v časovém intervalu $[t, t+\Delta t]$

$$\langle\vec{a}\rangle_{[t,t+\Delta t]} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}, \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t}, \frac{v_z(t+\Delta t) - v_z(t)}{\Delta t}\right)$$

Vektor průměrné rychlosti vystihuje přibližně, jak rychle měnil hmotný bod svou polohu během časového intervalu $[t, t+\Delta t]$. Během tohoto intervalu se částice přemístila po nějaké trajektorii z místa $\vec{r}(t)$ v čase t do místa $\vec{r}(t+\Delta t)$ v čase $t+\Delta t$. Za stejnou dobu Δt by se také mezi těmito místy přemístila částice pohybující se rovnoměrně přímočaře průměrnou rychlostí, neboť

$$\vec{r}(t) + \langle\vec{v}\rangle_{[t,t+\Delta t]}\Delta t = \vec{r}(t) + \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}\Delta t = \vec{r}(t+\Delta t)$$

Náhrada skutečného pohybu bodu po křivce v časovém intervalu $[t, t+\Delta t]$ pohybem rovnoměrným přímočarým bude přirozeně tím přesnější, čím bude interval $[t, t+\Delta t]$ kratší. Provádíme tzv. limitní přechod $\Delta t \to 0$. Co se však přitom děje se souřadnicemi vektoru průměrné rychlosti? Přestože se jmenovatelé i čitatelé zlomků

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

stávají libovolně blízkými nule, jejich podíly nabývají rozumných hodnot a blíží se při zmenšujících se Δt ke konečným číslům - svým limitním hodnotám. Ty již, na rozdíl od veličin průměrných, nezávisí na délce časového intervalu Δt, ale pouze na jeho počátečním okamžiku t a udávají tak souřadnice tzv. vektoru okamžité rychlosti hmotného bodu. Píšeme

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \langle\vec{v}\rangle_{[t,t+\Delta t]}$$

Poznámka: Z předcházejícího výkladu je zřejmé, že velikost vektoru průměrné rychlosti $\left|\langle\vec{v}\rangle_{[t,t+\Delta t]}\right|$ je něco jiného než průměrná hodnota velikosti vektoru okamžité rychlosti $\langle|\vec{v}|\rangle_{[t,t+\Delta t]}$, která se v běžné řeči označuje slovním spojením „průměrná rychlost".

Jednoduchý příklad limitního přechodu je znázorněn na obrázku. Jde o rovnoměrný pohyb po kružnici

$$\vec{r}(t)=\left(R\cos\frac{2\pi t}{T},R\sin\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Pro průměrnou rychlost dostáváme (při úpravách používáme známých vztahu pro goniometrické funkce)

$$\langle\vec{v}\rangle_{[t,t+\Delta t]}=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{R}{\Delta t}\left(\cos\frac{2\pi(t+\Delta t)}{T}-\cos\frac{2\pi t}{T},\sin\frac{2\pi(t+\Delta t)}{T}-\sin\frac{2\pi t}{T}\right)=$$

$$2R\frac{\sin\frac{\pi\Delta t}{T}}{\Delta t}\left(-\sin\frac{\pi(2t+\Delta t)}{T},\cos\frac{\pi(2t+\Delta t)}{T}\right)$$

Velikost vektoru průměrné rychlosti je pak

$$\left|\langle\vec{v}\rangle_{[t,t+\Delta t]}\right|=\sqrt{\left(\langle v_x\rangle_{[t,t+\Delta t]}\right)^2+\left(\langle v_y\rangle_{[t,t+\Delta t]}\right)^2}=2R\frac{\sin\frac{\pi\Delta t}{T}}{\Delta t}$$

Zvolíme-li poloměr R=1 m a periodu T=4 s, dostáváme pro zkracující se intervaly hodnoty velikosti vektoru průměrné rychlosti $\left|\langle\vec{v}\rangle_{[0,\Delta t]}\right|$ uvedené v tabulce. Výpočet limity pro $\Delta t\to 0$ dává přesnou hodnotu $|\vec{v}|=\pi/2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, proto pro lepší zviditelnění toho, jak se hodnoty blíží k přesné hodnotě uvádíme v tabulce $2/\pi$ násobky velikosti vektoru průměrné rychlosti.

$\Delta t\,[\mathrm{s}]$	$\frac{2}{\pi}\left|\langle\vec{v}\rangle_{[0,\Delta t]}\right|\left[\mathrm{m\,s^{-1}}\right]$
1	0,9003
1/2	0,9745
1/4	0,9936
1/8	0,9984
1/16	0,9996
$\to 0$	$\to 1$

6.2 Funkce, její limita a spojitost

Funkce vyjadřuje závislost určité veličiny (závisle proměnné) na veličinách jiných (nezávisle proměnných). Příkladem mohou být již zmíněné závislosti souřadnic částice na čase.

Uvažujme nyní o případu jedné reálné nezávisle proměnné *t* a jedné reálné závisle proměnné *x*. Píšeme $x = f(t)$ a čteme „*x* je funkcí *t*“. Symbol *f*, tzv. funkční předpis, určuje pravidlo, kterým jsou hodnotám *t* přiřazeny hodnoty *x*. Někdy píšeme jen $x = x(t)$ (tento zápis bývá ve fyzice častější). Hodnoty, kterých může nabývat proměnná *t*, tvoří definiční obor funkce značený D_f. Obor D_f je buď zadán současně s uvedením pravidla *f*, nebo je automaticky chápán jako množina všech hodnot *t*, pro něž lze podle pravidla *f* vyčíslit hodnotu *x*. Např. pro $x = \sqrt{t}$ musí být $t \geq 0$, neboť záporné hodnoty nelze odmocňovat. Říkáme, že *f* je definována na množině D_f. Hodnoty, jichž bude nabývat proměnná *x*, probíhá-li *t* definiční obor D_f, tvoří obor hodnot funkce, H_f. V rovině souřadnic *t* (vodorovná osa) a *x* (svislá osa) vytvoří body o souřadnicích $[t, f(t)]$ graf funkce, označovaný jako G_f.

Definice: Funkce *g* je inversní funkcí k funkci *f*, jestliže její definiční obor obsahuje obor hodnot funkce *f* a platí

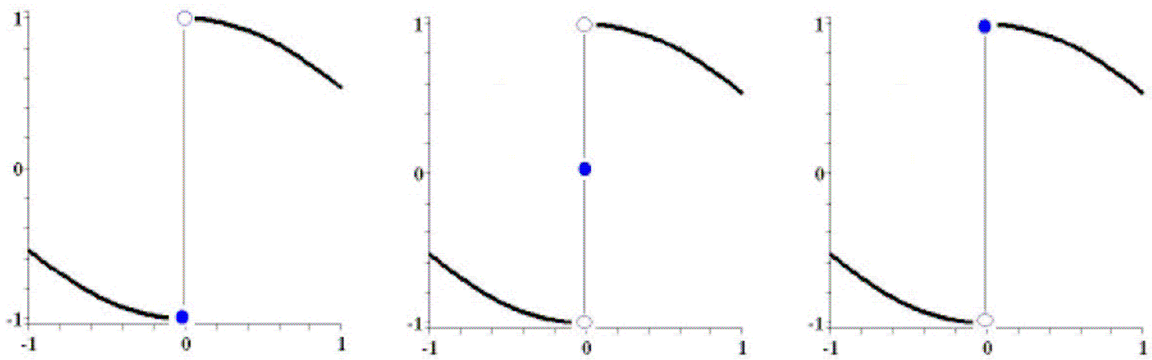
$$g(f(t)) = t$$

Jako příklady uveďme

$$\exp(\ln(t)) = t \quad , \quad \ln(\exp(t)) = t \quad ,$$
$$\sqrt{t^2} = t \quad , \quad \left(\sqrt{t}\right)^2 = t \quad ,$$
$$\sin(\arcsin(t)) = t \quad , \quad \arcsin(\sin(t)) = t$$

U posledního vztahu je třeba jisté opatrnosti, protože funkce sinus je periodická.

Následující obrázky ukazují příklady grafů funkcí, které v určitém bodě ($t = 0$) limitu vůbec nemají (plný kroužek = bod patří do definičního oboru funkce, prázdný kroužek = bod nepatří do definičního oboru funkce). Jedná se postupně o funkce



$$f(t)=\begin{cases}-\cos t & t\le 0\\ \cos t & t>0\end{cases} \quad , \quad f(t)=\begin{cases}-\cos t & t<0\\ 0 & t=0\\ \cos t & t>0\end{cases} \quad , \quad f(t)=\begin{cases}-\cos t & t<0\\ \cos t & t\ge 0\end{cases}$$

Ve všech případech mají funkce v bodě $t_0=0$ limitu L_1 zleva (t se blíží k nule ze strany záporných čísel) a limitu L_2 zprava (t se blíží k nule ze strany kladných čísel). Píšeme

$$\lim_{t\to t_0^-} f(t)=L_1=-1 \quad , \quad \lim_{t\to t_0^+} f(t)=L_2=1$$

Protože $L_1\neq L_2$, limita neexistuje. Ve všech případech je funkce v bodě $t_0=0$ nespojitá. V prvním případě (levý obrázek) je však spojitá zleva. Platí zde

$$\lim_{t\to 0^-} f(t)=f(0)$$

(v našem příkladu $f(0)=-1$). Obdobně ve třetím případě (pravý obrázek) je funkce spojitá zprava. Platí zde tedy

$$\lim_{t\to 0^+} f(t)=f(0)$$

(v našem příkladu $f(0)=1$). Přesná definice limity je následující:

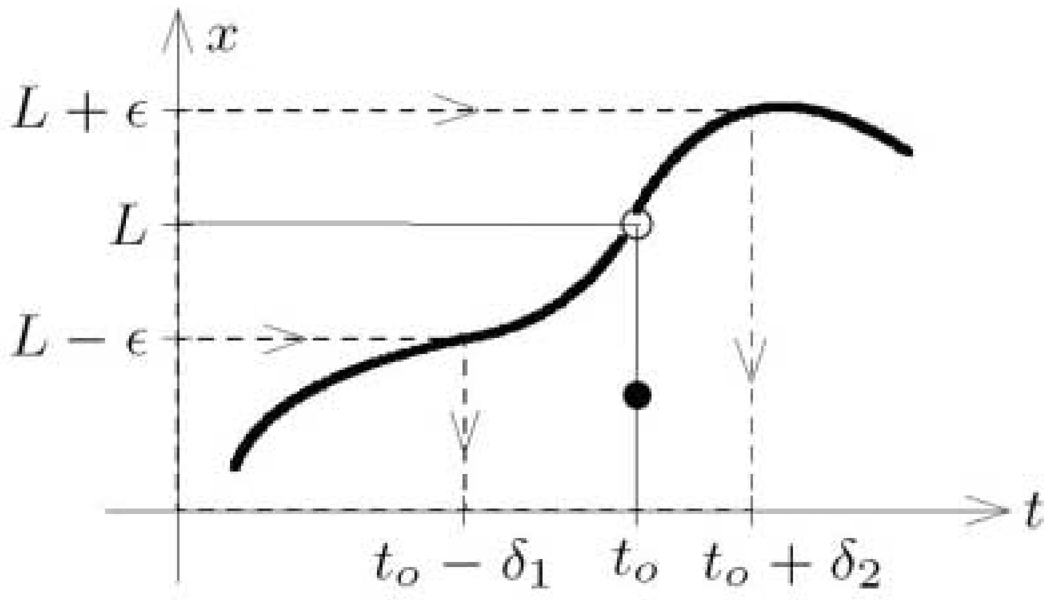
Definice: Číslo L se nazývá limitou funkce $x=f(t)$ v bodě t_0, jestliže pro libovolně zvolené (jakkoli malé) číslo $\varepsilon>0$ dokážeme najít takový interval $(t_0-\delta,t_0+\delta)$, $\delta>0$, že platí

(a) funkce $f(t)$ je definována ve všech bodech množiny $(t_0-\delta,t_0)\cup(t_0,t_0+\delta)$

(b) pro všechna čísla $t\in(t_0-\delta,t_0)\cup(t_0,t_0+\delta)$ je $|f(t)-L|<\varepsilon$

Píšeme pak $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=L$.

Množina $(t_0-\delta,t_0)\cup(t_0,t_0+\delta)$ se nazývá δ-okolí bodu t_0. Všimněte si, že díky definici δ-okolí, která vynechává bod t_0, může existovat limita funkce i v bodě, kde tato funkce není definována. Definici limity můžeme číst i takto“ Číslo L je limitou funkce $f(t)$ v bodě t_0, jestliže se funkční hodnoty nevzdalují od L více než o ε, pohybuje-li se proměnná t dostatečně blízko bodu t_0. Číslo ε je přitom zvoleno libovolně (malé) předem.



Způsob nalezení čísla δ při zvoleném ε ukazuje předchozí obrázek. δ je menší z čísel δ_1, δ_2. Graf funkce je záměrně zvolen složitě, takže funkční hodnota (plný kroužek) v bodě t_0 se nerovná limitě funkce (prázdný kroužek) v tomto bodě – funkce není spojitá. Přesná definice spojitosti je jednoduchá:

Definice: Funkce $x = f(t)$ se nazývá v bodě t_0 spojitá, je-li $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$.

Uvedeme ještě dvě jednoduchá pravidla pro počítání s limitami:

(a) Je-li

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = F \quad , \quad \lim_{t \to t_0} g(t) = G$$

potom

$$\lim_{t \to t_0} \left[f(t) \pm g(t) \right] = F \pm G \quad , \quad \lim_{t \to t_0} \left[f(t) g(t) \right] = F\,G$$

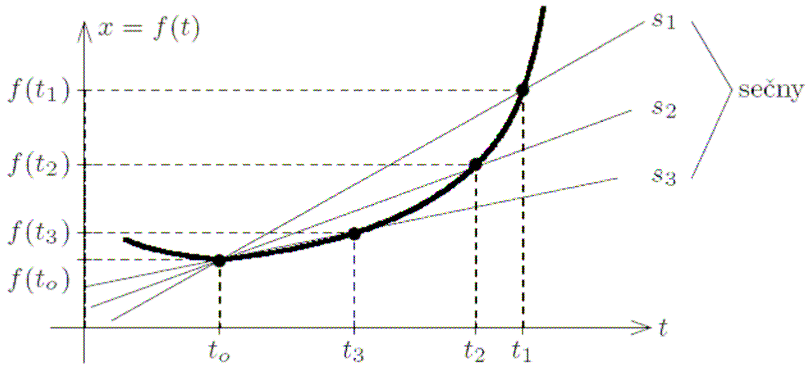
a pokud pro *t* z nějakém δ-okolí bodu t_0 platí $g(t) \neq 0$ a také $G \neq 0$, potom

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{F}{G}$$

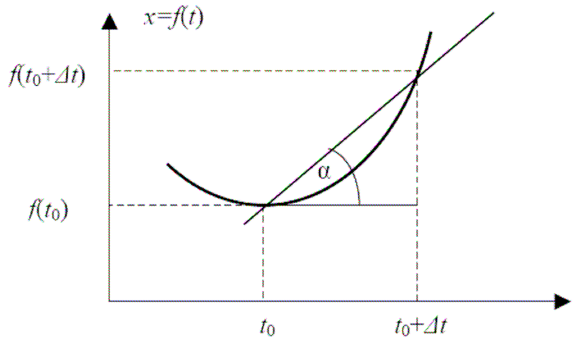
(b) Předpokládejme, že funkce $x = f(t)$ je v bodě t_0 spojitá. Dále uvažujme o funkci $y = g(x)$, definované na množině D_g obsahující obor hodnot funkce *f*. Předpokládejme, že funkce $g(x)$ je spojitá v bodě $x_0 = f(t_0)$. Pak je i složená funkce $y = F(t) = g[f(t)]$ spojitá v bodě t_0. Funkce *f* a *g* představují vnitřní resp. vnější složku složené funkce.

6.3 Derivace funkce, tečna

Pojem tečny ke grafu funkce je možné zavést pomocí limitního přechodu pro sečny grafu. Na obrázku vidíme tři sečny, přitom platí (značíme $\Delta t_1 = t_1 - t_0$, $\Delta t_2 = t_2 - t_0$, $\Delta t_3 = t_3 - t_0$)



nerovnosti $\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$. Ve zkratce můžeme psát $\Delta t \to 0 \Rightarrow \text{sečna} \to \text{tečna}$. Tečna ke grafu funkce v bodě $[t_0, f(t_0)]$ je limitním případem sečny spojující body $A = [t_0, f(t_0)]$ a $B = [t_0 + \Delta t_0, f(t_0 + \Delta t_0)]$ pro $\Delta t \to 0$.



Směrnice sečny je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Směrnice tečny je limitou směrnice sečny pro $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Tečnu ke grafu funkce $x = f(t)$ v bodě $\left[t_0, f(t_0)\right]$ lze tedy zkonstruovat, existuje-li tato limita. Tato limita se nazývá **derivace funkce** $f(t)$ v bodě $t = t_0$ a značí se

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Rovnice tečny (tj. přímky procházející bodem $\left[t_0, f(t_0)\right]$ se směrnicí $f'(t_0)$) je

$$x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

Derivace funkce $x = f(t)$ v obecném bodě t

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

je sama také funkcí proměnné *t*. Derivace funkce $f(t)$ se nezkráceně zapisuje jako

$$\frac{d f(t)}{dt}$$

Výrazy, které teď můžeme zapsat v limitě $\Delta t \to 0$ jako derivace, jsme viděli u výpočtu rychlosti a zrychlení:

$$\vec{v}(t) = \left(v_x(t), v_y(t), v_z(t)\right) = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$$
$$\vec{a}(t) = \left(a_x(t), a_y(t), a_z(t)\right) = \left(v_x'(t), v_y'(t), v_z'(t)\right) = \left(x''(t), y''(t), z''(t)\right)$$

Používáme běžného značení derivace jednou čárkou v horním pravém indexu (nebo jednou tečkou nad symbolem), druhou a třetí derivaci pak značíme dvěma a třema čárkami (nebo tečkami), vyšší derivace mají římskou číslici v horním pravém indexu

$$\frac{d f(t)}{dt} = f'(t), \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = f''(t), \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = f'''(t), \frac{d^4 f(t)}{dt^4} = f^{(IV)}(t), \ldots$$
$$\frac{d f(t)}{dt} = \dot{f}(t), \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \ddot{f}(t), \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \dddot{f}(t), \frac{d^4 f(t)}{dt^4} = f^{(IV)}(t), \ldots$$

6.4 Pravidla pro počítání derivací

Začneme přehled podrobným rozborem dvou příkladů, velmi jednoduchého a poněkud komplikovanějšího.

Příklad 1: vezměme funkci

$$x=f(t)=\frac{1}{2}at^2$$

Při výpočtu derivace máme z definice

$$f^{/}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}a(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}at^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}at^2+at\Delta t+\frac{1}{2}a(\Delta t)^2-\frac{1}{2}at^2}{\Delta t}=$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a\Delta t\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}a\left(t+\frac{1}{2}\Delta t\right)=at$$

Podstatným krokem při výpočtu bylo užití „metody vykrácení nepohodlného výrazu“.

Příklad 2: vezměme funkci

$$x=f(t)=\sin t$$

Opět z definice

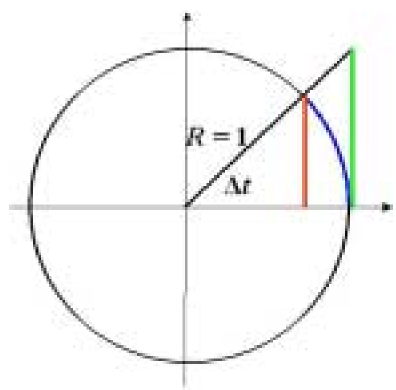
$$f^{/}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(t+\Delta t)-\sin t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta t}{2}\cos\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t}=$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta t\cos(t+\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta t}{\Delta t}\lim_{\Delta t\to 0}\cos(t+\Delta t)=\cos t$$

Opět podstatným krokem při výpočtu bylo užití „metody vykrácení nepohodlného výrazu“ – tentokrát jsme využili toho, že pro malé hodnoty argumentu je funkční hodnota sinu rovna tomuto argumentu $\sin\Delta t=\Delta t-(\Delta t)^3/6+\cdots$. Můžeme si ukázat výpočet limity

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta t}{\Delta t}=1$$

takto: Podle obrázku platí ($\sin\Delta t$ červeně, délka oblouku Δt modře, $\mathrm{tg}\Delta t$ zeleně)



$$\sin\Delta t \le \Delta t \le \mathrm{tg}\Delta t \Rightarrow \frac{1}{\sin\Delta t} \ge \frac{1}{\Delta t} \ge \frac{\cos\Delta t}{\sin\Delta t}$$

$$1 \ge \frac{\sin\Delta t}{\Delta t} \ge \cos\Delta t \xrightarrow{\Delta t \to 0} 1 \quad , \quad \frac{\sin\Delta t}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} 1$$

V dalším už uvedeme jen výsledky pro nejdůležitější elementární funkce: mocninu, sinus a kosinus a exponenciálu a logaritmus.

$$\boxed{f(t) = t^r \quad , \quad f'(t) = r\, t^{r-1} \quad , \quad r \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(t) = \sin t \quad , \quad f'(t) = \cos t \quad , \\ f(t) = \cos t \quad , \quad f'(t) = -\sin t \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(t) = e^t \quad , \quad f'(t) = e^t \quad , \quad f(t) = a^t \quad , \quad f'(t) = a^t \ln a \quad , \\ f(t) = \ln t \quad , \quad f'(t) = \dfrac{1}{t} \quad , \quad f(t) = \log_a t \quad , \quad f'(t) = \dfrac{1}{t \ln a} \end{array}}$$

Pro derivaci součtu či rozdílu funkcí platí

$$\boxed{\left[f(t) \pm g(t) \right]' = f'(t) \pm g'(t)}$$

Pro derivaci funkce násobené konstantou $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\boxed{\left[c\, f(t) \right]' = c\, f'(t)}$$

Pro derivaci součinu dvou funkcí platí

$$\boxed{\left[f(t) g(t) \right]' = f'(t) g(t) + f(t) g'(t)}$$

Pro derivaci podílu dvou funkcí platí

$$\boxed{\left[\frac{f(t)}{g(t)} \right]' = \frac{f'(t) g(t) - f(t) g'(t)}{\left[g(t) \right]^2}}$$

Pro derivaci složené funkce platí

$$\boxed{F(t) = g\left(f(t) \right) \quad , \quad F'(t) = g'\left(f(t) \right) f'(t)}$$

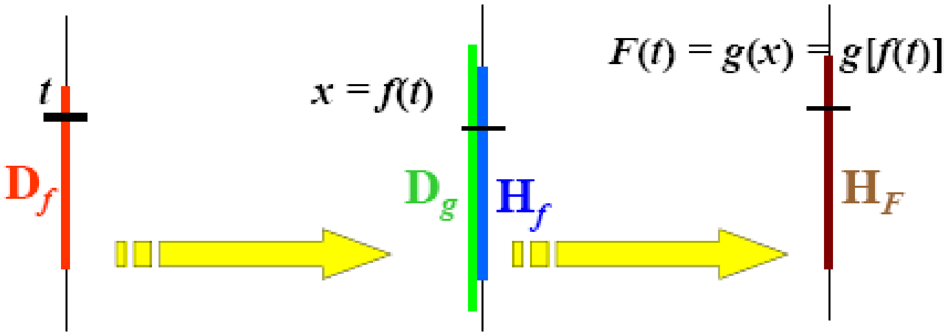
Připomeňme si, že čárkou značíme derivaci funkce podle argumentu. Aby bylo pravidlo pro derivování složené funkce zcela jasné, rozepišme si složenou funkci jako

$$F(t) = g(x) \quad , \quad x = f(t)$$

Potom

$$F'(t) \equiv \frac{dF(t)}{dt} = \frac{dg(x)}{dx} \frac{df(t)}{dt} \equiv g'\left(f(t) \right) f'(t)$$

Zobrazení složenou funkcí včetně definičních oborů a oborů hodnot je ukázáno na obrázku.



Důkazy pravidel pro derivování jsou většinou jednoduché, například

$$\left[c\, f(t)\right]' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c\, f(t+\Delta t) - c\, f(t)}{\Delta t} = c \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = c\, f'(t)$$

nebo

$$\left[f(t)\, g(t)\right]' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)\, g(t+\Delta t) - c\, f(t)\, g(t)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[f(t+\Delta t) - f(t)\right] g(t+\Delta t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t)\left[g(t+\Delta t) - g(t)\right]}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[f(t+\Delta t) - f(t)\right]}{\Delta t} \lim_{\Delta t \to 0} g(t+\Delta t) + f(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[g(t+\Delta t) - g(t)\right]}{\Delta t} =$$

$$f'(t)\, g(t) + f(t)\, g'(t)$$

Podle těchto pravidel pak dokážeme najít derivace i velmi složitých výrazů. Pro dobré pochopení je vhodné všimnout si vnitřní konsistence těchto pravidel.

Příklad 3. Nepochybně je derivace konstanty rovna nule. Zapsáno z definice je pro součin konstanty c a funkce $f(t) = 1 = t^0$

$$[c \cdot 1]' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c \cdot 1 - c \cdot 1}{\Delta t} = c \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - 1}{\Delta t} = c \cdot 0 = 0$$

Příklad 4. Víme, že derivace funkce sinus je rovna funkci kosinus. Podle pravidla o derivaci složené funkce (α je konstanta)

$$\left[\sin(t+\alpha)\right]' = \cos(t+\alpha)(t+\alpha)' = \cos(t+\alpha)$$

Zvolíme-li $\alpha = \pi/2$, dostáváme s použitím součtových vzorců pro goniometrické funkce pravidlo $[\cos t]' = -\sin t$.

Příklad 5. Derivace funkce $1/g(t)$. Použijeme vztah pro derivaci podílu funkcí, přitom $f(t) = 1$. Máme

$$\left[\frac{1}{g(t)}\right]' = \frac{0\cdot g(t) - 1\cdot g'(t)}{\left[g(t)\right]^2} = -\frac{g'(t)}{\left[g(t)\right]^2}$$

Příklad 6. Obecnějším případem složené funkce než funkce v Příkladu 4 je $F(t)=g(at+b)$, kde $a,b\in\mathbb{R}$ jsou libovolné reálné konstanty. Potom

$$F'(t) = g'(at+b)\left[at+b\right]' = a\,g'(at+b)$$

Příklad 7: Funkce tangens je podílem sinu a kosinu. Podle pravidla o derivování podílu máme

$$(\mathrm{tg}t)' = \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)' = \frac{\cos t\cdot\cos t - \sin t\cdot(-\sin t)}{(\cos t)^2} = \frac{(\cos t)^2 + (\sin t)^2}{(\cos t)^2} = \frac{1}{(\cos t)^2}$$

Příklad 8: Funkce kotangens je podílem kosinu a sinu. Podle pravidla o derivování podílu máme

$$(\mathrm{cotg}t)' = \left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)' = \frac{-\sin t\cdot\sin t - \cos t\cdot\cos t}{(\sin t)^2} = -\frac{(\sin t)^2 + (\cos t)^2}{(\sin t)^2} = -\frac{1}{(\sin t)^2}$$

Příklad 8: Derivace inversní funkce. Budeme inversní funkci chápat jako složenou funkci, tj.

$$F(t) = t(x(t)) = t \quad\Rightarrow\quad F'(t) = \frac{dt}{dx}\frac{dx}{dt} = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

Například pro výpočet derivace funkce *arcsin* dostáváme

$$x(t) = \sin t\,,\; t(x) = \arcsin x\,,\; \frac{dx}{dt} = \cos t = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{1-x^2} \quad\Rightarrow$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

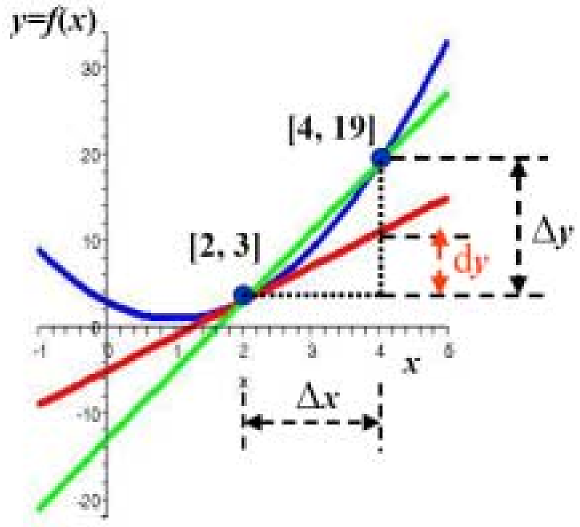
a podobně pro výpočet derivace funkce *arccos*

$$x(t) = \cos t\,,\; t(x) = \arccos x\,,\; \frac{dx}{dt} = -\sin t = -\sqrt{1-(\cos t)^2} = -\sqrt{1-x^2} \quad\Rightarrow$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

6.5 Přibližné vyjádření diferencovatelné funkce

V následující části budeme nezávisle proměnnou značit x a funkce této proměnné pak $y=f(x)$. Obrázek nám na příkladu funkce $y=2x^2-4x+3$ ukazuje možnosti přibližného vyjádření funkce v okolí určité zvolené hodnoty nezávisle proměnné, v tomto případě $x_0=2$.



Modrá barva vyznačuje graf funkce, zelená sečnu spojující funkční hodnoty v $x_0 = 2$ a $x_0 + \Delta x = 4$ a červená tečnu ke grafu funkce v bodě $x_0 = 2$. Rovnice funkce, sečny a tečny jsou

$$y_f = 2x^2 - 4x + 3 \quad , \quad y_s = 8x - 13 \quad , \quad y_t = 4x - 5$$

Takto vypadají rovnice dost odlišně, ale přepíšeme-li je v „proměnné“ $\xi = x - x_0 = x - 2$, máme

$$y_f = 3 + 4\xi + 2\xi^2 \quad , \quad y_s = 3 + 8\xi \quad , \quad y_t = 3 + 4\xi$$

Vidíme, že ačkoliv může sečna na vybraném malém intervalu (v našem případě $2 \le x \le 4$) dobře aproximovat funkci, tečna v bodě x_0 je vhodnější aproximací funkce na celém okolí bodu x_0, v obecném bodě *x* tohoto okolí se liší od funkce až členy, které jsou úměrné druhé mocnině vzdálenosti od bodu x_0, tj. úměrné $(x - x_0)^2$.

Pro obecnou funkci $y_f = f(x)$ jsme ukázali, že směrnice tečny v bodě x_0 je rovna derivaci funkce v tomto bodě, tedy rovnice tečny je

$$y_t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

S označením $\Delta x = x - x_0$ můžeme v okolí bodu x_0 psát

$$y_f(x) = y_t(x) + \varepsilon(x_0, \Delta x)\Delta x$$

kde pro chybu aproximace platí

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x_0, \Delta x) = 0$$

Bez dalších úvah přijmeme následující tvrzení: Je-li funkce v bodě x_0 a jeho okolí dostatečně hladká (má všechny derivace), je možné ji zapsat jako nekonečnou řadu (Taylorův rozvoj)

$$y(x)=f(x_0)+f^{/}(x_0)\Delta x+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

Pro zkrácení zápisu píšeme $f^{(0)}=f$, $f^{(1)}=f^{/}$, $f^{(2)}=f^{//}$, … Některé funkce je možné takovou řadou i definovat (musíme však ukázat, že řada konverguje). V dalších příkladech si ukážeme Taylorův některých elementárních funkcí.

Příklad 1. Najděme Taylorův rozvoj funkce $f(x)=\exp(x)$ v okolí bodu $x_0=0$ (potom $\Delta x=x$). Pro exponenciálu je $\left[\exp(x)\right]^{/}=\exp(x)$ a bude tedy pro derivace libovolného řádu $f^{(n)}(x)=f(x)$. Dále je $f(0)=\exp(0)=1$, takže dostáváme Tailorovu řadu pro exponenciální funkci

$$\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots$$

Příklad 2. Najděme Taylorův rozvoj funkce $f(x)=\ln(x)$ v okolí bodu $x_0=1$ (potom $\Delta x=x-1$). Pro logaritmus je první derivace $\left[\ln(x)\right]^{/}=1/x$, druhá derivace pak $\left[\ln(x)\right]^{//}=-1/x^2$, třetí derivace $\left[\ln(x)\right]^{///}=2/x^3$ atd. Dále je $f(1)=\ln(1)=0$ a pro n-tou derivaci $f^{(n)}(1)=(n-1)!(-1)^{n-1}$. V Taylorově řadě zkrátíme $(n-1)!/n!=1/n$ a máme konečně

$$\ln(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

neboli

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x)^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

Příklad 3. Najděme Taylorův rozvoj funkce $f(x)=\sin(x)$ v okolí bodu $x_0=0$ (potom $\Delta x=x$). Pro derivace sinu máme následující schéma

$$\begin{aligned}
&(\sin x)^{/}=\cos x\\
&(\sin x)^{//}=(\cos x)^{/}=-\sin x\\
&(\sin x)^{///}=(\cos x)^{//}=(-\sin x)^{/}=-\cos x\\
&(\sin x)^{(IV)}=(\cos x)^{///}=(-\sin x)^{//}=(-\cos x)^{/}=\sin x\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Vidíme, že pro derivace lichého řádu $2k+1,\ k=0,1,2,\ldots$ máme $(\sin x)^{(2k+1)}=(-1)^k\cos x$ a pro derivace sudého řádu $2k,\ k=0,1,2,\ldots$je $(\sin x)^{(2k)}=(-1)^k\sin x$. Protože $\sin 0=0$ a $\cos 0=1$, dostáváme pro Taylorův rozvoj funkce sinus

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots$$

Příklad 4. Najděme Taylorův rozvoj funkce $f(x)=\cos(x)$ v okolí bodu $x_0=0$ (potom $\Delta x=x$). Pro derivace sinu máme následující schéma

$$
\begin{aligned}
&(\cos x)^{/}=-\sin x\\
&(\cos x)^{//}=(-\sin x)^{/}=-\cos x\\
&(\cos x)^{///}=(-\sin x)^{//}=(-\cos x)^{/}=\sin x\\
&(\cos x)^{(IV)}=(-\sin x)^{///}=(-\cos x)^{//}=(\sin x)^{/}=\cos x\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Vidíme, že pro derivace lichého řádu $2k+1,\ k=0,1,2,\ldots$ máme $(\cos x)^{(2k+1)}=-(-1)^k\cos x$ a pro derivace sudého řádu $2k,\ k=0,1,2,\ldots$je $(\cos x)^{(2k)}=(-1)^k\cos x$. Protože $\sin 0=0$ a $\cos 0=1$, dostáváme pro Taylorův rozvoj funkce kosinus

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots$$

Příklad 5. Velmi jednoduchý na zapamatování je Taylorův rozvoj funkce $f(x)=1/(1-x)$ v okolí bodu $x_0=0$. Pro derivace máme

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]^{/}=\frac{1}{(1-x)^2}\quad,\quad\left[\frac{1}{1-x}\right]^{//}=\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}\quad,\quad\left[\frac{1}{1-x}\right]^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\quad,\quad\ldots\ldots$$

a v $x_0=0$ tedy zůstávají z derivací pouze faktoriály, je tedy

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots$$