Matematika pro radiologické asistenty

8. Stručně o integrálu

8.1 Neurčitý integrál – primitivní funkce

Často se vyskytuje úloha, kdy máme zjistit, zda nějaká funkce $f(x)$ vznikla derivací jiné funkce a takovou funkci $F(x)$ najít.

Definice. Na otevřeném intervalu (a,b) je definována funkce $f(x)$. Funkci $F(x)$ nazveme **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ na (a,b), je-li $F(x)$ na (a,b) definována, má tam derivaci a pro všechna $x \in (a,b)$ platí $F'(x) = f(x)$.

Bez důkazu uveďme, že ke každé spojité funkci $f(x)$ primitivní funkce existuje. Vzhledem k tomu, že derivace konstanty je nula, je primitivní funkce (říkáme také **neurčitý integrál**) určena až na konstantu

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C$$

V jednoduchých případech najdeme primitivní funkci tak, že předpisy pro derivaci funkce „čteme odzadu". Tak například

$$x' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int dx = x$$

$$\left[\sin(x)\right]' = \cos(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

$$\left[\ln(x)\right]' = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$$

Příklady se liší v tom, že první dva platí na celé reálné ose, ve třetím uvažujeme pouze kladnou poloosu, přesněji interval $(0,\infty)$. Rozšíření na celou reálnou osu dostaneme, vezmeme-li v argumentu logaritmu absolutní hodnotu proměnné a derivujeme jako složenou funkci

$$\frac{d\ln(|x|)}{dx} = \frac{d\ln(|x|)}{d|x|}\frac{d|x|}{dx} = \frac{1}{|x|}\frac{d|x|}{dx} = \left(\pm\frac{1}{x}\right)(\pm 1) = \frac{1}{x}$$

tedy

$$\left[\ln(|x|)\right]' = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$$

Z vlastností derivací vyplývá, že pro primitivní funkce platí

$$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$
$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

Velmi účinnou metodou hledání primitivní funkce je metoda integrace *per partes*. Vychází z výrazu pro derivaci součinu funkcí

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \left[f(x)g(x) \right]'$$

Integrujeme-li obě strany rovnice, známe hned (z definice primitivní funkce) integrál pravé strany, tj. $f(x)g(x)$. Převedeme druhý integrál z levé strany na pravou a dostáváme vzorec pro integraci per partes

$$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx$$

I když je tento předpis velmi jednoduchý, je třeba stejně jako u dalších metod integrace značné představivosti doplněné zkušeností.

Příklad 1. Najděte primitivní funkci k funkci $h(x) = x\sin(x)$. Zvolíme

$$\begin{matrix} f'(x) = \sin(x) & \Rightarrow & f(x) = -\cos(x) \\ g(x) = x & \Rightarrow & g'(x) = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f(x)g'(x) = -\cos(x)$$

Integrovat kosinus umíme, takže ze vzorce pro integraci per partes pak máme

$$\int x\sin(x)\, dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

Příklad 2. Najděte primitivní funkci k funkci $h(x) = \ln(x)$. Zvolíme

$$\begin{matrix} f'(x) = 1 & \Rightarrow & f(x) = x \\ g(x) = \ln(x) & \Rightarrow & g'(x) = \dfrac{1}{x} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f(x)g'(x) = 1$$

Integrovat konstantu (v našem případě rovnu jedné) umíme, takže

$$\int \ln(x)\, dx = x\ln(x) - x + C$$

Na rozdíl od určitého integrálu, který je stručně pojednán v další části, neexistují pro nalezení primitivní funkce numerické metody. Tabulka neurčitých integrálů některých elementárních funkcí shrnuje ty nejjednodušší případy, které můžeme snadno získat „obráceným čtením“ tabulky pro derivování funkcí:

$f(x)$	$F(x)$	
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \neq -1$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\exp(x)$	$\exp(x)$	
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$	
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$	$a>0$, $a\neq 1$
$\dfrac{1}{x\ln(a)}$	$\log_a(\lvert x \rvert)$	$a>0$, $a\neq 1$

Kromě metody integrace per partes existuje celá řada dalších metod. Zmíníme ještě metodu substitucí, kdy v integrálu zavedeme novou proměnnou vztahem $x=\varphi(u)$. Máme potom

$$\int f(x)\,dx = \int f\left[\varphi(u)\right]\varphi'(u)\,du$$

I když obecně zapsaný integrand na pravé straně rovnice vypadá složitěji, v určitých příkladech tomu může být naopak.

Příklad 3. Najděte primitivní funkci k $f(x)=1/(1+x^2)$. Zavedeme substituci $x=\mathrm{tg}u$ a máme

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+(\mathrm{tg}u)^2}\frac{1}{(\cos u)^2}du = \int \frac{(\cos u)^2}{(\cos u)^2+(\sin u)^2}\frac{1}{(\cos u)^2}du = \int du = u + C$$

Po zpětném dosazení za u ($u=\mathrm{arctg}x$) tedy dostaneme

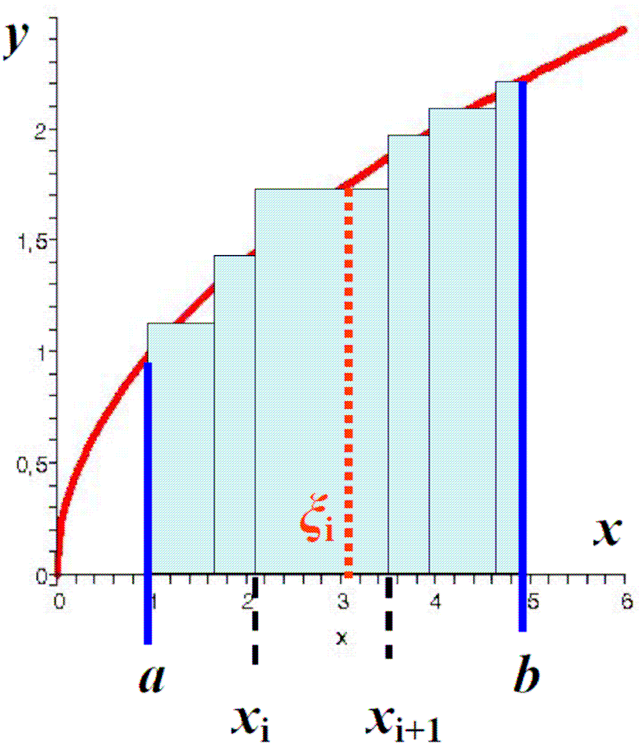
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}(x) + C$$

Několik dalších primitivních funkcí:

$f(x)$	$F(x)$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+C=-\arccos(x)+C$	$\lvert x\rvert<1$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$	$\lvert x\rvert>1$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$	
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{x+1}{x-1}\right\rvert$	

8.2 Určitý (Riemannův) integrál

Obrázek ukazuje vše potřebné k definici určitého integrálu. Úkolem je spočítat plochu vymezenou grafem $y = f(x)$ a osou x mezi $x = a$ a $x = b$. Při fyzikálních aplikacích může mít tato plocha nejrůznější význam. Například při pohybu částice po přímce: je-li x čas a y rychlost, počítáme dráhu, je-li x poloha a y působící síla, počítáme práci.



Na intervalu $[a, b]$ vytvoříme dělení intervalu D

$$D : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Normou dělení nazveme velikost maximálního intervalu dělení

$$\nu(D) = \max\left\{ x_i - x_{i-1} \middle| i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

V každém intervalu $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ vezmeme pak hodnotu funkce v nějakém jeho vnitřním bodě ξ_i. Plocha je pak přibližně dána součet ploch jednotlivých obdélníků se stranami $x_i - x_{i-1}$ a $f(\xi_i)$, tj.

$$P \doteq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

V limitním případě, kdy norma dělení půjde k nule dostáváme přesnou hodnotu, které říkáme určitý integrál z funkce $f(x)$ v mezích $[a,b]$

$$P = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \nu(D)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Určitý integrál můžeme počítat buď přibližně numericky (sčítání ploch mnoha obdélníčků je nejjednodušší metodou, ale například pro rychle oscilující funkci nebo tehdy, když některá nebo obě z mezí jdou do nekonečna je třeba užít podstatně rafinovanějších způsobů) nebo jsme-li schopni nalézt k funkci $f(x)$ primitivní funkci $F(x)$, využít platnosti Leibnizovy – Newtonovy formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Všimněte si, že primitivní funkce je sice určena až na konstantu, ale protože ve vztahu vystupuje rozdíl hodnot ve dvou bodech, konstanta se vyruší.

Příklad 1. Dva body o hmotnostech m_1 a m_2 se přitahují gravitační silou podle Newtonova zákona

$$f(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} = -\frac{k}{r^2}$$

kde r je vzdálenost hmotných bodů a G Newtonova gravitační konstanta. Protože jak hmotnosti, tak konstanta jsou kladné, je také $k > 0$. Změní-li se nyní vzdálenost z r_a na r_b (působením nějaké vnější síly), je práce vykonaná gravitační silou

$$W_g = \int_{r_a}^{r_b} f(r)\,dr = -k\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = k\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

(primitivní funkcí k $-1/r^2$ je $1/r + C$). Práce vykonaná vnější silou má stejnou velikost, ale opačné znaménko

$$W = k\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

Je-li konečná vzdálenost větší než počáteční (tj. $r_b > r_a$), je práce vykonaná vnější silou kladná – bylo třeba překonat vzájemnou přitažlivost.