Základy matematiky a statistiky pro humanitní obory II

Vojtěch Kovář

Fakulta informatiky, Masarykova univerzita
Botanická 68a, 602 00 Brno, Czech Republic

xkovar3@fi.muni.cz

část 6

Obsah přednášky

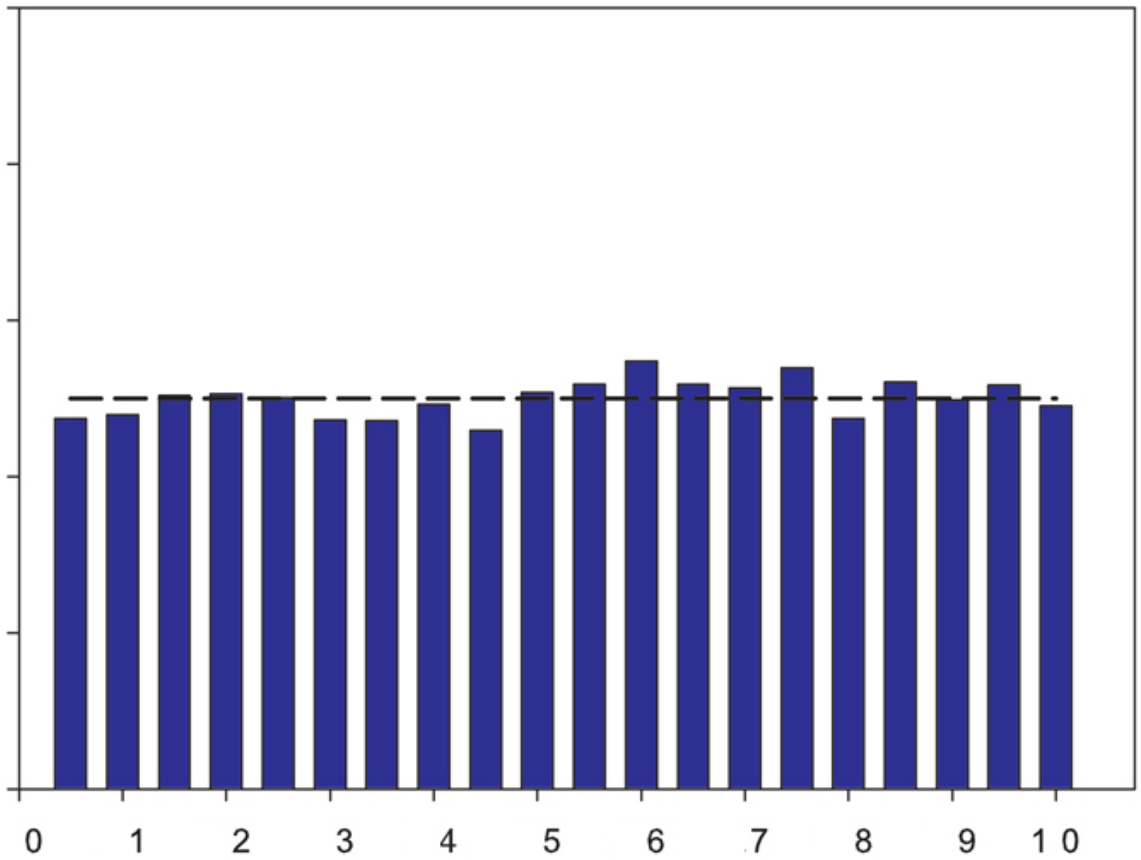
Pravděpodobnostní rozložení

- Funkce, která každé hodnotě přiřadí pravděpodobnost jejího výskytu
  - vyjadřujeme obvykle grafem
  - může být odvozena ze statistického souboru
- Často rozložení aproximujeme "ideální" funkcí
  - vyjádřitelnou vzorcem
  - určíme typ pravděpodobnostního rozložení
- Nejčastější typy rozložení
  - využití pro velkou škálu jevů
  - uniformní rozložení, normální rozložení, Zipfovo rozložení

Uniformní rozložení

- Všechny možnosti mají stejnou pravděpodobnost
  - např. házení (vyváženou) kostkou
  - možnosti 1, 2, 3, 4, 5, 6 mají pravděpodobnost 1/6
  - ostatní mají 0
  - grafem jsou body tvořící úsečku

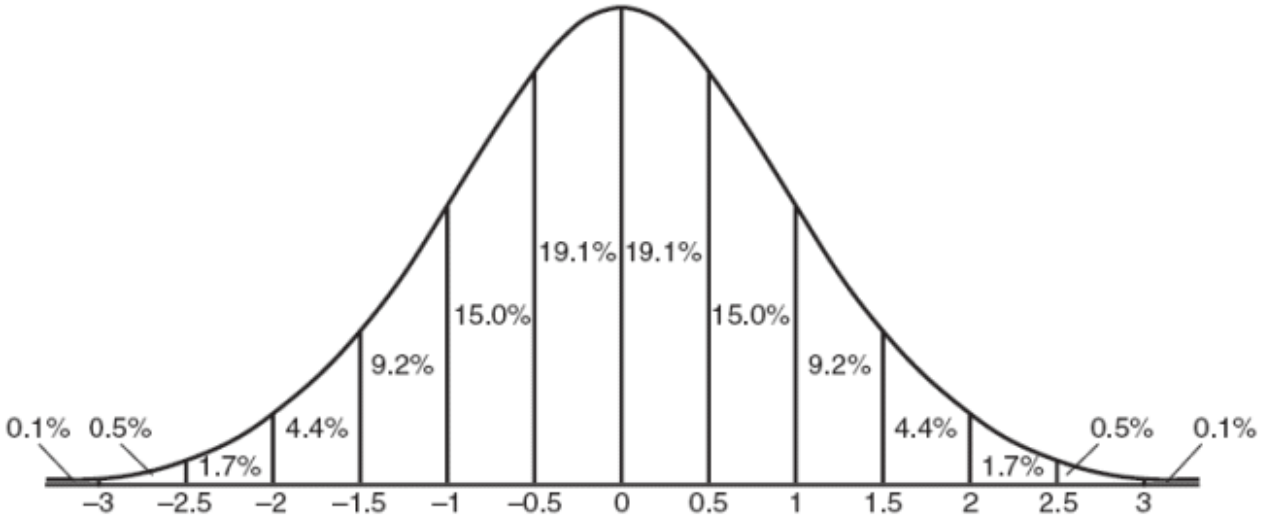
Uniformní rozložení: příklad



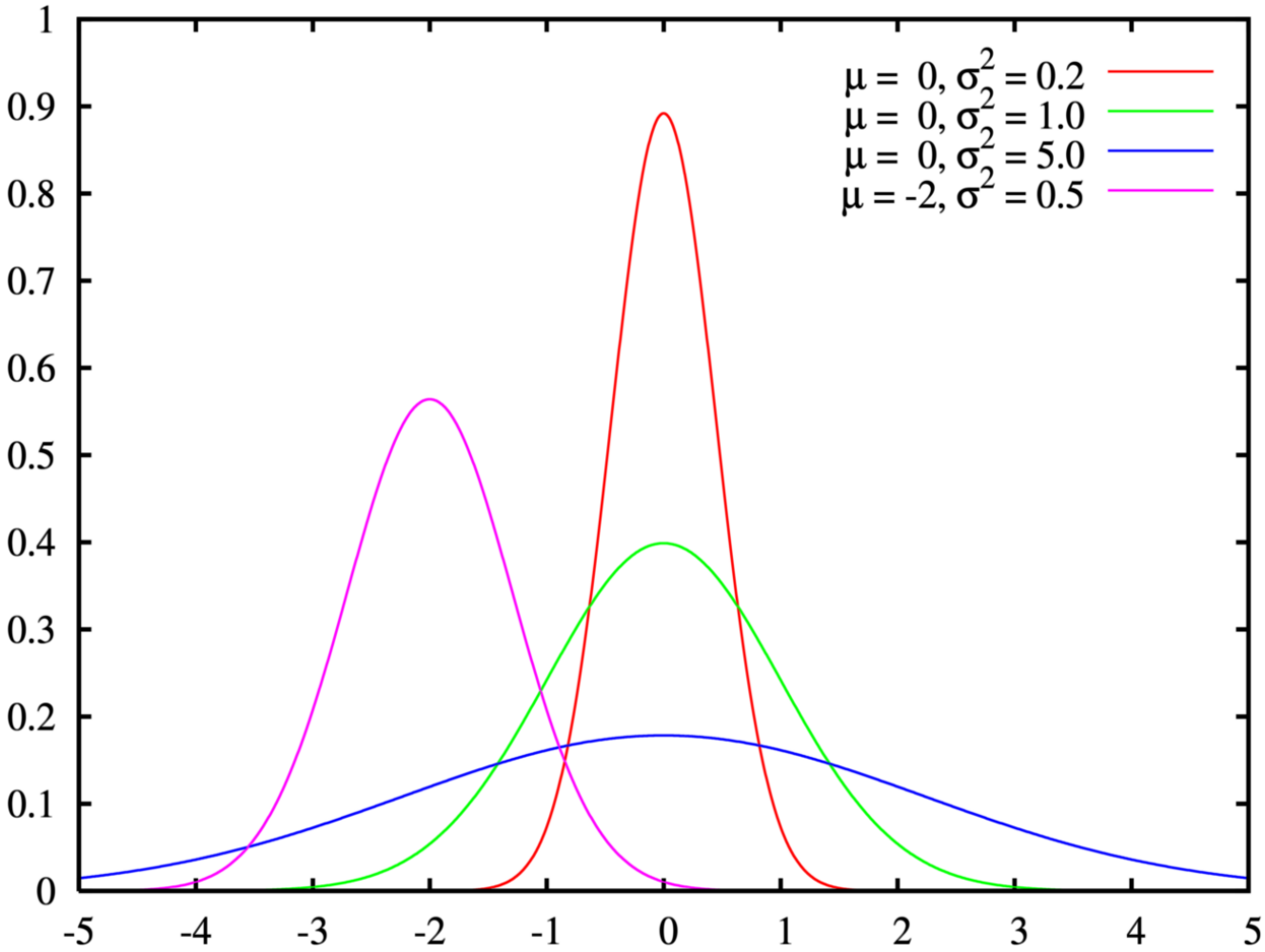
Normální rozložení

- Normální rozložení
  - různé vlastnosti populací
  - např. výška, váha (slonů, lidí)
  - nejpravděpodobnější hodnoty jsou ty, které jsou blízké průměru
  - hodnoty vzdálenější od průměru jsou málo pravděpodobné
  - grafem jsou body tvořící „zvon" s osou v průměrné hodnotě

Normální rozložení: příklad



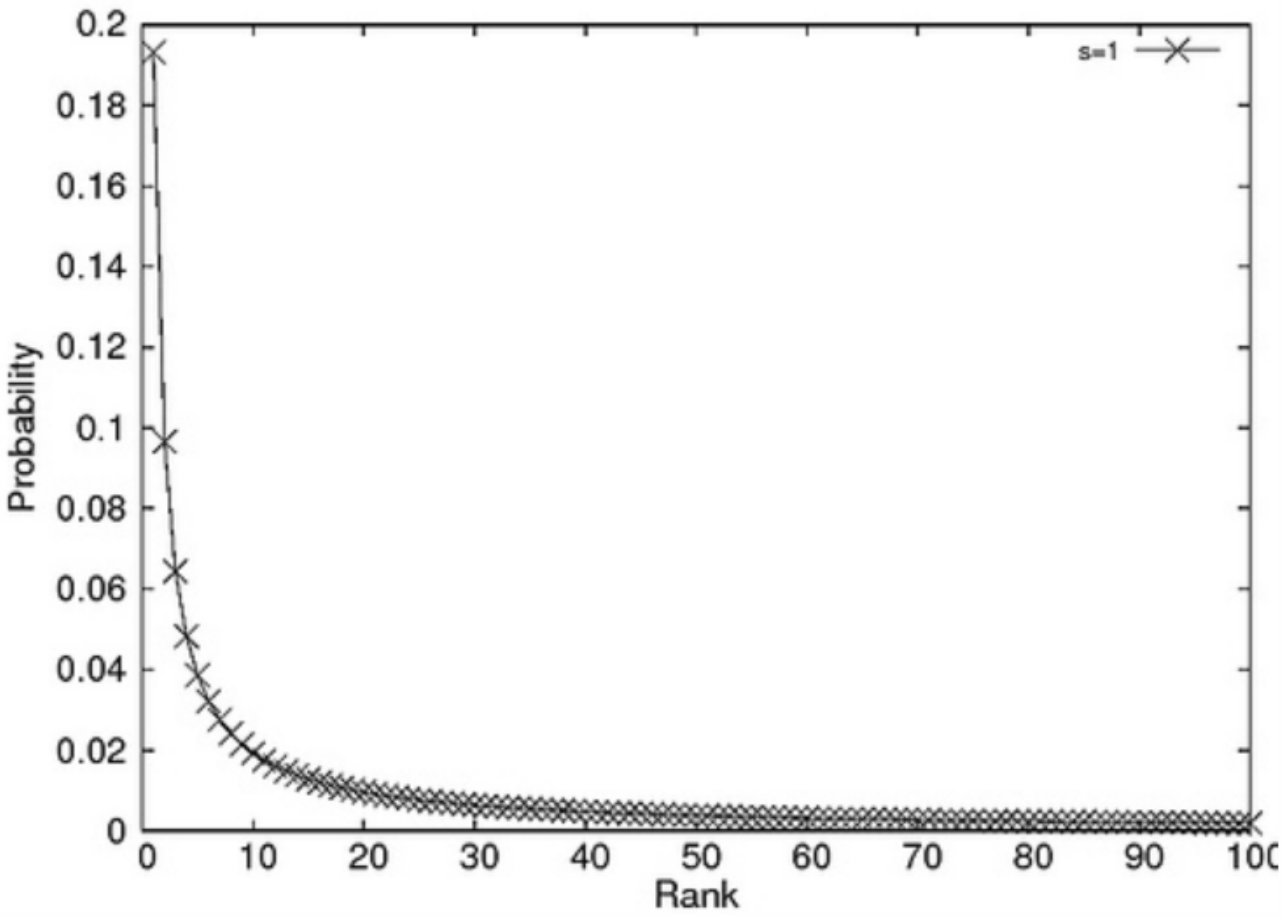
Normální rozložení: příklad



Zipfovo rozložení

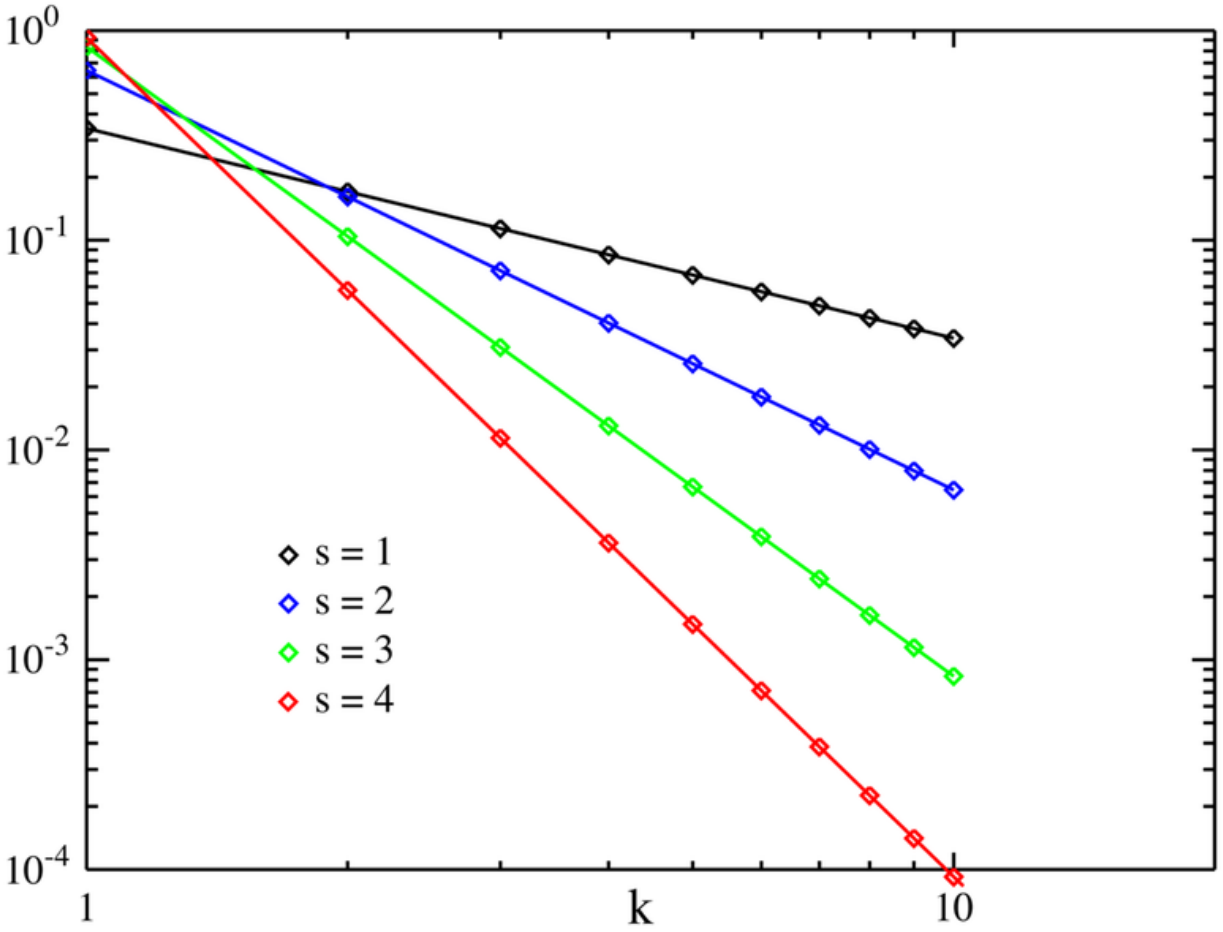
- Zipfovo rozložení
  - několik málo hodnot má velkou pravděpodobnost
  - pravděpodobnost dalších v pořadí prudce klesá
  - velmi velmi mnoho hodnot s malou pravděpodobností
  - tzv. „long tail", „fat tail"
  - např. první hodnota má pravděpodobnost n, druhá $n/2$, třetí $n/3$ atd.
  - velmi často výstižně popisuje reálné distribuce (často překvapivě)

Zipfovo rozložení: příklad



Zipfovo rozložení: logaritmické osy

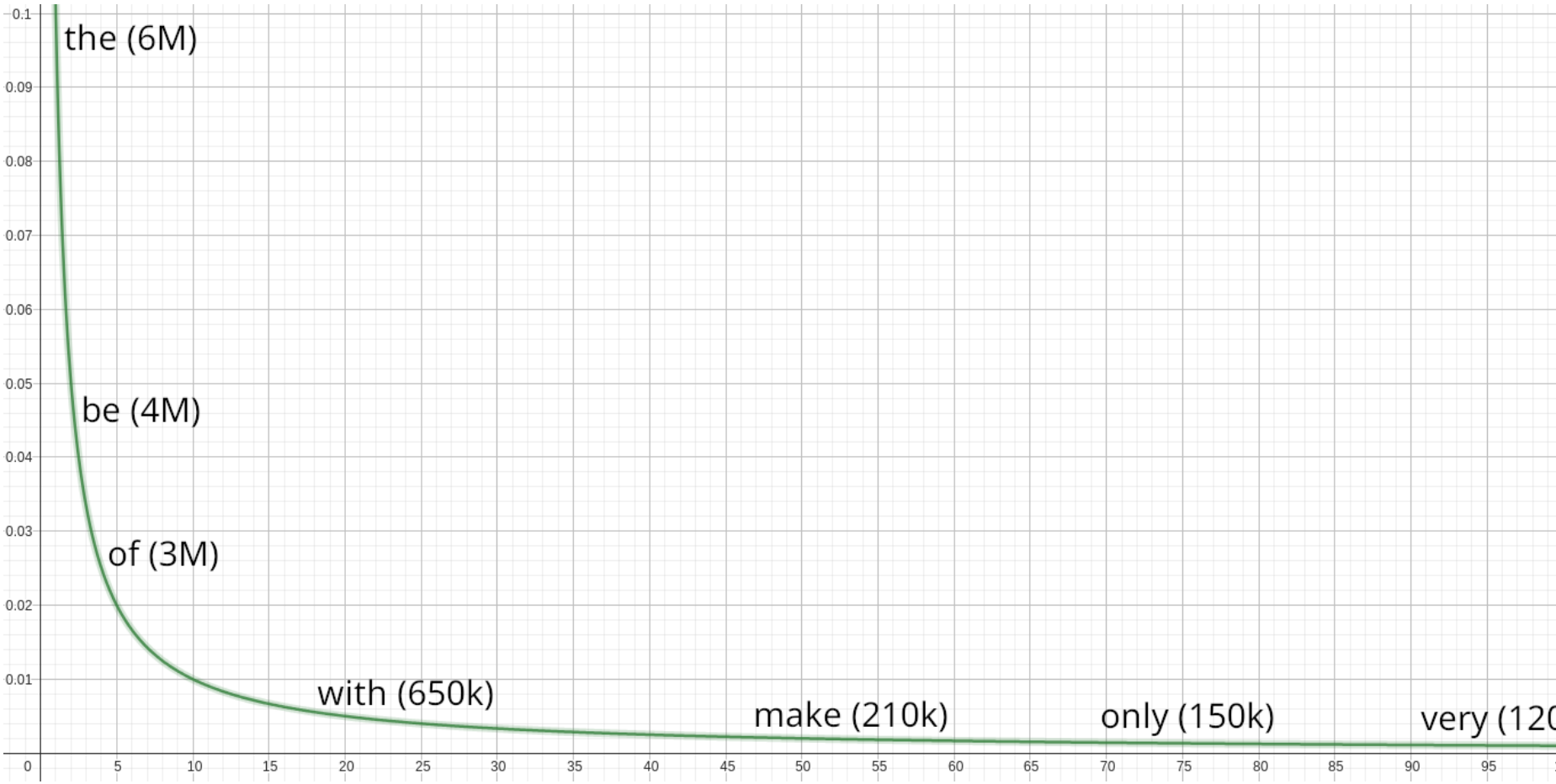
V případě logaritmických os tvoří graf Zipfova rozložení přímku



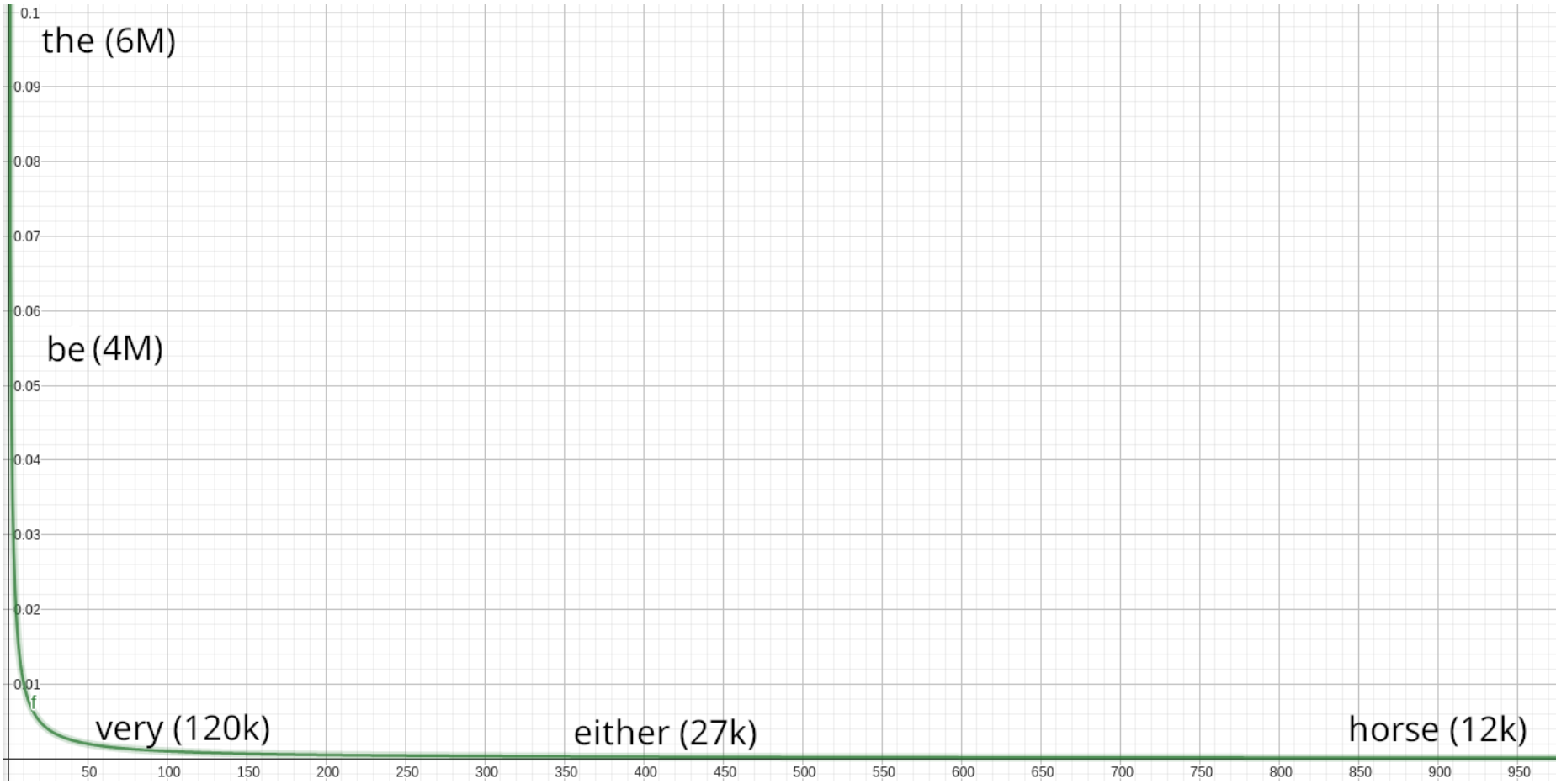
Zipfův zákon

- Zipfovo rozložení dobře popisuje rozložení jazykových jevů
  - nejfrekventovanější jevy pokrývají většinu jazyka
  - frekvence (pravděpodobnost výskytu) je nepřímo úměrná pořadí podle frekvence
- Např. výskyty slov v angličtině
  - „the" tvoří 7 % slovních výskytů
  - „of" tvoří 3,5 % slovních výskytů
  - polovinu anglického korpusu pokrývá 135 nejčastějších slov
- Zipfův zákon v přirozeném jazyce platí, kam se podíváte

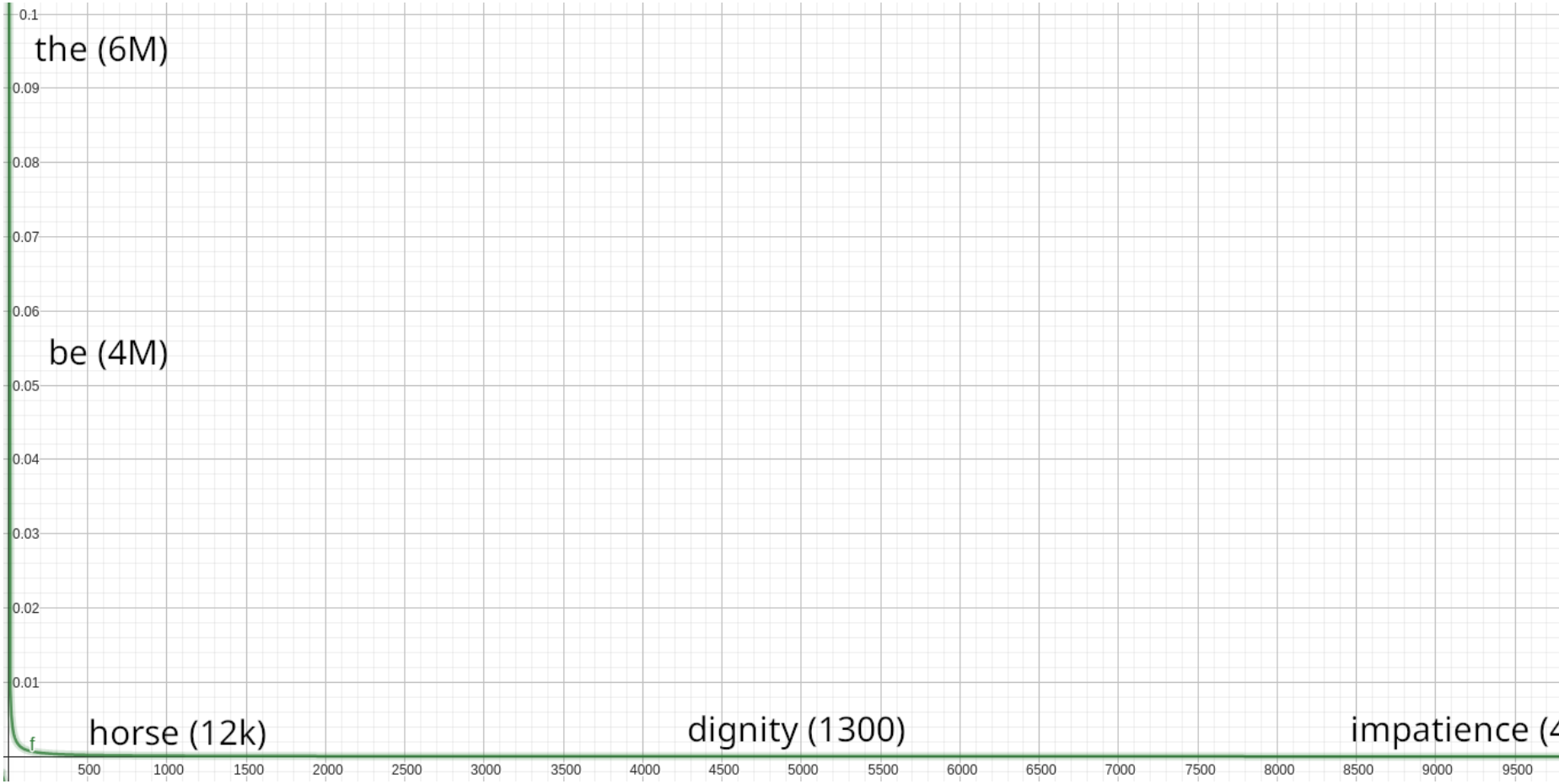
Zipfův zákon



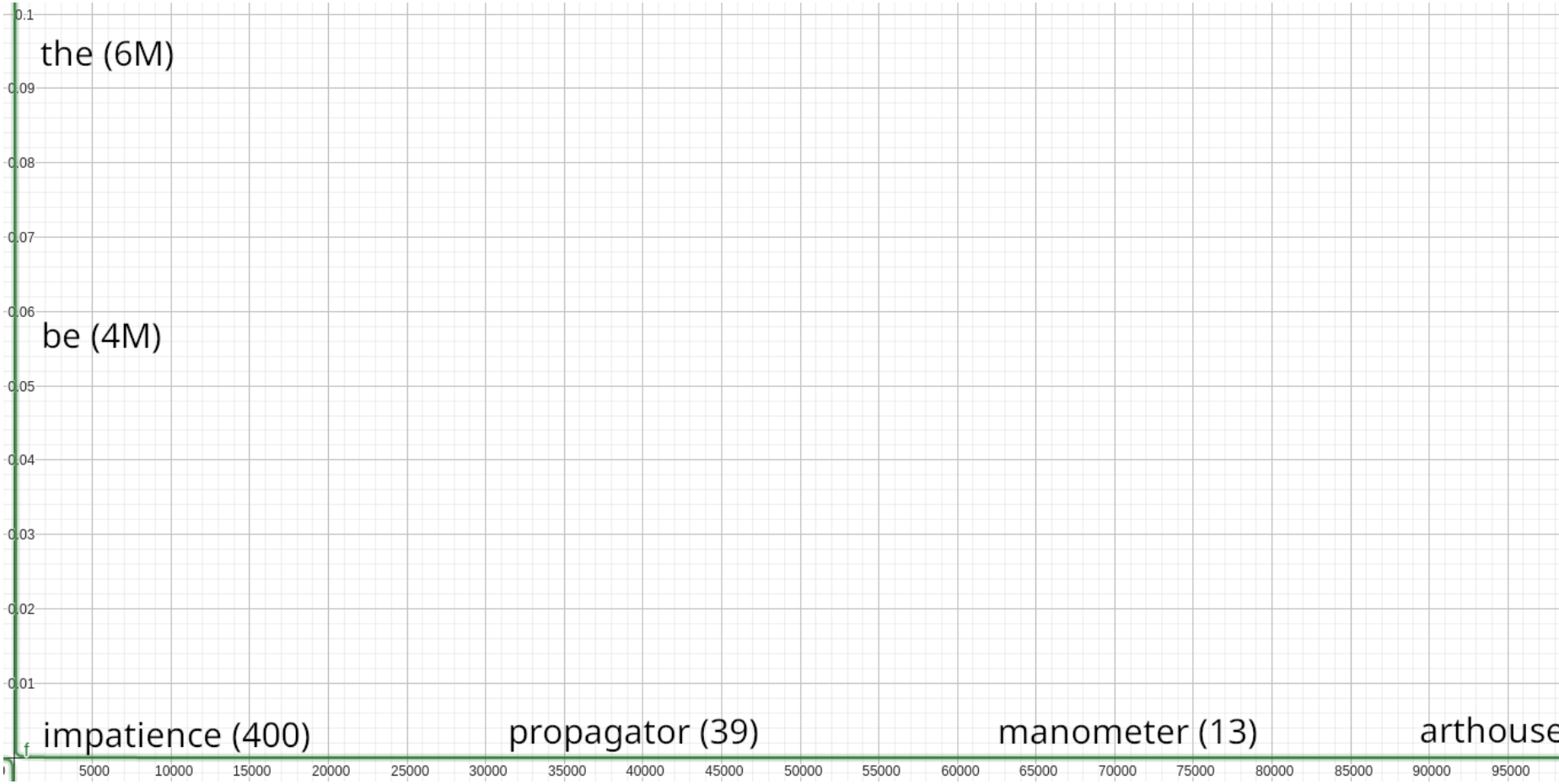
Zipfův zákon



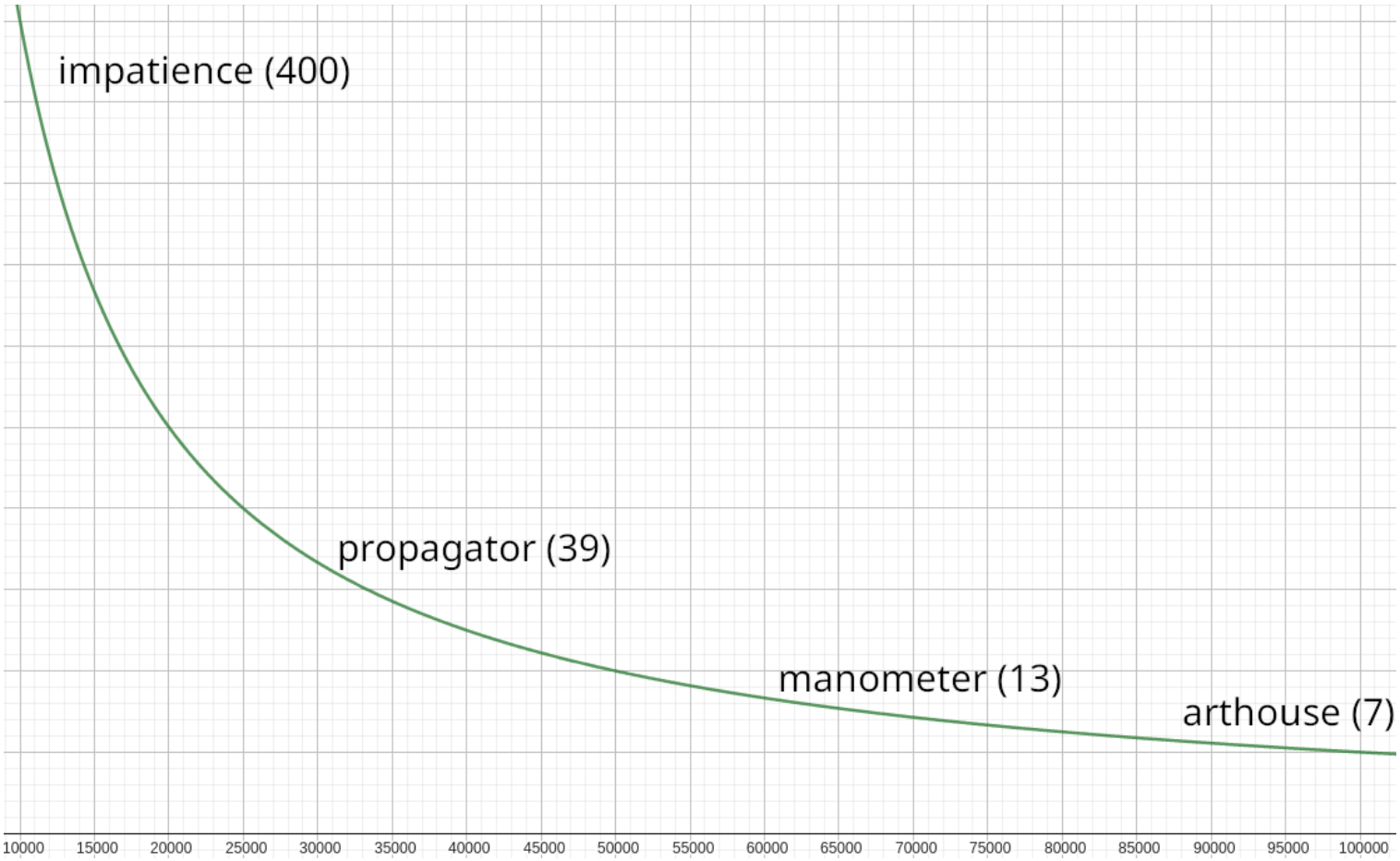
Zipfův zákon



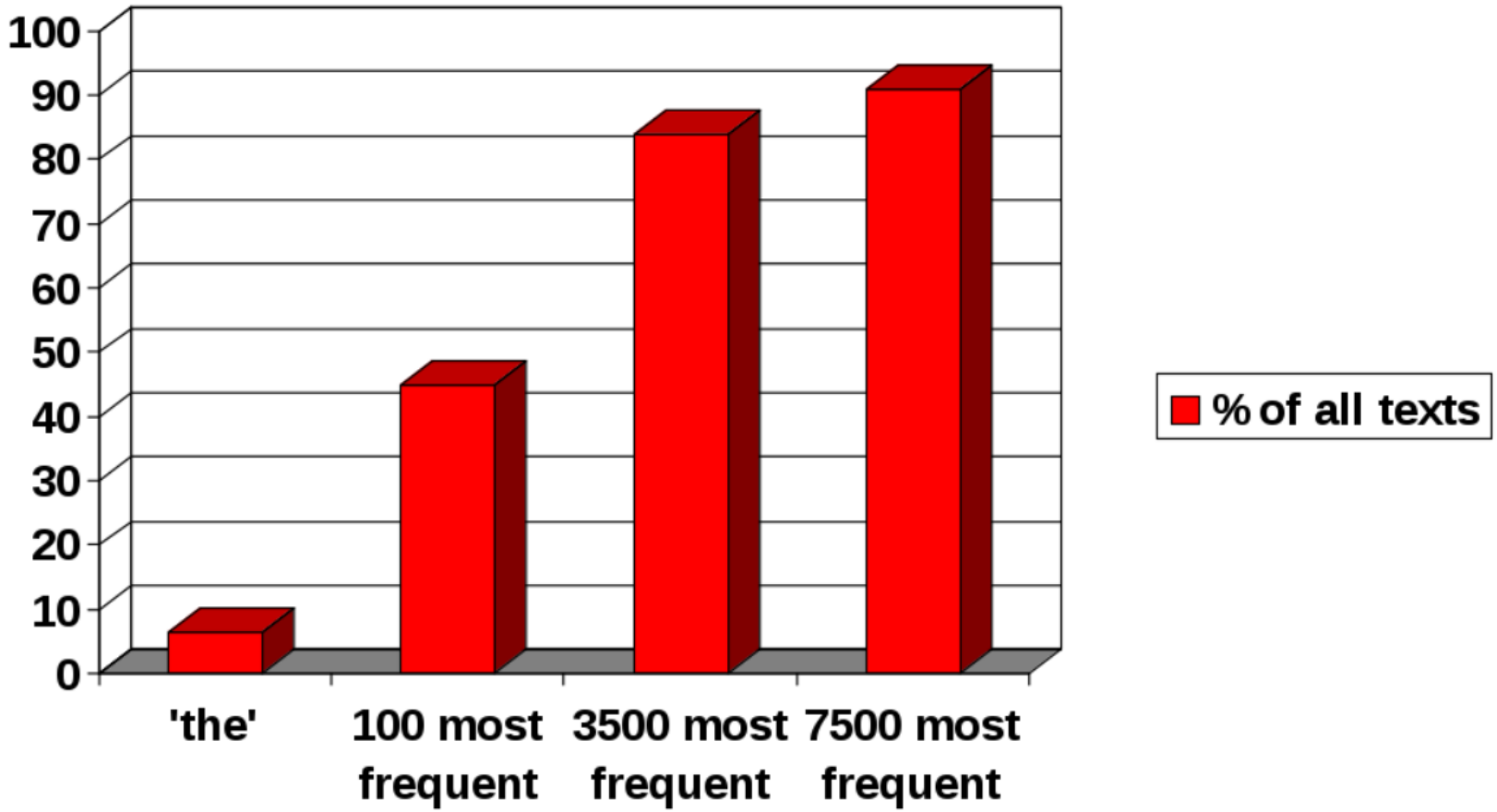
Zipfův zákon



Zipfův zákon



Zipfův zákon

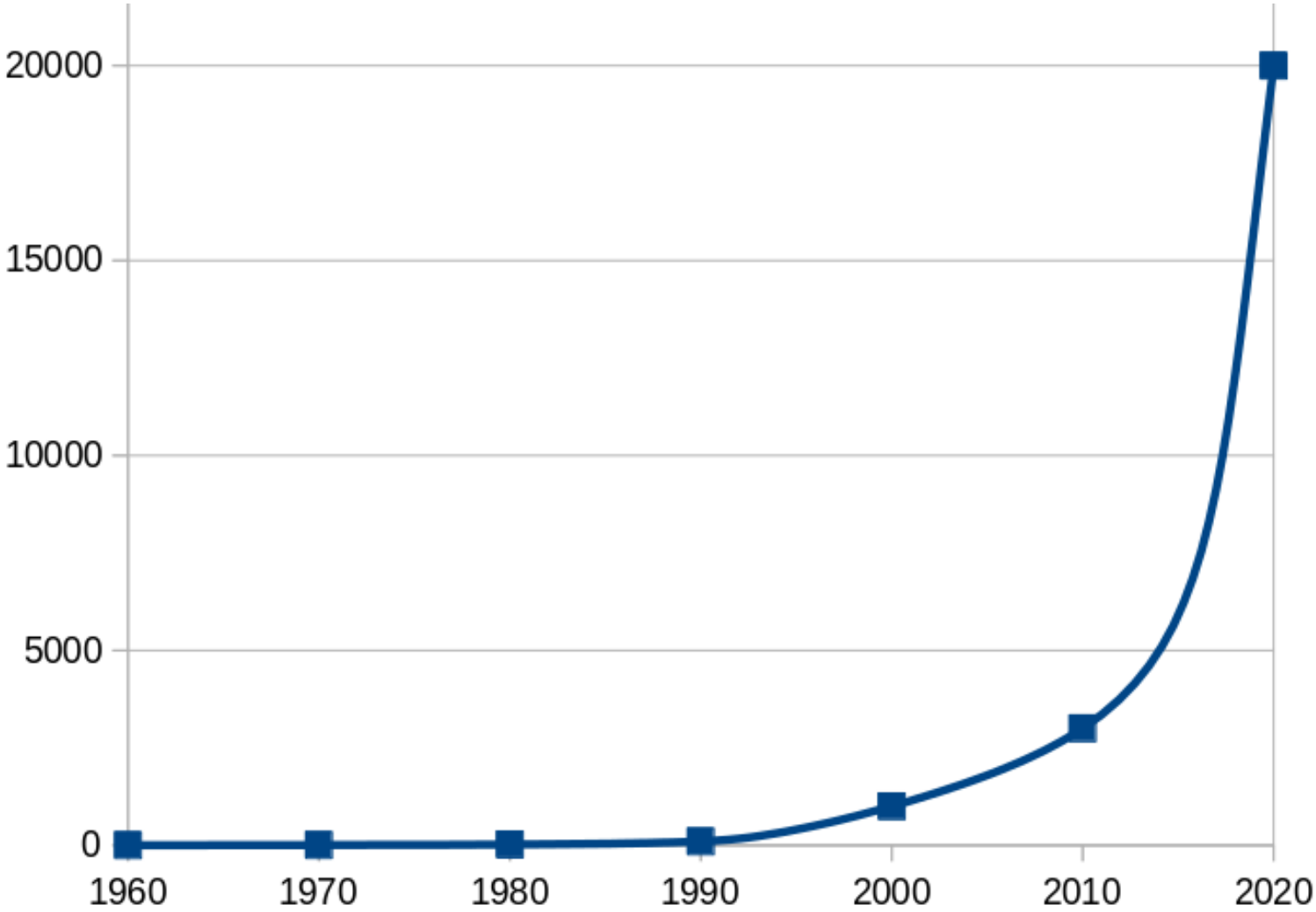


Oxford English Dictionary: about 300,000 entries

Zipfův zákon

Slovo	pozice	frekvence	pozice x frekvence
the	1	6,000,000	6,000,000
to	10	900,000	9,000,000
as	100	90,000	9,000,000
playing	1000	9,000	9,000,000
paint	2000	4,000	8,000,000
amateur	10,000	700	7,000,000

Velikost anglických korpusů



Zipfův zákon – zajímavosti

- Platí pro většinu přirozených jazyků
  - dokonce i pro sekvence náhodně volených znaků (vč. mezery)
  - pro širokou škálu jevů (distribuce významů slov, syntaktických vazeb, ...)
  - je třeba s ním vždy počítat
- „Ekonomické pravidlo" 80 : 20
  - 80 % problému vyřešíme s 20% úsilím
  - alternativní formulace Zipfova zákona
- Platí i pro mnoho „nejazykových" jevů
  - počet obyvatel měst, platy, velikost společností, ...

Zákon velkých čísel

- Potřeba velkých dat
  - čím více pokusů provádíme nad určitým pravděpodobnostním rozložením, tím více se průměr pokusů blíží očekávané hodnotě (průměru) tohoto pravděpodobnostního rozložení
- Alternativně
  - čím více dat máme, tím méně náhodných odchylek budou obsahovat
- Například
  - pokud budeme sledovat jednu molekulu vody v moři, bude se její pohyb jevit náhodný
  - pokud budeme sledovat významný podíl molekul, jsme schopni pozorovat vlnění, příliv a odliv, mořské proudy...

Zákon velkých čísel

- Platí ve všech oblastech statistiky
  - pokud budeme mít jazykový korpus o např. 100 slovech, jsme příliš ovlivněni náhodností výběru a statistické charakteristiky nemají smysl
  - $\rightarrow$ korpusy o velikosti miliard slov

Statistické testování hypotéz

- Cíl: statistická průkaznost
  - ověřit, zda příslušná statistická data potvrzují nějakou hypotézu
- Příklad: hádání karet
  - člověk se pokouší uhádnout barvu karty, která je mu ukázána z rubu
  - kolikrát musí uhodnout (např. z 25 pokusů), abychom mohli říct, že „je jasnovidec"?
  - uhádne 5x – nejspíš náhoda
  - uhádne 24x – nejspíš „je jasnovidec"
  - uhádne 11x – ?
  - jak určit hranici?

Statistické testování hypotéz

- I 25 úspěšných pokusů může být náhoda
  - vyloučit to neumíme
  - umíme ale vyjádřit pravděpodobnost takové události

Statistické testování hypotéz: pojmy

- Nulová hypotéza H_0
  - výchozí názor, který chceme vyvrátit
  - musíme ji umět vyčíslit
  - „dotyčný hádá náhodně"
- Alternativní hypotéza H_1
  - ta, pro kterou hledáme oporu v datech
  - doplněk nulové hypotézy (třetí možnost neexistuje)
  - „dotyčný nehádá náhodně"
- Chyba typu I
  - potvrdíme alternativní hypotézu, ta přitom neplatí
  - prohlásíme dotyčného za jasnovidce, ten přitom jen tipoval
  - chceme minimalizovat pravděpodobnost této chyby

Statistické testování hypotéz: pravděpodobnost chyby

- Pravděpodobnost chyby
  - 1 tip má pravděpodobnost úspěchu 1/4
  - 25/25 úspěšných pokusů: $(1/4)^{25}$, tj. cca 10^{-15}
  - (předpokládáme, že pokusy jsou nezávislé)
  - $\rightarrow$ pokud v případě 25 úspěšných pokusů prohlásíme dotyčného za jasnovidce, spleteme se s pravděpodobností cca 10^{-15}
- Statistická průkaznost
  - pokud pravděpodobnost chyby je menší než 1-5 %
  - došlo k vyvrácení nulové hypotézy
  - = alternativní hypotéza byla statisticky prokázána
  - 1 % odpovídá 12/25 úspěšným pokusům v hádání karet

Statistické testování hypotéz: nástrahy

- Opakování pokusů
  - pokud zopakujeme pokus vícekrát, pravděpodobnost chyby se zvětšuje
  - musíme uvažovat všechny provedené pokusy
- Pokud se nepodaří vyvrátit nulovou hypotézu
  - neznamená to, že nulová hypotéza platí
  - „nepodařilo se prokázat souvislost" $\neq$ „podařilo se prokázat, že souvislost neexistuje"
  - podobně neprokázání viny u soudu neprokazuje nevinu obžalovaného