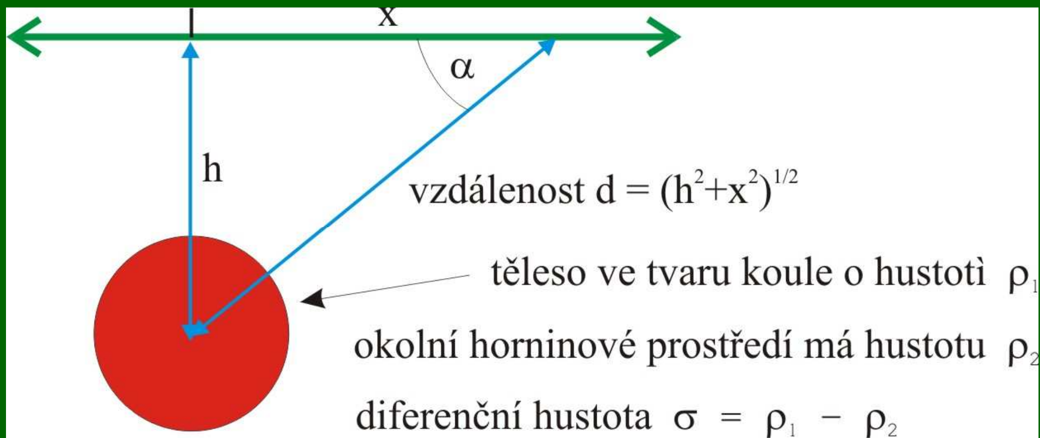
1. Úlohy z gravimetrie

Úvodní problém – nakreslete graf znázorňující tíhový účinek koule podle vzorce pro vertikální složku.

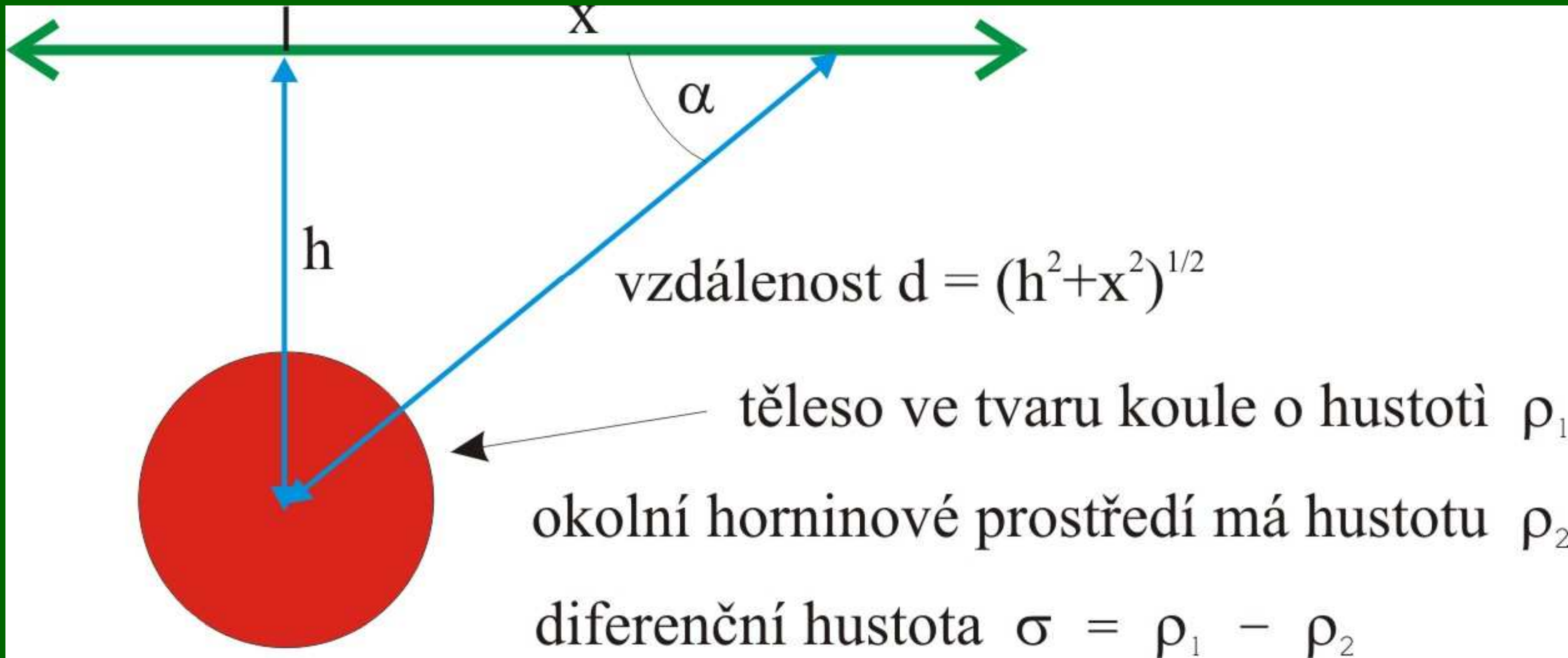
hloubka středu koule	$h = 500$ m
poloměr koule	$R = 150$ m
diferenční hustota	$\sigma = 500$ kg/m^3



1. Úlohy z gravimetrie

Pro gravitační zrychlení g obecně platí: $$g = \frac{\kappa M}{d^2}$$

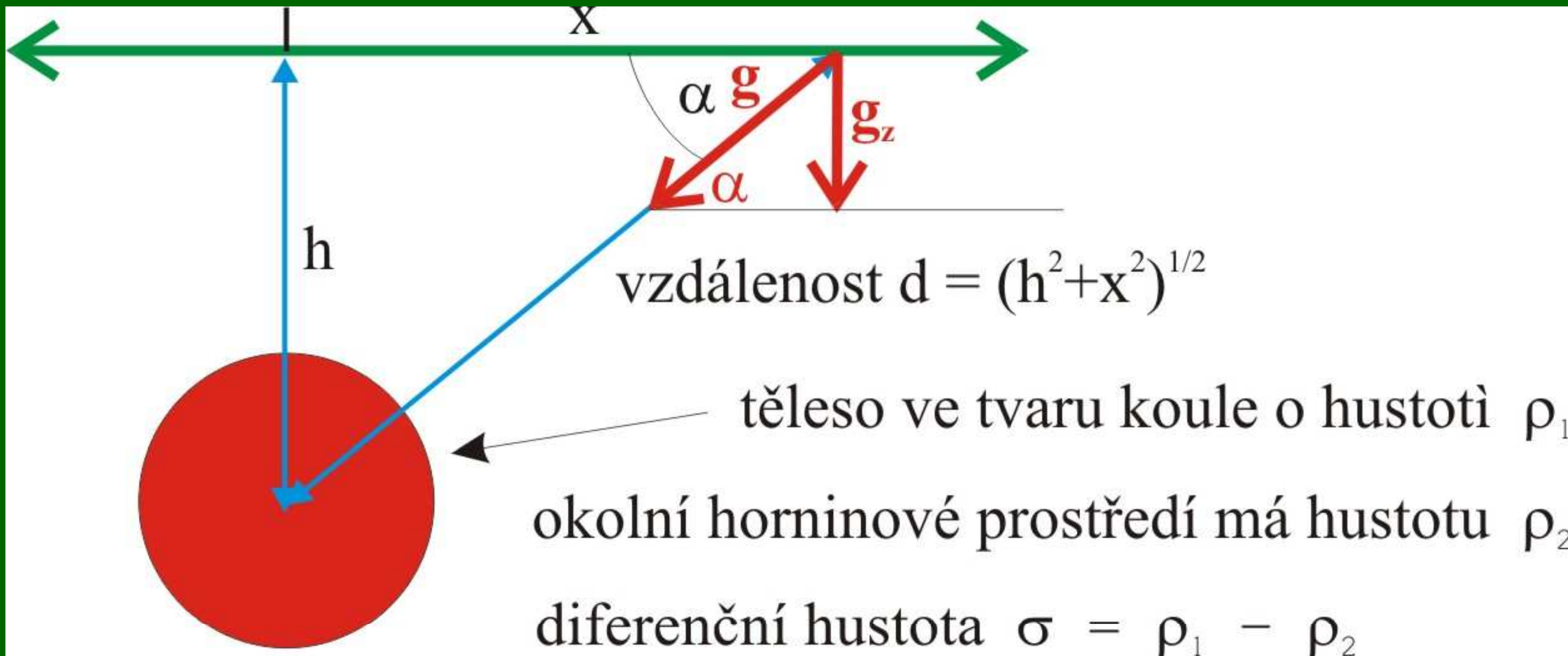
Vzdálenost je ale: $$d = \sqrt{x^2 + h^2}$$



1. Úlohy z gravimetrie

Gravitační zrychlení tedy je dáno: $$g = \frac{\kappa M}{x^2 + h^2}$$

Podle zadání nás ale zajímá pouze vertikální složka gravitačního zrychlení g_z: $$g_z = g \sin\alpha$$



1. Úlohy z gravimetrie

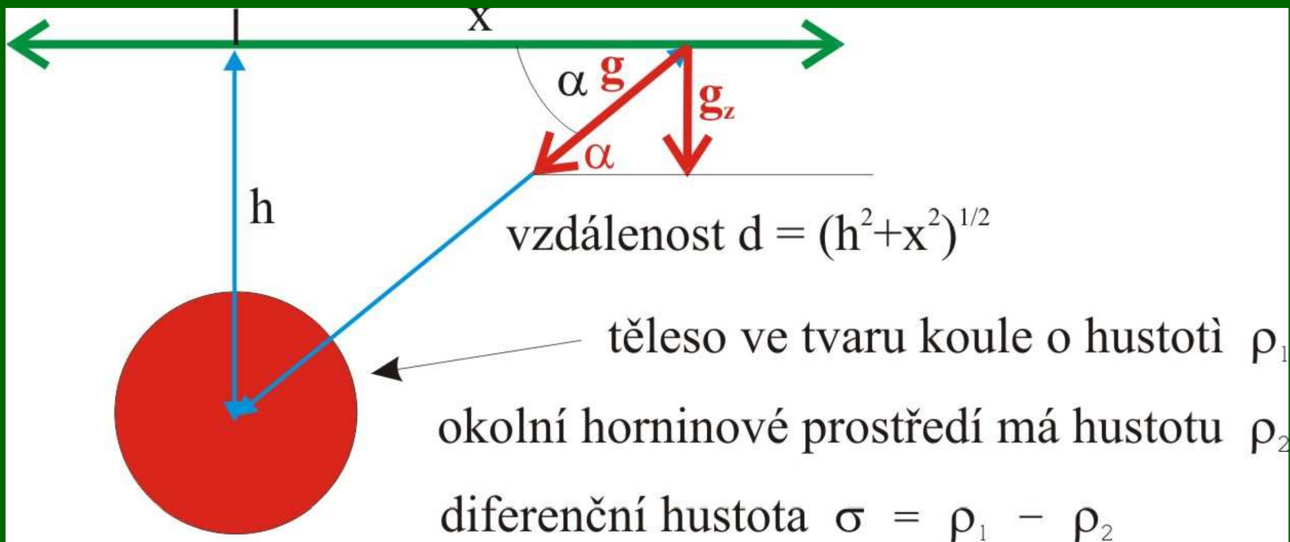
Gravitační zrychlení tedy je dáno:

$$g = \frac{\kappa M}{x^2 + h^2}$$

Podle zadání nás ale zajímá pouze vertikální složka gravitačního zrychlení g_z:

$$g_z = g \sin \alpha$$

Současně ale vidíme, že sinα si můžeme vyjádřit jako:



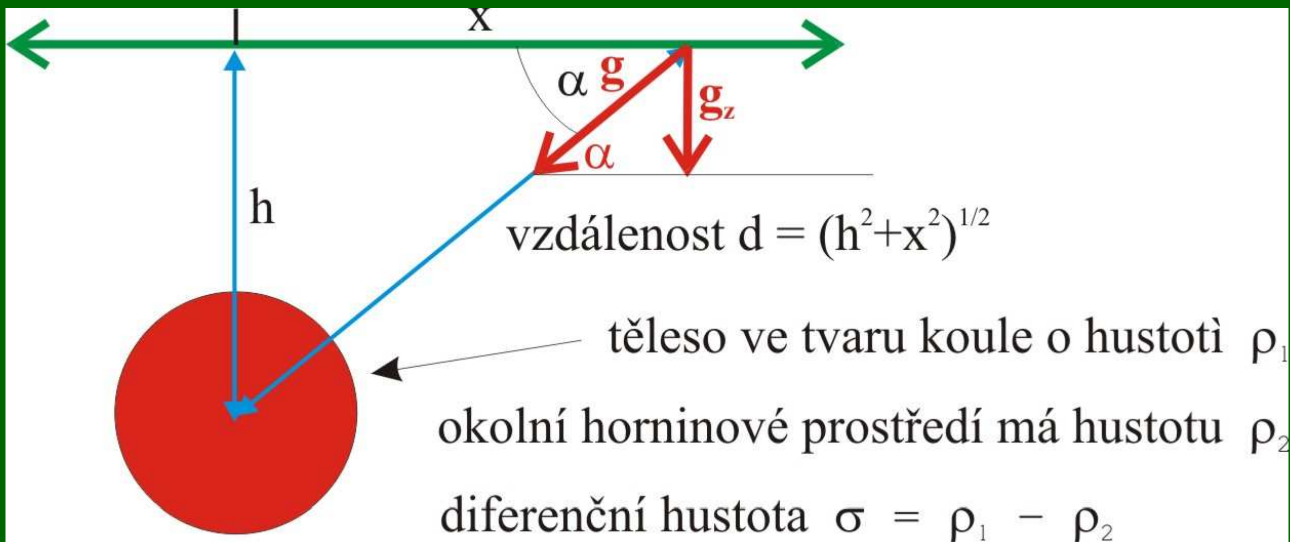
$$\sin \alpha = \frac{h}{d}$$

$$d = \sqrt{x^2 + h^2}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Tedy:

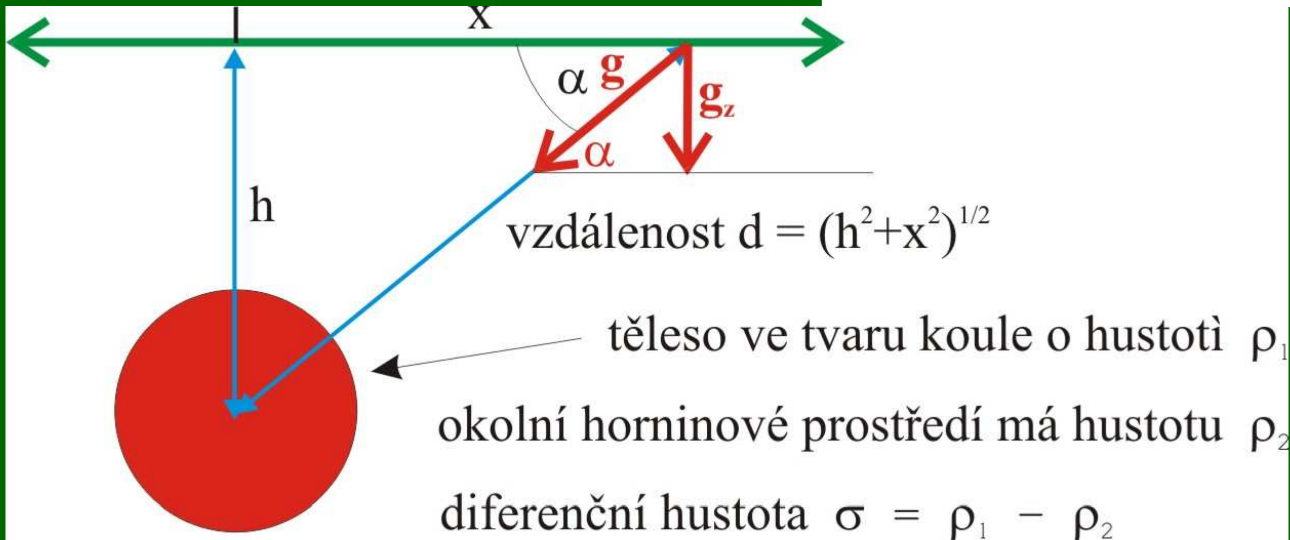
$$g_z = g\sin\alpha = \frac{\kappa M}{x^2+h^2}\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2+h^2\right)^3}}$$



1. Úlohy z gravimetrie

Hmotnost M je v našem případě nutno chápat nikoli jako celou hmotnost koule, ale jako diferenční hmotnost (oč je hmotnost odlišná od hmotnosti okolního prostředí o stejném objemu). M tedy závisí na objemu a na diferenční hustotě σ:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 . \sigma$$



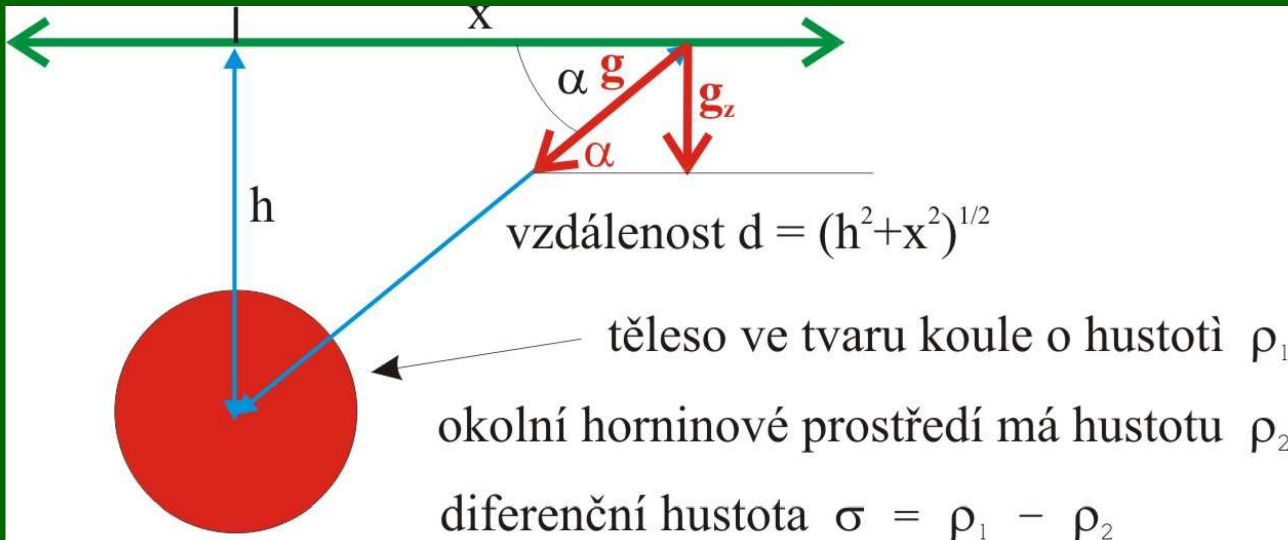
1. Úlohy z gravimetrie

Hmotnost M je v našem případě tedy:

$$M = \frac{4}{3}\pi 150^3.500 = 7{,}068{,}583{,}471 kg$$

Vertikální složka g je po dosazení:

$$g_z = \frac{6{,}67.10^{-11}.7068583471.500}{\sqrt{\left(x^2 + 500^2\right)^3}} = \frac{235{,}737259}{\sqrt{\left(x^2 + 500^2\right)^3}} m.s^{-2}$$



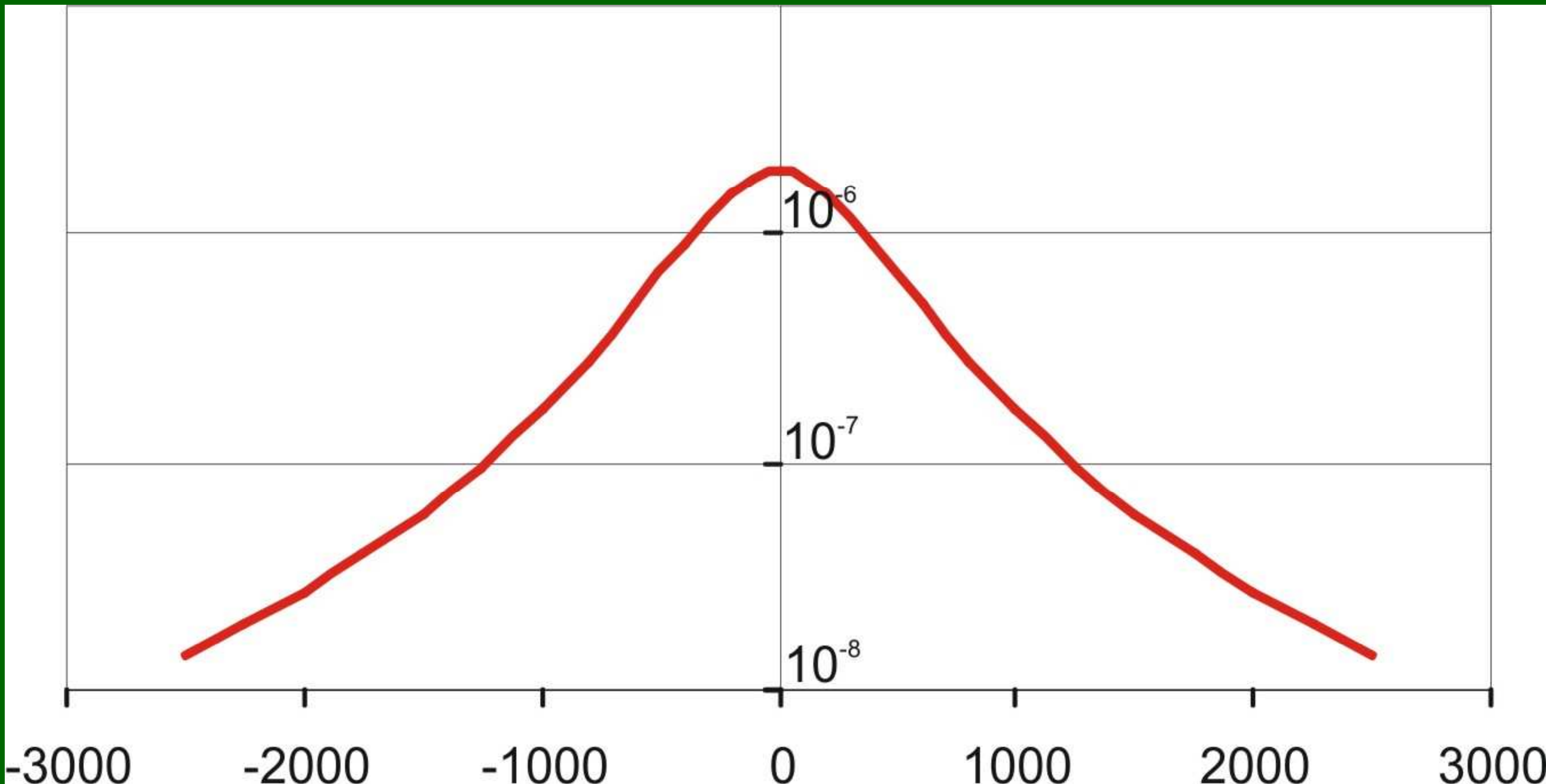
1. Úlohy z gravimetrie

Po dosazení za x (vzdálenost na profilu od bodu 0) můžeme doplnit tabulku hodnot vertikální složky gravitačního zrychlení v jednotlivých bodech profilu:

x [m]	Vz [m/s^2]	x [m]	Vz [m/s^2]
-2500	1,42252 . 10^{-8}	200	1,50949 . 10^{-6}
-2250	1,92522 . 10^{-8}	400	8,97951 . 10^{-7}
-2000	2,69057 . 10^{-8}	600	4,94804 . 10^{-7}
-1750	3,91016 . 10^{-8}	800	2,80765 . 10^{-7}
-1500	5,96373 . 10^{-8}	1000	1,6868 . 10^{-7}
-1250	9,66076 . 10^{-8}	1250	9,66076 . 10^{-8}
-1000	1,6868 . 10^{-7}	1500	5,96373 . 10^{-8}
-800	2,80765 . 10^{-7}	1750	3,91016 . 10^{-8}
-600	4,94804 . 10^{-7}	2000	2,69057 . 10^{-8}
-400	8,97951 . 10^{-7}	2250	1,92522 . 10^{-8}
-200	1,50949 . 10^{-6}	2500	1,42252 . 10^{-8}
0	1,8859 . 10^{-6}		

1. Úlohy z gravimetrie

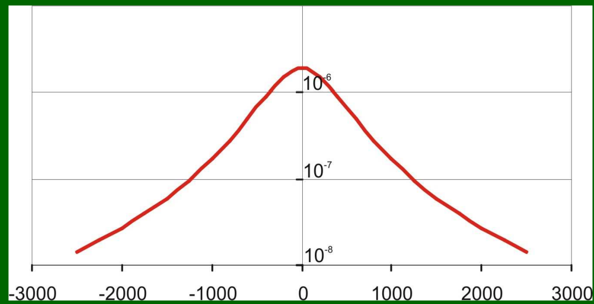
Vypočtené hodnoty pak vyneseme do grafu:



1. Úlohy z gravimetrie

Obrácené úlohy vycházející z úvodního problému:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



Úloha 1.1: Vypočti poloměr kulového tělesa, jehož tíhový účinek gz ve vzdálenosti 1000m od průmětu středu tělesa na povrch je 2,1 $*10^{-7}$ m/s^2.

hloubka středu koule	$h = 500$ m
diferenční hustota	$\sigma = 500$ kg/m^3

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.1: Vypočti poloměr kulového tělesa, jehož tíhový účinek gz ve vzdálenosti 1000m od průmětu středu tělesa na povrch je 2,1 $*10^{-7}$ m/s^2.

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}} \Leftrightarrow M = \frac{g_z \sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}{\kappa h}$$

hloubka středu koule $h = 500$ m

diferenční hustota $\sigma = 500$ kg/m^3

1. Úlohy z gravimetrie

Dosadíme do vzorce pro hmotnost M:

$$M = \frac{g_z\sqrt{\left(x^2+h^2\right)^3}}{\kappa h} = \frac{2{,}1\times 10^{-7}\sqrt{(1000^2+500^2)^3}}{6{,}67\times 10^{-11}.500}$$

$$M = 8{,}8\times 10^9\,\mathrm{kg}$$

Nyní známe hmotnost i diferenční hustotu, hledáme poloměr.

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3.\sigma$$

1. Úlohy z gravimetrie

Nyní známe hmotnost i diferenční hustotu, hledáme poloměr.

$$M = 8{,}8 \times 10^9\,\mathrm{kg}$$

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 . \sigma \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\sigma}}$$

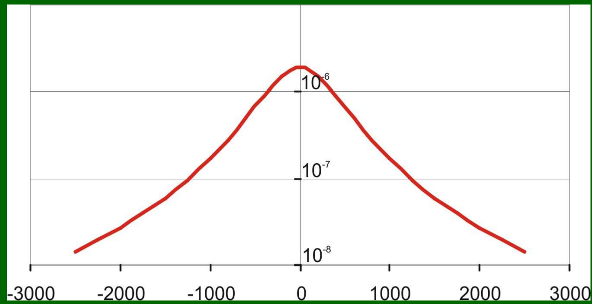
Opět dosadíme do vzorce:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\sigma}} = \sqrt[3]{\frac{3 . 8{,}8 \times 10^9}{4 . 3{,}14 . 500}} \cong 161\mathrm{m}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Ověřme nyní blíže, jaký je vztah mezi poloměrem a tíhovým účinkem:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



Úloha 1.2: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se poloměr hmotné koule dvakrát?

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.2: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se poloměr hmotné koule dvakrát?

Změna poloměru se projeví (při neměnné diferenční hustotě) změnou hmotnosti – hloubka, staničení i konstanta κ se nemění.

$$g_{z1} = \frac{\kappa M_1 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$

$$g_{z2} = \frac{\kappa M_2 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{\dfrac{\kappa M_2 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}}{\dfrac{\kappa M_1 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.2: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se poloměr hmotné koule dvakrát?

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{\dfrac{\kappa M_2 h}{\sqrt{\left(x^2+h^2\right)^3}}}{\dfrac{\kappa M_1 h}{\sqrt{\left(x^2+h^2\right)^3}}} = \frac{M_2}{M_1}$$

Tíhový účinek je přímo úměrný hmotnosti, závislost je lineární.

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.2: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se poloměr hmotné koule dvakrát?

Změna poloměru se projeví (při neměnné diferenční hustotě) změnou hmotnosti.

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^{\,3}.\sigma$$

$$M_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^{\,3}.\sigma$$

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_2^{\,3}\sigma}{\frac{4}{3}\pi R_1^{\,3}\sigma}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.2: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se poloměr hmotné koule dvakrát?

Změna poloměru se projeví (při neměnné diferenční hustotě) změnou hmotnosti.

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_2{}^3\sigma}{\frac{4}{3}\pi R_1{}^3\sigma} = \frac{R_2{}^3}{R_1{}^3} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3$$

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.2: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se poloměr hmotné koule dvakrát?

Poloměr se zvětšil dvakrát, tj. platí: $$\frac{R_2}{R_1} = 2$$

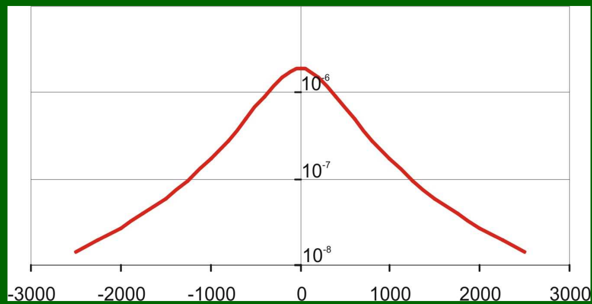
$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Tíhový účinek se zvětšil osmkrát.

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.3: Vypočti diferenční hustotu kulového tělesa, jehož tíhový účinek gz ve vzdálenosti 1000m od průmětu středu tělesa na povrch je 2,1 $*10^{-7}$ m/s^2.

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



hloubka středu koule	h = 500 m
poloměr	R = 180 m

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.3: Vypočti diferenční hustotu kulového tělesa, jehož tíhový účinek gz ve vzdálenosti 1000m od průmětu středu tělesa na povrch je 2,1 *10^{-7} m/s^2.

Opět hledáme hmotnost M:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}} \Leftrightarrow M = \frac{g_z \sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}{\kappa h}$$

$$M = \frac{g_z \sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}{\kappa h} = \frac{2{,}1 \times 10^{-7} \sqrt{(1000^2 + 500^2)^3}}{6{,}67 \times 10^{-11} . 500} = 8{,}8 \times 10^9 \,\mathrm{kg}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Nyní známe hmotnost i poloměr, hledáme diferenční hustotu.

$$M = 8{,}8 \times 10^9 \,\mathrm{kg}$$

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 . \sigma \Leftrightarrow \sigma = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

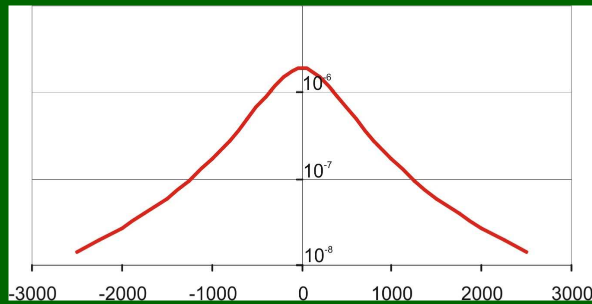
Opět dosadíme do vzorce:

$$\sigma = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3.8{,}8\times 10^9}{4.3{,}14.180^3} = 360 \,\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$$

1. Úlohy z gravimetrie

Ověřme nyní blíže, jaký je vztah mezi diferenční hustotou a tíhovým účinkem:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



Úloha 1.4: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se diferenční hustota hmotné koule dvakrát?

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.4: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se diferenční hustota hmotné koule dvakrát?

Změna diferenční hustoty se projeví (při neměnném poloměru) změnou hmotnosti – hloubka, staničení i konstanta k se nemění.

$$g_{z1} = \frac{\kappa M_1 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$

$$g_{z2} = \frac{\kappa M_2 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{\dfrac{\kappa M_2 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}}{\dfrac{\kappa M_1 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Změna diferenční hustoty se projeví (při neměnném poloměru) změnou hmotnosti – hloubka, staničení i konstanta k se nemění.

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{\dfrac{\kappa M_2 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}}{\dfrac{\kappa M_1 h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}} = \frac{M_2}{M_1}$$

Tíhový účinek je přímo úměrný hmotnosti, závislost je lineární.

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.4: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se diferenční hustota hmotné koule dvakrát?

Změna diferenční hustoty se projeví (při neměnném poloměru) změnou hmotnosti.

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^{\,3}.\sigma$$

$$M_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^{\,3}.\sigma$$

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_2}{\frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_1}$$

1. Úloha z gravimetrie

Úloha 1.4: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se diferenční hustota hmotné koule dvakrát?

Změna diferenční hustoty se projeví (při neměnném poloměru) změnou hmotnosti.

$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_2}{\frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Úloha 1.4: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z, zvětší-li se diferenční hustota hmotné koule dvakrát?

Diferenční hustota se zvětšila dvakrát, tj. platí:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 2$$

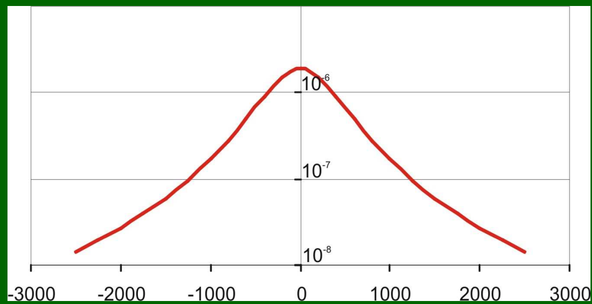
$$\frac{g_{z2}}{g_{z1}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 2$$

Tíhový účinek se zvětšil dvakrát.

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.5: Vypočti hloubku kulového tělesa, jehož tíhový účinek gz ve vzdálenosti 0m od průmětu středu tělesa na povrch je 2,1 $*10^{-6}$ m/s^2.

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



diferenční hustota $\sigma = 500$ kg/m^3

poloměr R = 180 m

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.5: Vypočti hloubku kulového tělesa, jehož tíhový účinek gz ve vzdálenosti 0m od průmětu středu tělesa na povrch je 2,1 $*10^{-6}$ m/s^2.

Všimněme si, že pro x=0 (tj. pro místo přímo nad středem tělesa) se vzorec pro tíhový účinek výrazně zjednoduší:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}} = \frac{\kappa M h}{\sqrt{(h^2)^3}} = \frac{\kappa M h}{h^3} = \frac{\kappa M}{h^2}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Snadno si ze zjednodušeného vzorce vyjádříme h:

$$g_z = \frac{\kappa M}{h^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{\kappa M}{g_z}}$$

Potřebujeme znát také hmotnost M:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3.\sigma = \frac{4}{3}\pi.180^3.500 \cong 12{,}2\times 10^9$$

1. Úlohy z gravimetrie

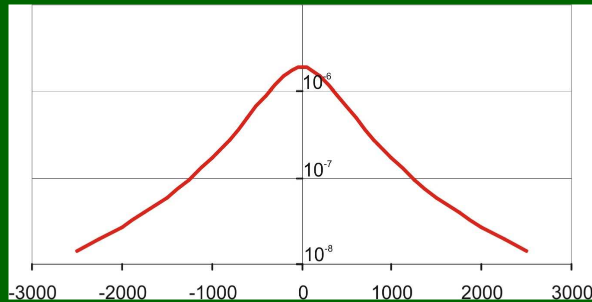
Nyní snadno dosadíme do vzorce:

$$h = \sqrt{\frac{\kappa M}{g_z}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} . 12{,}2 \times 10^{9}}{2{,}1 \times 10^{-6}}} \cong 623\mathrm{m}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Ověřme nyní blíže, jaký je vztah mezi hloubkou a tíhovým účinkem:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



Úloha 1.6: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z v místě nad středem hmotné koule, zvětší-li se hloubka hmotné koule dvakrát?

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.6: Kolikrát se zvětší tíhový účinek g_z v místě nad středem hmotné koule, zvětší-li se hloubka hmotné koule dvakrát?

Vyjdeme ze zjednodušeného vzorce pro x=0:

$$g_z = \frac{\kappa M}{h^2}$$

$$g_{z1} = \frac{\kappa M}{h_1^{\,2}}$$

$$g_{z2} = \frac{\kappa M}{h_2^{\,2}}$$

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.6: Kolikrát se zmenší tíhový účinek g_z v místě nad středem hmotné koule, zvětší-li se hloubka hmotné koule dvakrát?

$$g_{z1} = \frac{\kappa M}{h_1^2}$$

$$g_{z2} = \frac{\kappa M}{h_2^2}$$

$$\frac{g_{z1}}{g_{z2}} = \frac{\dfrac{\kappa M}{h_1^2}}{\dfrac{\kappa M}{h_2^2}} = \frac{h_2^2}{h_1^2}$$

Tíhový účinek je nepřímo úměrný hloubce.

1. Úlohy z gravimetrie

Úloha 1.6: Kolikrát se zmenší tíhový účinek g_z v místě nad středem hmotné koule, zvětší-li se hloubka hmotné koule dvakrát?

Hloubka se zvětšila dvakrát, tj. platí:

$$\frac{h_2}{h_1} = 2$$

$$\frac{g_{z1}}{g_{z2}} = \frac{h_2^{\,2}}{h_1^{\,2}} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = 2^2 = 4$$

Tíhový účinek se zmenšil čtyřikrát.

1. Úlohy z gravimetrie

Řešení úloh:

verze	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	verze	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
1	164 m	8krát	82 kg/m^3	2krát	591 m	4krát	11	228 m	8krát	220 kg/m^3	2krát	427 m	4krát
2	206 m	8krát	163 kg/m^3	2krát	430 m	4krát	12	292 m	8krát	461 kg/m^3	2krát	295 m	4krát
3	218 m	8krát	193 kg/m^3	2krát	396 m	4krát	13	309 m	8krát	545 kg/m^3	2krát	272 m	4krát
4	254 m	8krát	304 kg/m^3	2krát	315 m	4krát	14	359 m	8krát	859 kg/m^3	2krát	216 m	4krát
5	264 m	8krát	341 kg/m^3	2krát	298 m	4krát	15	373 m	8krát	964 kg/m^3	2krát	204 m	4krát
6	167 m	8krát	87 kg/m^3	2krát	557 m	4krát	16	241 m	8krát	260 kg/m^3	2krát	382 m	4krát
7	214 m	8krát	182 kg/m^3	2krát	385 m	4krát	17	309 m	8krát	546 kg/m^3	2krát	264 m	4krát
8	227 m	8krát	215 kg/m^3	2krát	354 m	4krát	18	327 m	8krát	645 kg/m^3	2krát	243 m	4krát
9	264 m	8krát	340 kg/m^3	2krát	282 m	4krát	19	380 m	8krát	1017 kg/m^3	2krát	193 m	4krát
10	274 m	8krát	381 kg/m^3	2krát	266 m	4krát	20	395 m	8krát	1141 kg/m^3	2krát	183 m	4krát