MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

Matematické aspekty hold'em pokeru

Bakalářská práce

Brno, 2009 Kateřina Kubišová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Matematické aspekty hold'em pokeru vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Davida Krumla, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Brně 3. června 2009 ....

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala Mgr. Davidovi Krumlovi, Ph.D., vedoucímu mé bakalářské práce, za cenné rady, připomínky a odkazy na zdroje informací.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Poker je světově uznávaná hra a existuje mnoho turnajů v pokeru na profesionální úrovni. Mnoho lidí se k hraní pokeru dostane přes internet, kde se nejprve naučí jak hrát a postupně zdokonalují své herní praktiky. Pak teprve začínají hrát v realném světě na různých turnajích. Někteří lidé hrají poker pouze pro zábavu, ale mnoho lidí se hraním pokeru dokonce úspěšně živí. Během dlouholetého hraní pokeru, si hráči tuto hru upravují. V dnešní době existuje více než 1000 druhů pokeru. Např. Five card drow, Texas hold'em, 7 card stud, Omaha. Mají odlišný počet kol vsázení, liší se v počtu hráčů, počtu karet a samozřejmě ve výši sázek. Poker může být hrán jako limitní hra, kde jsou sázky předem určeny, nebo hra bez limitu, kde sázka není nijak omezena. V této práci bych se chtěla zaměřit na zjednodušenou verzi pokeru, kterou hrají pouze dva hráči a místo karet každý z hráčů obdrží hodnotu z intervalu $(0, 1)$. Jejich strategie se v průběhu hry nemění, zůstávají konstantní. Tuto verzi jsem si vybrala, protože je jednoduchá na vysvětlení, má pouze jedno kolo sázek pro každého hráče a dá se s ní velice dobře pracovat, protože je velice názorná. Na začátku práce bych ráda popsala model pokeru Johna von Neumanna, ze které jsem vycházela. Jeho model dovoluje sázku pouze prvního hráče, druhý hráč nemůže zasáhnout do hry sázkou. Dále se budu zabývat rozšířením tohoto modelu pokeru, kdy druhý hráč může zasáhnout do hry sázkou. V obou těchto modelech byly nalezeny rovnice určující rovnovážnou hru, tzv. Nashovu rovnováhu. Tedy tyto rovnice určují strategie hráčů tak, že se jim nevyplatí hru nějakým způsobem měnit. Hlavním cílem mé práce bylo hledat nejlepší možné protihry proti různým typům hráčů, abychom mohli očekávat co nejlepší výsledky. Nejdříve jsme si zvolila 4 typy hráčů, kteří se vyskytují nejčastěji. Postupným střídáním akcí na velmi malých intervalech, jsem zjišťovala jakým nejlepším způsobem můžu rozdělit strategii, aby protihra byla co nejefektivnější. Hra proti známému hráči je ideální model, v reálném světě neexistuje. Proto jsem se v závěru práce pokusila popsat, jakým způsobem budeme postupovat proti neznámému hráči. Obecně jsem navrhla statistickou metodu, která nám pomůže se dostat k odhadům protihráčových parametrům.

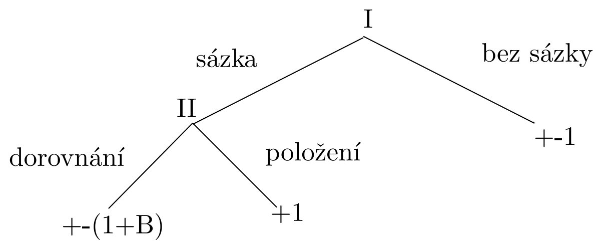
Kapitola 2

Strategie

- **Akce** - Jednotlivé možnosti hry. Fáze hry.
- **Strategie** - Souhrn akcí jednoho hráče. Hráč je pokaždé, když je na tahu, předem rozhodnut, kterou cestu použije. Předem má daný způsob hry.
- **Situace** - n-tice strategií. V této práci budeme situaci brát jako dvojici strategií, protože se bude týkat pouze dvou hráčů.
- **Užitečnost** - Průměrná výhra hráče.
- **Rovnovážná situace** - Je to situace, při níž se nevyplatí ani jednomu hráči měnit strategii (za předpokladu, že druhý hráč nemění strategii). Žádný z hráčů nemůže zlepšit své zisky jednostranným krokem

Poker patří mezi hry s nulovým součtem. To znamená, že jednotlivé výhry a prohry hráčů, pro každou strategií, jsou v součtu rovny nule. Vítěz získává výhru na úkor ostatních hráčů.

2.1 John von Neumann



Obr. 2.1.Strom sázek

John von Neumann (1903- 1957) byl americký matematik maďarského původu, který značnou mírou přispěl k mnoha oborům jako například: teorie množin, kvantová fyzika, ekonomika, numerická analýza, statistika. Díky jeho publikaci *Theory of Games and Economic Behavior* , kterou napsal společně s Oskarem Morgensternem, vznikla disciplína zvaná teorie her.

Jedna z jeho studií se zabývá modelem pokru s nulovým součtem a dvěma hráči. Tyto hráče si označíme Hráč I a Hráč II. Každý z hráčů musí před začátkem hry vložit povinnou sázku 1 žeton do banku, tzn. výše banku na začátku hry je 2. Každý hráč dostane jednu náhodně vybranou hodnotu z intervalu (0,1) , kterou protihráč nezná, pro Hráče I $x \in (0, 1)$, pro Hráče II $y \in (0, 1)$. Jako první začíná Hráč I, který může volit hru bez sázky (*check* - C) nebo sázku (*bet* - B). V první případě dochází k okamžitému porovnávání hodnot (*showdown*) a hráč s vyšší hodnotou vyhrává bank a jeho zisk je 1, v druhém případě Hráč I vkládá do banku sázku v předepsané výši $B > 0$ a na řadu přichází Hráč II, který má dvě možnosti, jakými může zareagovat. Dorovnání (*call* - CA) nebo položení (*fold* - F). Při dorovnání musí Hráč II vložit do banku sázku B a následně se porovnávají hodnoty. Hráč s vyšší hodnotou získává bank a jeho zisk činní 1+B. Pokud se Hráč II rozhodne položit, bank okamžitě vyhrává Hráč I a jeho zisk je povinný vklad prvního hráče. Možnosti hry znázorníme na grafu 2.1 V tomto modelu von Neumanna je zanedbávána možnost, kdy hodnoty obou hráčů jsou si rovny, protože tato možnost může nastat s pravděpodobností nula.

Hráč I používá optimální strategii, která je určena nějakými dvěmi čísly $a, b \in (0, 1)$, kde $a < b$. Při $x < a$ nebo $x > b$ začíná hru sázkou, v jiném případě začíná bez sázky. Při sázce rozlišujeme dvě možnosti, $x < a$ sázku jako *blaf* (hráč sází, i když má velmi nízké hodnoty a snaží se zastrašit protihráče) a $x > b$ na vysokou hodnotu. Pro Hráče II je zde mnoho optimálních strategií (John von Neumann našel všechny) a z toho právě jedna vede k rovnovážné situaci a je určena nějakým číslem $c \in (0, 1)$. Při $y > c$ hráč dorovnává a při $y < c$ pokládá. Optimální hodnoty čísel a, b, c vzhledem k sázce B jsou

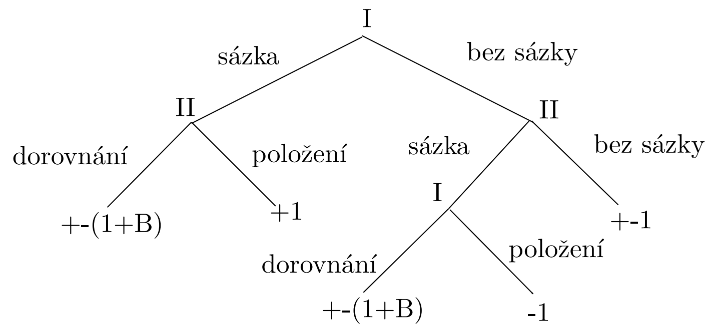
$$\begin{aligned} a &= \frac{B}{(1+B)(4+B)}, \\ b &= \frac{2+4B+B^2}{(1+B)(4+B)}, \\ c &= \frac{B(3+B)}{(1+B)(4+B)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Výše průměrného zisku Hráče I je dána vztahem

$$V_1(B) = \frac{B}{(1+B)(4+B)}. \tag{2.2}$$

2.2 Rozšíření modelu von Neumanna

Model von Neumanna nyní můžeme rozšířit o jedno kolo sázek. Pokud Hráč I začne hru sázkou bude postup stejný jako u modelu von Neumanna. V případě, že začne Hráč I hru bez sázky, může se Hráč II rozhodnout mezi dvěmi možnostmi hry (bez sázky nebo sázka) .



Obr. 2.2.Strom sázek

Hra bez sázky pokračuje okamžitým porovnáváním hodnot, přičemž hráč s vyšší hodnotou získává bank a jeho zisk je 1. Pokud se rozhodne Hráč II vsadit, musí do banku vložit sázku v předepsané výši. Na řadu se dostává opět Hráč I. Ten může reagovat dorovnáním nebo položením. Při dorovnání musí doložit sázku B do banku. Poté dochází k porovnávání hodnot a opět hráč s vyšší hodnotou získává bank. Jeho zisk činní 1+B. Když se Hráč I rozhodne položit, bank vyhrává Hráč II a jeho je zisk 1.

Tento model můžeme znázornit na diagramu 2.2

Pro každé $x \in (0, 1)$ má Hráč I tři možnosti akce:

- B Sázka (*bet*)
- CC Bez sázky - dorovnání (*check - call*) , hráč začíná hru bez sázky a v případě kdy hráč II vsadí, pak tuto sázku dorovná
- CF Bez sázky - položení (*check - fold*) , hráč začíná hru bez sázky a v případě kdy hráč II vsadí, pak hráč I položí

Při hledání optimální strategie se nám interval $(0, 1)$ rozdělí na čtyři části. Pro první část $(0, a)$ připadá možnost B, kdy hráč vsází jako *blaf.* Na další části intervalu (a, b) nám připadá možnost CF. Ve třetí části (b, c) máme možnost CC a v poslední části $(c, 1)$ máme znovu B, kdy hráč vsází, protože má vysoké hodnoty. Nyní máme tři neznáme $0 < a < b < c < 1$.

Pokud hráč I začíná hru sázkou, hráč II má dvě možnosti pro každé $y \in (0,1)$:

- Dorovnání C(*call*)
- Položení F(*fold*)

Optimální strategii najdeme pomocí nějakého čísla d, které nám rozdělí interval $(0,1)$ na interval $(0,d)$. Ve kterém hráč používá možnost položení a $(d,1)$, kde hráč dorovnává. Pokud hráč I začíná hru bez sázky, hráč II může:

- Vsadit B (*bet*)
- Hrát bez sázky C (*check*)

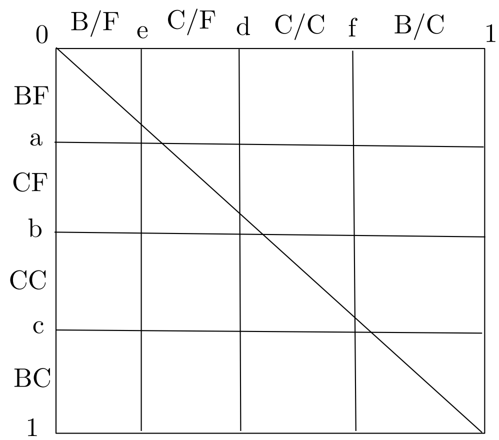
Pro nalezení optimální strategie použijeme nějaké čísla e, f. Pro sázku jako blaf budeme využívat interval $(0,e)$, při hře bez sázky budeme mít interval (e,f) a při sázce na vysokou hodnotu mít interval $(f,1)$. Takže máme $0 < d < 1$, $0 < e < f < 1$.

Domníváme se, že $a < e < b < f < c$ a $a < d < c$. Budeme hledat souvislosti mezi těmito hodnotami, přičemž využijeme princip rovnováhy hranic jednotlivých intervalů. Tento princip funguje tak, že pokud Hráč I dostane hodnotu například $x = a$, potom proti optimální strategii Hráče II může použít jak B tak CF, či-li pokud $x = a$, jeho očekávaný výnos bude stejný, i když bude hrát B i CF. Stejný princip platí pro všech šest mezních bodů. Rovnice, které obdržíme nazýváme rovnice rovnováhy (*the indifference equations*). Pokud zkombinujeme možnosti hráče II, dostaneme všechny možnosti jeho akcí. Každá jeho akce se bude skládat z reakce na hru bez sázky/reakce na sázku:

- B/C sázka nebo dorovnání (*bet/call*)
- B/F sázka nebo položení (*bet/fold*)
- C/C bez sázky nebo dorovnání (*check/call*)

- C/F bez sázky nebo položení (*check/fold*)

Pro názornost budeme jednotlivé strategie obou hráčů znázorňovat na čtverci 2.3

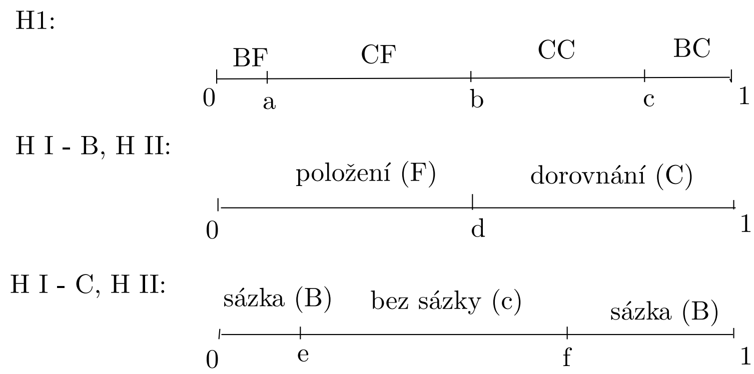


Obr. 2.3.Rozdělení strategií

Na svislé ose máme rozdělení strategií prvního hráče, na vodorovné rozdělení strategií druhého hráče. Každou strategii od sebe oddělíme úsečkouk, tím nám vzniknou plochy vyjadřující jednu hru. Do každé takové plochy, pak budeme psát jednotlivé zisky ze hry, právě pro jednoho vybraného hráče. Samozřejmě pro druhého hráče bude hodnota zisku opačná.

2.3 Rovnice rovnováhy (*The indiference equations*)

Předpokládáme, že bank po povinném vkladu nepatří žádnému hráči, takže je to hra s konstantní částkou 2. Bank může být ale také obohacen o sázky, které jsou označeny $B > 0$. Pro názornost můžeme hodnoty a, b, c, d, e, f znázornit na grafech 2.4:



Obr. 2.4.Rozložení intervalů

1. Pro Hráče I v hodnotě a: Pokud Hráč I vsadí (B) v a, vyhraje 2 s pravděpodobností d a prohraje B s pravděpodobností $1-d$. Pokud bude hrát bez sázky - položení (CF) v a, jeho výhra bude 0. Tyto dvě možnosti se rovnají, takže dostáváme rovnici $2d - B(1-d) = 0$. Odtud dostaneme

$$d = B/(2+B).$$

2. Pro Hráče I v hodnotě b: Pokud Hráč I bude hrát bez sázky - položení (CF) v b, jeho výhra bude 2 s pravděpodobností $b-e$. Pokud bude hrát bez sázky - dorovnání (CC), vyhraje $2+B$ s pravděpodobností e, 2 s pravděpodobností $b-e$ a prohraje B s pravděpodobností $1-f$. Dostaneme tedy rovnici

$$(2+B)e + Bf = B.$$

3. Pro hráče I v hodnotě c: Pokud Hráč I bude hrát bez sázky - dorovnání (CC) v c, vyhraje $2+B$ s pravděpodobností $e+(c-f)$, 2 s pravděpodobností $f-e$ a prohraje B s pravděpodobností $1-c$. Pokud Hráč I vsadí (B) v c, vyhraje 2 s pravděpodobností d, $2+B$ s pravděpodobností $c-d$ a prohraje B s pravděpodobností $1-c$. Rovnice

pak má tvar

$$d + e - f = 0.$$

4. Pro hráče II v hodnotě d: Pokud Hráč II položí (F) na sázku Hráče I v d, nevyhraje nic. Pokud dorovná(C) sázku Hráče I v d, vyhraje $2 + B$ s pravděpodobností $\frac{a}{a+c-1}$ a prohraje B s pravděpodobností $\frac{1-c}{a+1-c}$. Po úpravě dostane rovnici

$$B = (2 + B)a + Bc.$$

5. Pro hráče II v hodnotě e: Pokud Hráč II vsází (B) v e, vyhraje 2 s pravděpodobností $\frac{b-a}{c-a}$ a prohraje B s pravděpodobností $\frac{c-b}{c-a}$. Pokud Hráč II hraje bez sázky (C) v e , vyhraje 2 s pravděpodobností $\frac{e-a}{c-a}$. Tímto dostaneme rovnici

$$(2 + B)b - Bc - 2e = 0.$$

6. Pro hráče II v hodnotě f: Pokud Hráč II hraje bez sázky (C) v f, vyhraje 2 s pravděpodobností $\frac{f-a}{c-a}$. Pokud vsází (B) v f, vyhraje 2 s pravděpodobností $\frac{b-a}{c-a}$, $2+B$ s pravděpodobností $\frac{f-b}{c-a}$ a prohraje B s pravděpodobností $\frac{c-f}{c-a}$. Po úpravě dostáváme rovnici

$$b + c - 2f = 0.$$

Pomocí těchto šesti rovnic si můžeme vyjádřit vztahy pro naše neznámé a, b, c, d, e, f :

$$\begin{aligned} a &= \frac{2B}{(2+B)^2(1+B)}, \\ b &= \frac{B}{2+B}, \\ c &= \frac{B(3+B)}{(2+B)(1+B)}, \\ d &= \frac{B}{2+B}, \\ e &= \frac{B}{(1+B)(2+B)}, \\ f &= \frac{B}{1+B}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.4 Nashova rovnováha

Oba hráči mají zvoleny své strategie, kterou navzájem znají. Pokud dojde k situaci, že se ani jednomu hráči nevyplatí měnit strategii (za předpokladu, že ani druhý hráč ji nezmění) dochází k Nashove rovnováze. To znamená, že žádný z hráčů nemůže zvýšit své zisky jednostranným krokem (tzn. změna pouze jeho strategie). Abychom získali Nashovu rovnováhu užijeme vzorců 2.3. pro nalezení optimálních strategií. Dostáváme

$$a = 1/9,\ b = 1/3,\ c = 2/3,$$

$$d = 1/3,\ e = 1/6,\ f = 1/3.$$

Strategie se nám tímto rozdělili na intervaly:

Hráč I

$$B: \quad x \in (0, 1/9\rangle \cup (2/3, 1),$$

$$CC: \quad x \in (1/3, 2/3\rangle,$$

$$CF: \quad x \in (1/9, 1/3\rangle.$$

Hráč II

$$B/C: \quad y \in (1/2, 1),$$

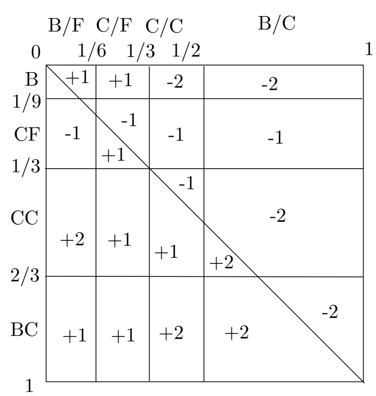
$$B/F: \quad y \in (0, 1/6\rangle,$$

$$C/C: \quad y \in (1/3, 1/2\rangle,$$

$$C/F: \quad y \in (1/6, 1/3\rangle.$$

U hráče I je dobré rozlišovat akci B rozdělenou na interval $x \in \langle 0, 1/9\rangle$, kdy hráč (*blafuje*). Princip *blafu* je převědčit protihráče, aby sázky častěji dorovnával. Protože si myslí, že hrajeme s malými hodnotami. Tím nám bude často dorovnávat i sázky na velmi vysoké hodnoty a nám se zvýší výnos ze hry. Další část intervalu $x \in (2/3, 1)$ jsou sázky, při kterých hráč vsází na vysokou hodnotu. U Hráče II jim odpovídají strategie B/F a B/C, proto je budeme označovat BF a BC.

Nyní tyto strategie znázorníme na čtverci 2.5. Jednotlivá čísla $\pm 1, \pm 2$ udávají zisk hráče I v daných oblastech v závislosti použitých strategií. Výše průměrného zisku dostaneme sečtením všech malých ploch vynásobené jejich ziskem. V našem případě je průměrný zisk Hráče I $-1/18$.



Obr. 2.5.Nashova rovnováha

Kapitola 3

Optimální strategie

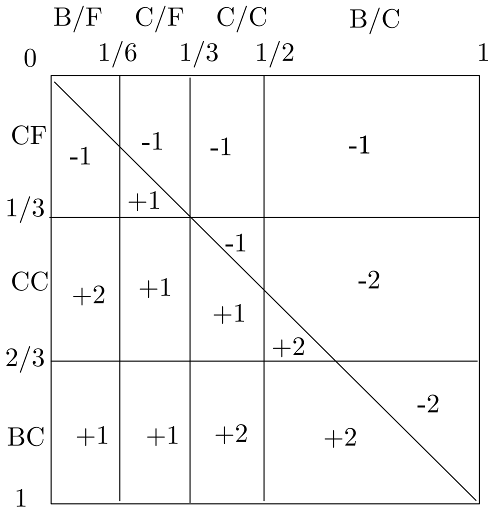
Strategie hráče I a hráče II pro nás představují optimální hru proti neznámému protihráči. Pokud však je nám známa strategie protihráče, můžeme svou hru upravit tak, abychom zvýšili svůj průměrný zisk. Pro příklad uvedeme hráče H, který nikdy nepoužívá strategii BF. A jeho rozklad strategií na intervalu $(0, 1)$ je následující:

$$CF: \quad x \in (0, 1/3),$$

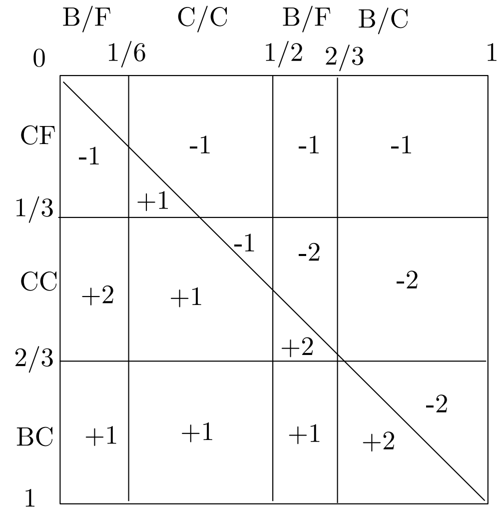
$$CC: \quad x \in (1/3, 2/3),$$

$$BC: \quad x \in (2/3, 1).$$

Tímto víme jistě, že pokud hráč H začne svou hru sázkou,jeho hodnota je vysoká. Pokud bychom použili strategii z Nashovy rovnováhy, průměrný zisk Hráče H bude $-1/18$ (3.1). Abychom tento zisk snížili upravíme strategii. Když víme, že hráč nikdy nehraje BF, je zbytečné, abychom používali při nízkých hodnotách strategie C/C a B/C. Proto strategii CC nahradíme strategií CF a budeme mít interval pro CF $y \in (1/6, 1/2)$. Na interval $y \in (1/2, 2/3)$ zvolíme strategii B/F. Těmito úpravami docílíme snížení průměrného zisku Hráče H na $-1/6$, což odpovídá snížení zisku z $+2$ na $+1$ na 3.2



Obr. 3.1.



Obr. 3.2.

Nyní budeme hledat optimální strategii pro různé druhy temperamentů hráčů.

a) „calling station“ (*loose-passive*) - hráč s příliš širokým pásmem CC na úkor ostatních pásem,

b) „maniac“ (*loose-active*) - hráč se širokými pásmy BC a BF,

c) „rock“ (*tight-passive*) - hráč se širokým pásmem CF,

d) „donk“ - hráč se širším pásmem BC na úkor BF.

Tyto typy hráčů jsem vybrala na základě reálné hry. Každý temperament hráče v reálné hře je trochu odlišný. Příčinou jsou malé sázky, hra jenom dvou hráčů a pouze jedno kolo sázek pro oba hráče.

Pro porovnávání zisků nejdříve použijeme vždy protihru s Nashovy rovnováhy. Ta nám dá určitý průměrný zisk. Teprve pak budeme hledat optimální strategii, při které se tento zisk poníží. Každého hráče budeme porovnávat jako prvního hráče a poté i jako druhého hráče, protože zisky se v obou případech liší. Pokud hráč bude hrát jako druhý jeho strategie bude odpovídat té původní tzn. BF odpovídá B/F, CF odpovídá C/F atd.

3.1 „calling station“

Hráč „calling station“ je spíše vyčkávací typ hráče. Je tichý a sám od sebe se nepouští do riskantních her. Čeká na reakci soupeře, ale většinu her dorovná. U tohoto typu hráče velice často dochází až k porovnávání hodnot. Má veliké pásmo CC, a proto často začíná hru bez sázky, ale pokud druhý hráč vsadí,ve většině případů tuto sázku dorovná. Zvolila jsem pro něj následující intervaly strategií:

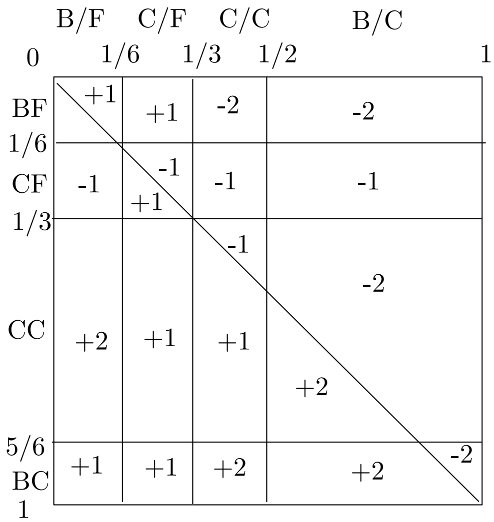
$$BF \quad x \in (0, 1/6),$$

$$CF \quad x \in (1/6, 1/3),$$

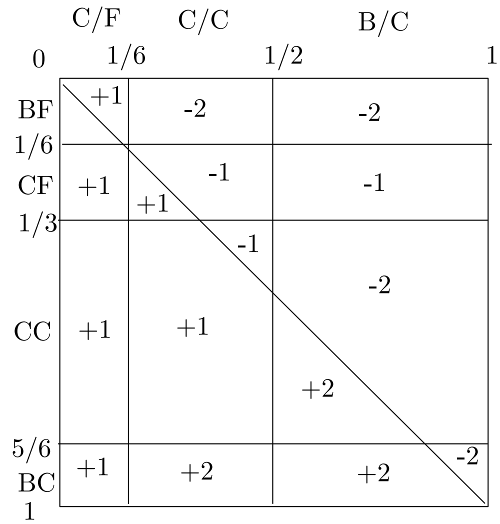
$$CC \quad x \in (1/3, 5/6),$$

$$BC \quad x \in (5/6, 1).$$

Jako první možnost zvolíme hráče „calling station“ jako prvního hráče. Při porovnání hry se strategiemi Hráče II (3.3), průměrný zisk tohoto hráče činí $-1/18 \doteq -0,056$. Tento zisk je stejný jako zisk Hráče I u Nashovy rovnováhy. Nyní budeme hledat takovou strategii, aby se průměrný zisk snížil. Protože hráč ve většině případů dorovnává sázky druhého hráče, můžeme strategii B/F (sázka jako blaf) vynechat a nahradit ji C/F a tím snížíme jeho zisk ze sázky B/F. Strategii C/C roztáhne i na původní interval C/F. To nám sice ve spodní části čtverce zvedne zisk z 1 na 2, ale ve vrchní části čtverce nám sníží zisk z 1 na -2 (3.4). Průměrný zisk hráče „calling station“ činí $-5/36 \doteq -0,139$.

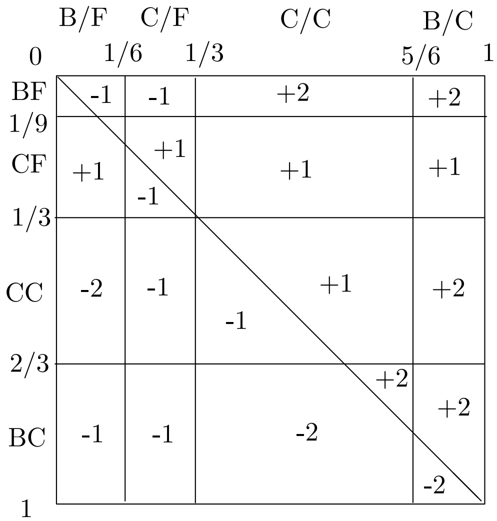


Obr. 3.3.

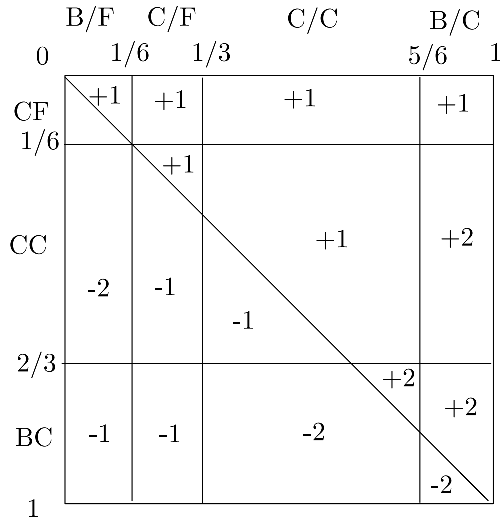


Obr. 3.4.

Ve druhé možnosti bude hrát hráč „calling station“ jako druhý a porovnáme jeho strategie s Hráčem I s Nashovy rovnováhy (3.5). Průměrný zisk je $-7/108 \doteq -0,065$. Aby došlo ke snížení zisku použijeme jako správnou protihru obdobnou hru jako v první možnosti. Úplně vynecháme strategii BF, protože pásmo C/C je příliš veliké a často by byla dorovnaná sázka jako blaf. Tedy pásmo BF nahradíme CF a interval CC rozšíříme i na původní CF (3.6). Opět dojde v některých oblastech ke zvýšení zisku, ale v řádku CF dojde ve dvou oblastech ke snížení zisku z 2 na 1 a ve sloupci B/F dokonce z 1 na -2, což má za následek celkové snížení průměrného zisku na $-1/12 \doteq -0,083$.



Obr. 3.5.



Obr. 3.6.

3.2 „maniac“

„Maniac“ je hráč, který je nevázaný a divoký. Jeho hra je velmi aktivní, protože hodně vsází. Jeho hra se často označuje jako šílená. Pokud dlouhou dobu dostává vysoké hodnoty, může se zdát, že jeho styl hry je ten nejlepší. Ovšem vše se může obrátit v okamžiku a všechny své výhry může během chvíle ztratit. Pro hráče „Maniaca“ jsem zvolila tyto intervaly strategií:

$$BF \quad x \in (0, 1/3),$$

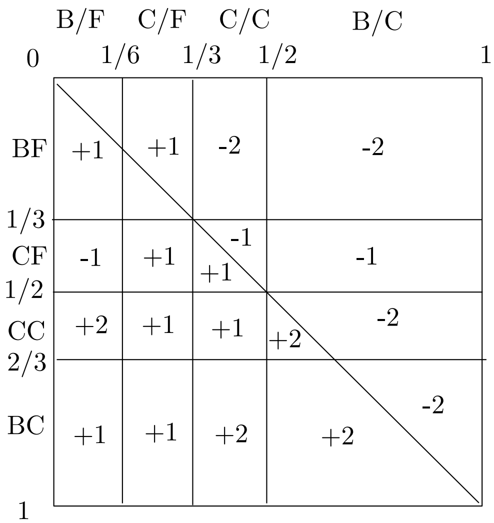
$$CF \quad x \in (1/3, 1/2),$$

$$CC \quad x \in (1/2, 2/3),$$

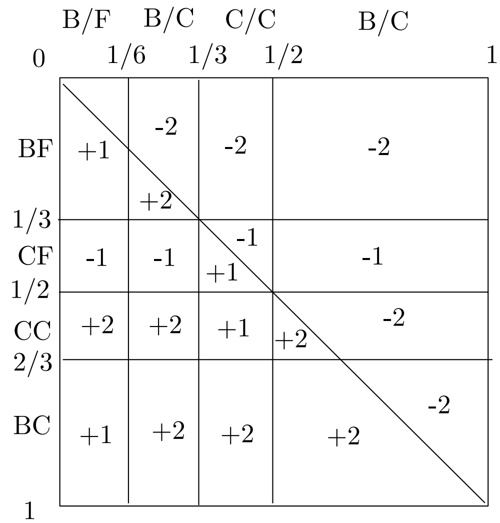
$$BC \quad x \in (2/3, 1).$$

Nejprve budeme hledat optimální strategii proti „Maniacovi“ jako prvnímu hráči. Pokud bychom zvolili jako protihru strategie hráče II s Nashovi rovnováhy (3.7) průměrný zisk tohoto hráče bude $-1/12 \doteq -0,083$. Díky velkému intervalu BF můžeme nahradit

C/F strategií B/C. Toto nahrazení sice některé zisky zvýší (ve spodní části sloupce B/C), ale hlavní snížení (ve vrchní části sloupce B/C) z 1 na -2 a z 1 na -1 nám zaručí snížení průměrného zisku hráče na $-1/6 \doteq -0,167$ (3.8).

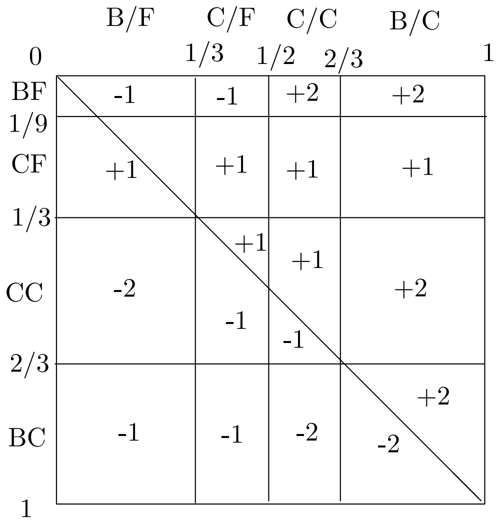


Obr. 3.7.

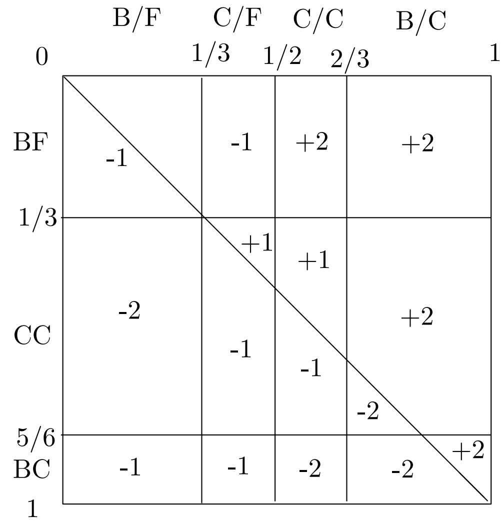


Obr. 3.8.

Nyní hráč „Maniac“ bude hrát jako druhý. Při použití strategií hráče I z Nashovi rovnováhy (3.9) činí zisk tohoto hráče 0. Tudíž i průměrný zisk hráče I je nulový, protože se zde jedná o hru s nulovým součtem. Nejdříve nahradíme CF strategií BF, tím sice v zadní části řádku BF do jde k navýšení zisku z 1 na 2, ale v přední části se nám zisk sníží z 1 na -1 a to je pro nás výhodnější. Rozšířením pásma CC až do 5/6 zvýšíme zisk části původního pásma BC z -1 na -2. Těmito úpravami dosáhneme snížení průměrného zisku na $-1/9 \doteq -0,111$ (3.10)



Obr. 3.9.



Obr. 3.10.

3.3 „rock“

Hráč „rock“ je typ hráče, který hraje hodně opatrně. Je to nevýrazný typ hráče, neprojevuje se. Příliš často nevsází. Pouze vyčkává jestli soupeř dá sázku nebo ne. V případě, že soupeř sázku dá, ve většině případech hráč „rock“ položí. Jeho rozložení strategií jsem určila následovně:

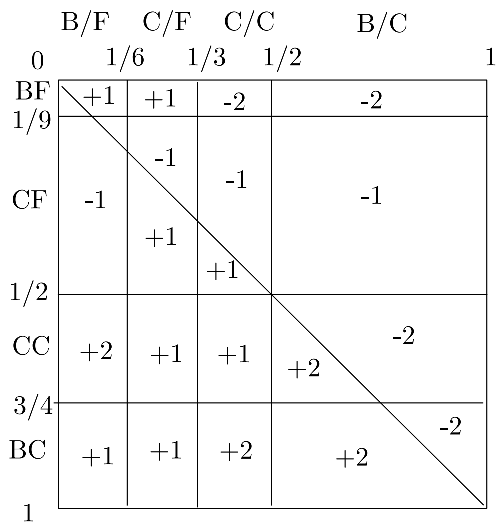
$$BF \quad x \in (0, 1/9),$$

$$CF \quad x \in (1/9, 1/2),$$

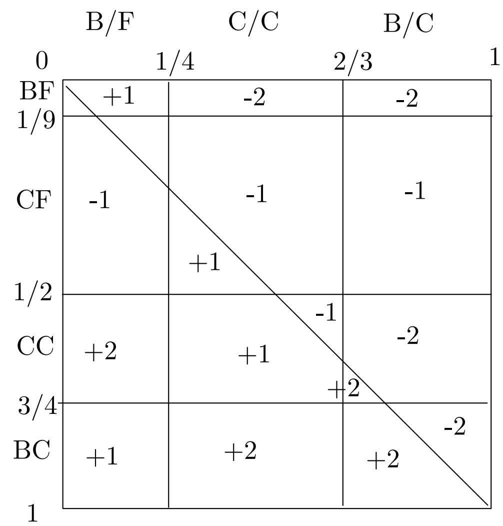
$$CC \quad x \in (1/2, 3/4),$$

$$BC \quad x \in (3/4, 1).$$

Opět se nejdříve budeme zabývat hráčem „rock“ jako 1. hráčem. Při porovnávání se strategiemi hráče II z Nashovy rovnováhy, zjistíme, že průměrný zisk tohoto hráče je $-1/18 \doteq -0,056$ (3.11), což je stejný výsledek jako u Nashovy rovnováhy. Hlavní změnou, která nám pomůže snížit průměrný zisk tohoto hráče, je rozšíření pásma C/C přes pásmo C/F, které úplně vynecháme, a přes část pásma B/C. Opět se nám některé zisky navýší, ale pro nás je nejdůležitější snížení zisků v horní části sloupce C/C z 1 na -2 a také změny zisků v řádku CF z 1 na -1. Průměrný zisk hráče jsme těmito změnami dokázali snížit na $-15/144 \doteq -0,104$ (3.12).

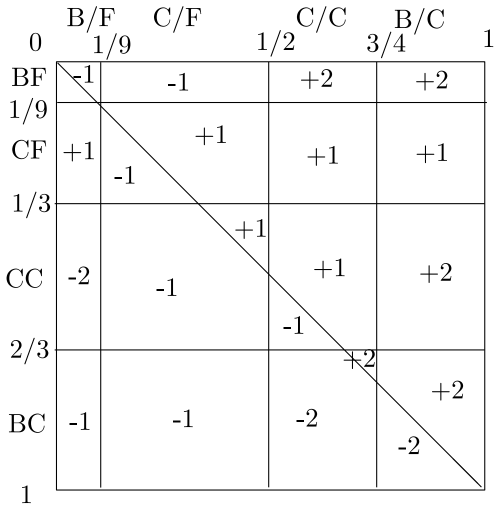


Obr. 3.11.

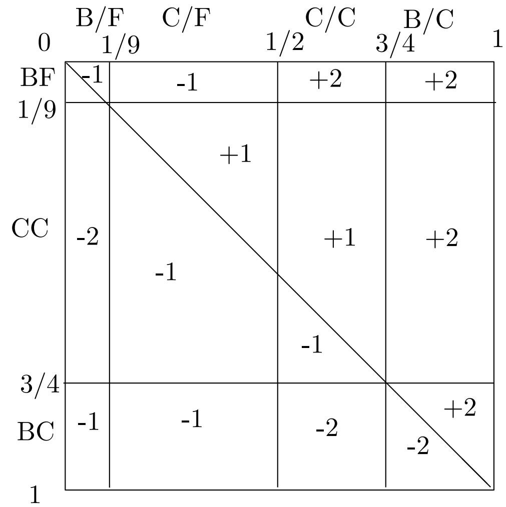


Obr. 3.12.

Pokud hráče „rock" postavíme do druhé pozice a srovnáme se strategiemi hráče I z Nashovy rovnováhy, průměrný zisk se velice přiblížil nule, činí $-1/324 \doteq -0,003$ (3.13). Jako dobrou protihru můžeme opět použít obdobou protihru jako v prvním případě. Pásmo CC rozšíříme přes celé pásmo CF a část BC, tím se nám zvýší zisk ve sloupci B/C z 1 na 2, ale ve sloupci B/F dojde ke snížení z 1 na -2 a to je pro nás důležitější. Průměrný zisk hráče se sníží na $-11/648 \doteq -0,017$ (3.14)



Obr. 3.13.



Obr. 3.14.

3.4 „donk“

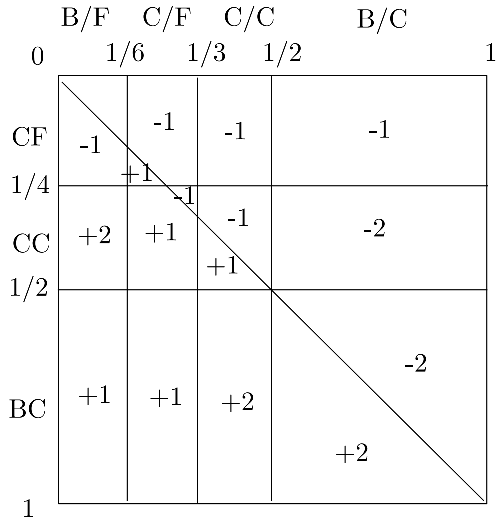
Hráč „donk“ je konzervativní typ hráče. Příliš neriskuje a pokud vsadí, můžeme u něj čekat vysoké hodnoty. Nevsází jako *blaf*, tzn. nevyužívá strategii BF a má veliké pásmo BC. Jeho strategie jsou:

$$CF \quad x \in (0, 1/4),$$

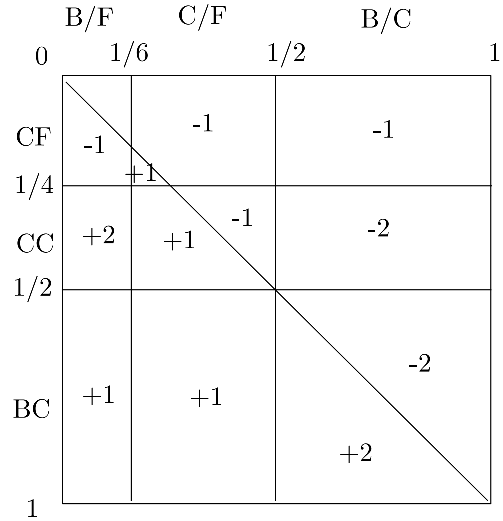
$$CC \quad x \in (1/4, 1/2),$$

$$BC \quad x \in (1/2, 1).$$

Nejdříve budeme porovnávat strategie s hráčem „donk“ jako prvním hráčem. Pokud proti němu postavíme hráče II, jeho zisk je $-1/184 \doteq -0,005$ (3.15), opět stejný jako u hráče I z Nashovy rovnováhy. Díky tomu, že hráč „donk“ má veliké pásmo BC, nemá smysl hrát strategii C/C a tím mu dorovnávat jeho sázky a zvyšovat mu zisk. Pokud nahradíme C/C strategií C/F dosáhneme snížení zisku ve spodní části tohoto sloupce z 2 na 1. Zisk se nám tímto podařilo snížit na $-5/36 \doteq -0,139$ (3.16)

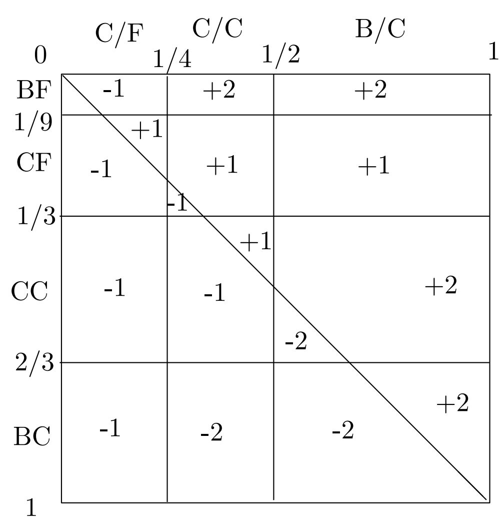


Obr. 3.15.

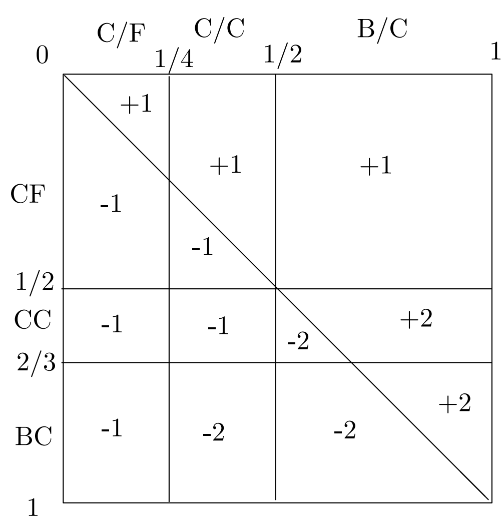


Obr. 3.16.

Nyní bude hrát hráč „donk“ jako druhý hráč. Při porovnávání se strategiemi hráče I s Nashovy rovnováhy jeho průměrný zisk je $-47/1296 \doteq -0.036$ (3.17). Strategii BF je pro nás nyní nevýhodnou, protože „donk“ nepoužívá B/F, tím pádem by nám naše sázky jako blafy často dorovnával a my mu tím navyšovali jeho zisky. Tedy pásmo BF nahradíme CF a to nám zasáhne i do části pásma CC, abychom zbytečně nedorovnávali sázky, které bychom nevyhráli, díky tomu snížíme na více místech zisk z 2 na 1. Průměrný zisk jsem tedy dokázali snížit na $-1/12 \doteq -0,083$ (3.18).



Obr. 3.17.



Obr. 3.18.

3.5 Hra neznámého hráče

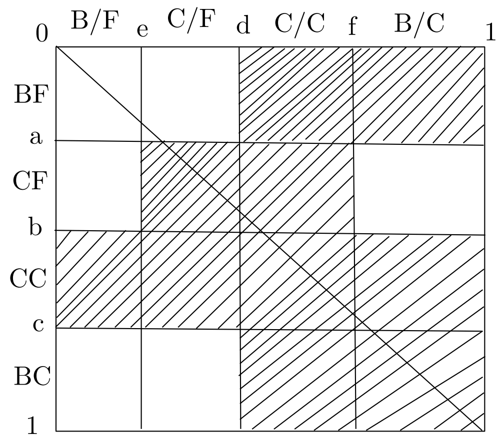
Nemůžeme předpokládat, že se nám pokaždé podaří hrát proti známému hráči, abychom si podle jeho rozložení strategií mohli upravit svou hru. Protože známý hráč je ideální model, neexistující v reálné hře. Pokud se potkáme s hráčem, jehož strategii neznáme, můžeme ji během hry zjišťovat vhodnou statistikou. Nejdříve zvolíme jako svou nejvhodnější hru rozložení strategií určené Nashovou rovnováhou. V průběhu několika her pak můžeme zjišťovat, jakým způsobem má náš protihráč zvoleny parametry.

Budeme předpokládat, že oba hráči používají všechny druhy akcí. Při zobrazení na diagramu se nám čtverec rozdělí do 16 ploch. Z toho v deseti dochází k porovnávání hodnot (*showdown*). Jsou to oblasti zvýrazněné na obrázku 3.19.

Pokud se hra ukončí až porovnáváním hodnot, sdělí nám tím protihráč několik informací: jakou má hodnotu v ruce a jakou při této hodnotě použil akci. Například pokud máme hodnotu z intervalu $(0, a)$, tj. hrajeme akci BF, k porovnání hodnot dojde ve chvíli, kdy soupeř dorovná naši sázku. To udělá v intervalu $(e, 1)$.

Každá hra nám tímto padne do určité plochy na čtverci. Pokud budeme hrát dostatečný počet her, získáme těchto informací dostatečné množství, abychom mohli vypočítat obsah obdelníkové plochy a délku protihráčových intervalů, ve kterých dochází k porovnávání hodnot.

Tímto způsobem postupně zjistíme rozložení protihráčových parametrů a můžeme svou strategii upravit pro co nejlepší výsledek. Pro hledání rozložení parametrů protihráče nemusíme používat pouze hry, které končí porovnáváním hodnot. Jestliže protihráč ukončí hru položením dávám nám informaci o tom jak často pokladá. Například máme-li hodnotu z intervalu $(0, a)$ hrajeme akci BF a protiháč položí, padne nám tato hra do intervalu $(0, e)$. Tímto urychlíme hledání parametrů protihráčovy hry. Výpočty obsahu obdelníku bude mnohem užitečnější u „vyšších“ her (s větším počtem sázkových kol nebo vyšším B), kdy dochází v méně případech k porovnávání hodnot.



Obr. 3.19.oblasti porovnávání hodnot

Seznam použité literatury

[1] Phil Hellmuth *Jak hrají poker profesionálové*. Baronet, 2005.

[2] Chris Ferguson *U(0,1) Two-Person Poker Models*
`http://www.math.ucla.edu/~tom/papers/poker2.pdf`

[3] Chris Ferguson *On the Borel and von Neumann Poker Models*
`http://www.math.ucla.edu/~tom/papers/poker1.pdf`

[4] B. Hoehn, F. Southey, R. C. Holte, V. Bulitko *Effective Short-Term Opponent Exploitation in Simplified Poker*
`http://www.aaai.org/Papers/AAAI/2005/AAAI05-123.pdf`