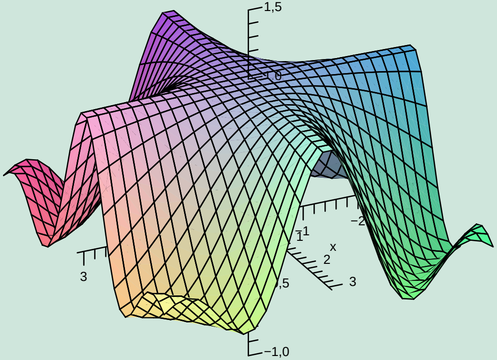
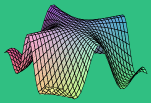
Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek

Silvie Kuráňová a Jan Vondra

Prosinec 2008



Podpořeno grantem 1411/2008 FRVŠ ČR.

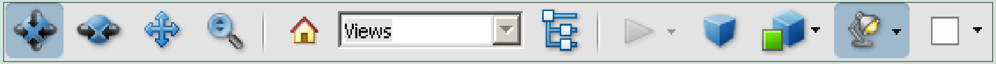


Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 1 z 89
◀ ▶
Zpět Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

Instrukce k testům

Práce s 3D obrázky

Všechny grafy funkcí dvou proměnných jsou zobrazeny jako 3D obrázky, které je možné ovládat, tj. libovolně natáčet, posunovat, zvětšovat, měnit osvětlení apod.
V řešených příkladech slouží k ovládání grafů funkcí panel, v testech pak pravé tlačítko myši. Panel zobrazíme či schováme kliknutím na modrý trojúhelníček v levém horním rohu obrázku, může vypadat například[1] takto:



Ovládání modelu naznačují jednotlivé ikony na panelu. Panel je rozdělen na tři části. První zleva obsahuje tlačítka pro otáčení kolem bodu, otáčení kolem přímky, posunutí a zvětšení či zmenšení objektu. V druhé části panelu nás bude zajímat především tlačítko se symbolem domečku – umožňuje návrat k výchozímu pohledu. Dále je například možné zobrazit z jakých částí je graf složen, popřípadě některé části skrýt. V poslední části najdeme tlačítko na přepínání mezi perspektivním a pravoúhlým promítáním. Tlačítko pro režim vykreslení modelu, zde obzvláště doporučujeme vyzkoušet volby „Průhledné“ a „Drátový model“. Rovněž nabídka osvětlení je velmi bohatá. Poslední tlačítko umožňuje zvolit barvu pozadí, tedy například volbou žluté zvýšit kontrast při promítání ve výuce apod.

Všechny grafy funkcí v tomto textu mají cihlovou barvu, jsou opatřeny souřadnými osami a na každé z os je žlutě vyznačen jednotkový bod. Výjimečně je z technického hlediska volen jiný bod na ose z (na což je pak v textu upozorněno). U složitějších modelů je vždy uveden popis modelu. Navíc všechny 3D modely (na rozdíl od 2D grafiky) mají bílé pozadí.

[1] Vzhled panelu závisí na verzi a jazyku Acrobat Readeru. Následující obrázek i text se týkají verze 8.1 v češtině.

Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 2 z 89
◀ ▶
Zpět Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

Práce s testy

Motto: „Cvičení dělá mistra."

Ověřit si znalost dané látky je možné prostřednictvím interaktivních testů umístěných v závěru každé kapitoly.

Začátek testu je nutno zahájit stisknutím volby Start testu. Test nebude možno ukončit dokud nezodpovíte všechny otázky.

Start testu **Typy otázek v testech**

1. Výběr z možností, právě jedna správná odpověď.

   (a) špatně (b) špatně (c) správně (d) špatně

2. Výběr z možností, více správných odpovědí.

   ☐ správně ☐ špatně ☐ správně ☐ špatně

3. Zápis vlastní odpovědi. *Do pole zapište výraz vlevo od rovnítka.*

   $xy =$ ☐

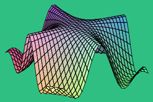
4. Zápis vlastní odpovědi do skupiny polí, tj. tlačítko Ans ovládá postupně jednotlivá políčka. *Do pole zapište výraz vlevo od rovnítka.*

   $1 + \frac{1}{2} =$ ☐ $+$ ☐

Konec testu Výsledky Počet správných odpovědí: ☐

Správná odpověď: ☐

Test ukončíte kliknutím na Konec testu. Stisknutím volby Výsledky se zobrazí správné odpovědi a u pole pro zápis vlastní odpovědi se objeví tlačítko Ans (do té doby neviditelné).



Správné odpovědi

Pokud si práci s testem vyzkoušíte, zjistíte, že správné odpovědi jsou po skončení testu a po stisku tlačítka Výsledky vyznačeny symbolem ✔ a nesprávné symbolem ✘. V případě chybné odpovědi je správná varianta zvýrazněna symbolem ●.
Pokud bylo špatně zodpovězeno pole pro vlastní odpověď, objeví se kolem něj červený rámeček a správnou variantu si můžete prohlédnout v poli za textem „Správná odpověď:“ po stisknutí tlačítka Ans. Toto pole je v rámci testu „Typy otázek v testech“ umístěno na jeho konci a také v pravém panelu obrazovky (viz. str. 3). V testech na konci kapitol je toto pole zobrazováno pouze v pravém panelu obrazovky.

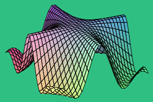
Bodové hodnocení

Získané body se zobrazí po ukončení testu červeně vedle každé otázky (případně podotázky). Standardní bodové ohodnocení je 1 bod za správnou odpověď (u otázek typu 1, 3 a 4) a záporné body za výběr chybné varianty u otázky druhého typu.

Zápis matematiky v testech

K zápisu odpovědí do matematického pole používáme následující notaci:

- Desetinná čísla: Desetinou čárku pište jako tečku, čili `1.2` místo `1,2`.
- Ludolfovo číslo π jako `pi`, Eulerovo číslo jako `e`.
- Znak dělení: Použijte lomítko `/`.
- Znak násobení: Symbol `*`, např. `4*x` pro $4x$.
- Mocnina: Symbol `^`, např. `4*x^3` pro $4x^3$, `12*x^(-6)` pro $12x^{-6}$.
- Odmocnina: $\sqrt{x}$ zapište jako `sqrt(x)` nebo `x^(1/2)`. Pozor! výraz `x^1/2` není $\sqrt{x}$.



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 4 z 89
◀ ▶
Zpět Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

- Závorky: Je možno použít kulaté ( ), hranaté [ ] či složené { }. Závorky je nutné! uvádět, vymezují argumenty funkcí, definují pořadí operací.
  Pište `sin(x)` raději než `sin x`, `4*x*(x^2+1)^3` pro $4x(x^2+1)^3$, `4^(2*x+1)` pro 4^{2x+1}.
  Nepište `sin^2(x)` pro $\sin^2(x)$, ale `(sin(x))^2`.

- Funkce, které můžete použít:
  - Trigonometrické: `sin, cos, tan, cot, sec, csc`.
  - Inverzní trigonometrické: `asin, acos, atan`.
  - Logaritmus: $\log$ či $\ln$ (přirozený logaritmus), př. `ln(x)`.
  - Exponenciála: e^x můžete zadat jako `exp(x)` nebo `e^x`.

Start testu **Vyzkoušejte si zápis matematiky!**

1. $1,5 =$

2. $\sin(2x)^3 =$ není totéž jako $\sin^3 2x =$

3. $(x^2-1)(x^2+1) =$

4. $\ln \frac{x}{2} =$

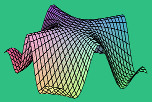
5. $\frac{y}{1+x^2y^2} =$

6. $\mathrm{e}^{x^2} + 3y =$

7. $-2x^4 + x^2y + y^2x + 1 =$

8. $(\log a)^2 =$

Konec testu Výsledky Počet správných odpovědí:



1. Pojem funkce více proměnných

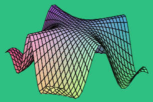
Příklad 1.1. Zobrazte v rovině definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{8 - 4x^2 - 8x - y^2}.$$

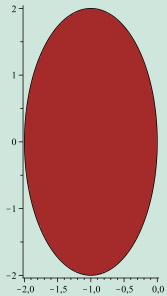
Řešení. Výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tj. musí být splněna podmínka

$$\begin{aligned}
8 - 4x^2 - 8x - y^2 &\geq 0 \\
2 - x^2 - 2x - \frac{y^2}{4} &\geq 0 \\
-x^2 - 2x - \frac{y^2}{4} &\geq -2 \\
x^2 + 2x + \frac{y^2}{4} &\leq 2 \\
(x+1)^2 + 1 + \frac{y^2}{4} &\leq 2 \\
(x+1)^2 + \frac{y^2}{4} &\leq 1
\end{aligned}$$

Rovnice $(x+1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ je rovnicí elipsy se středem $S[-1, 0]$ a poloosami $a = 1, b = 2$, viz. obrázek 1.



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 6 z 89
◀ ▶
Zpět Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec



Obrázek 1: Definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{8 - 4x^2 - 8x - y^2}$ je dán nerovností $(x+1)^2 + \frac{y^2}{4} \le 1$.

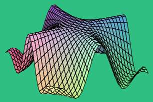
Příklad 1.2. Pomocí vrstevnic a řezů rovinami $\varrho_{xz}, \varrho_{yz}$ zobrazte graf funkce

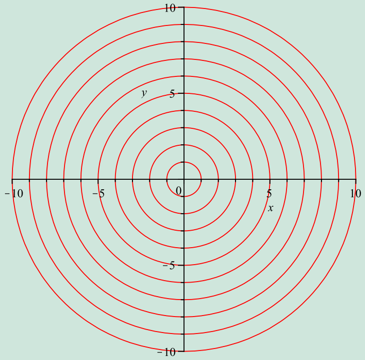
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4}}.$$

Řešení. Vyšetřeme vrstevnice funkce na úrovni $c > 0$.

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4}} \\ c &= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \\ c^2 &= \frac{x^2+y^2}{4} \\ (2c)^2 &= x^2+y^2, \end{aligned}$$

což jsou kružnice se středem na ose z a poloměrem $2c$ (obrázek 2).

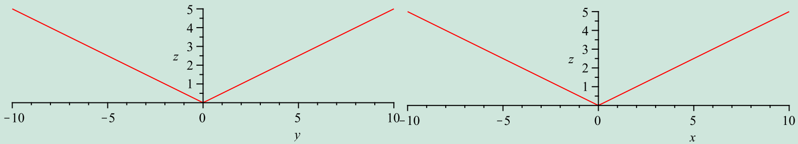




Obrázek 2: Vrstevnice funkce $f(x, y) = \sqrt{8 - 4x^2 - 8x - y^2}$, tj. soustředné kružnice $x^2 + y^2 = (2c)^2$.

Na obrázku 3 vidíme řezy rovinou ϱ_{yz}, tj. $x = 0, z = \sqrt{\frac{y^2}{4}} = \frac{|y|}{2}$, a rovinou ϱ_{xz}, tj. $y = 0, z = \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{|x|}{2}$.

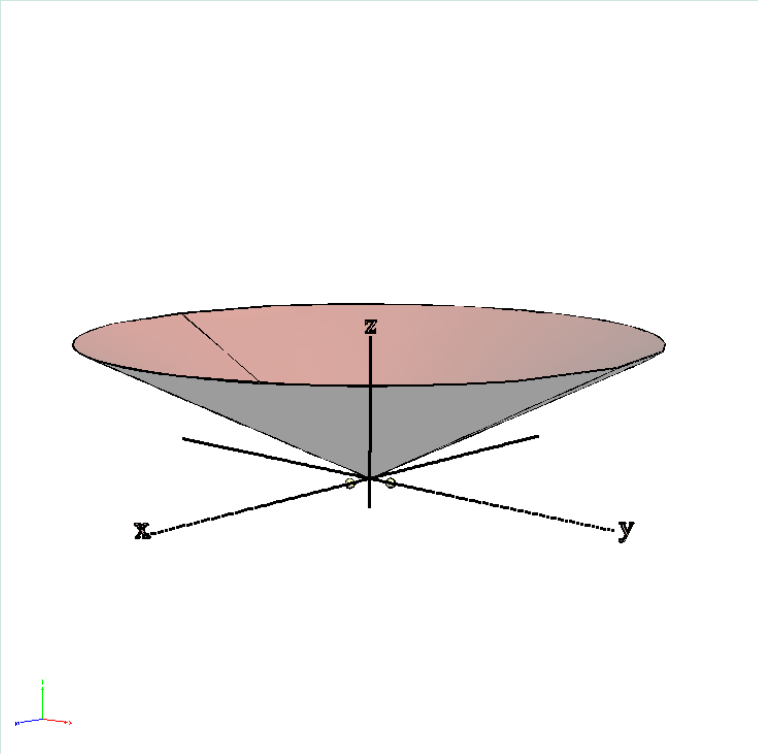
Obrázek 3: Řezy rovinami yz a xz.



(a) Graf funkce $z = \frac{|y|}{2}$

(b) Graf funkce $z = \frac{|x|}{2}$

Grafem funkce $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4}}$ je rotační kužel s vrcholem v počátku a osou z, nacházející se v poloprostoru $z \geq 0$, viz. obrázek 4.



Obrázek 4: Graf funkce $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4}}$.

Start testu **Pojem funkce – test 1**

1. Určete, které podmínky musí splňovat definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$.

☐ $x^2+y^2 \neq 9$ ☐ $x^2+y^2 = 9$ ☐ $x^2+y^2 < 9$

☐ $x^2+y^2 > 9$ ☐ $x \neq 0$ ☐ $x = 0$

2. Rozhodněte, který z následujících předpisů je funkce proměnných x, y.

☐ $x^2+y^2+z^2 = 4$ ☐ $x^2y^2z = 10$ ☐ $x^2yz^2 = 10$

3. Přiřaďte správné funkční hodnoty funkce $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y} + \cos\frac{\pi}{y}$.

(a) $f(1,1)$ ☐

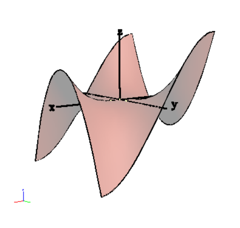
(b) $f(\sqrt{3},2)$ ☐

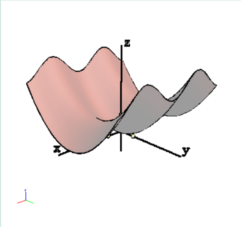
(c) $f(2,4)$ ☐

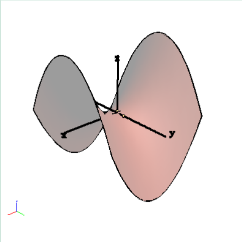
(d) $f(3\sqrt{2},6)$ ☐

(e) $f(t,t)$ ☐

4. K funkci $f(x,y) = \sin^2(x) + \frac{y^2}{4}$ přiřaďte její graf.

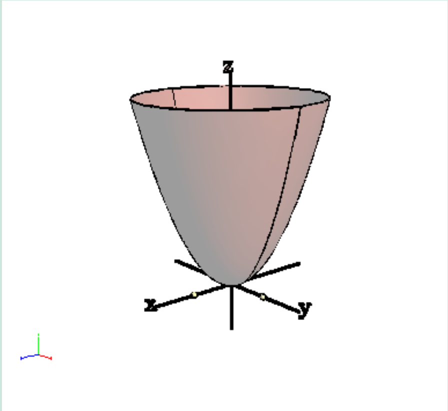
(a) 

(b) 

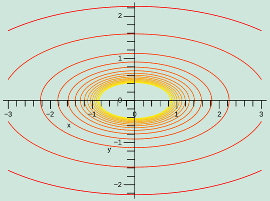
(c) 

Pojem funkce více proměnných
Limita a spojitost funkce
Parciální a směrové derivace
Diferenciál funkce
Taylorův polynom, derivace . . .
Lokální a absolutní extrémy
Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 11 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

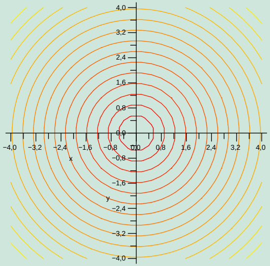
5. Na základě grafu funkce vyberte graf jejích vrstevnic.



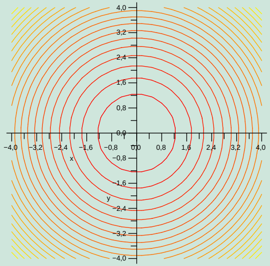
(a)



(b)



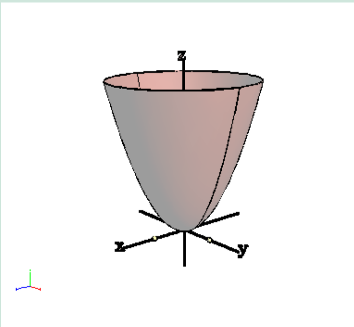
(c)



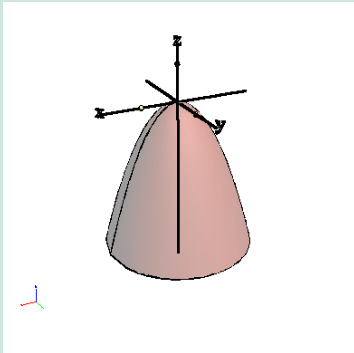
6. Prohlédněte si grafy funkcí $f(x,y)$, $g(x,y)$ a rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé.

(a) $g(x,y) = f(x,y) + 2$ (b) $g(x,y) = 2f(x,y)$ (c) $g(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$

(d) $g(x,y) = -f(x,y)$ (e) $g(x,y) = 2 - f(x,y)$ (f) $g(x,y) = \frac{1}{2}f(x,y)$



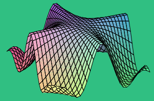
Graf funkce $f(x,y)$.



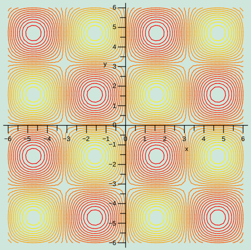
Graf funkce $g(x,y)$.

7. Určete funkci $f(u,v)$, jestliže $f(x+y, x-y) = x^2 - 2xy - y^2$.

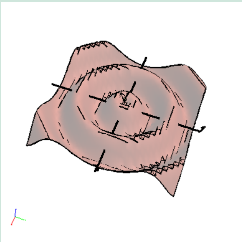
$f(u,v) =$ $\boxed{}$



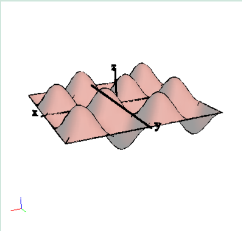
8. Na základě grafu vrstevnic vyberte graf funkce.



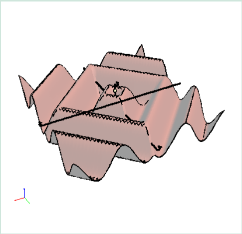
(a)



(b)

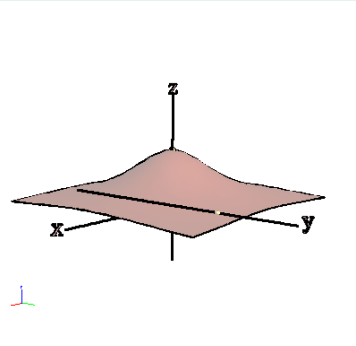


(c)



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 13 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

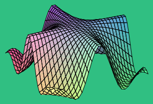
9. K danému grafu vyberte funkční předpis.



(a) $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ (b) $z = 3(1 - \frac{x}{2} + \frac{y}{4})$ (c) $z = \frac{x^2+y^2}{2y}$

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí:



Start testu **Pojem funkce – test 2**

1. Určete, které podmínky musí splňovat definiční obor funkce $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y} - \frac{1}{|y|-|x|}$.

- [ ] $y \neq 0$
- [ ] $y = 0$
- [ ] $\frac{x}{y} < -1$
- [ ] $\frac{x}{y} < 1$
- [ ] $\frac{x}{y} = \pm 1$
- [ ] $\frac{x}{y} > 1$
- [ ] $\frac{x}{y} > -1$

2. Rozhodněte, který z následujících předpisů není funkce proměnných x, y.

- [ ] $x^2 - y^2 = z^2$
- [ ] $\cos(xy) - z = \frac{\pi}{2}$
- [ ] $x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$

3. Přiřaďte správné funkční hodnoty funkce $f(x,y) = x\mathrm{e}^y$.

(a) $f(3,2)$ ______

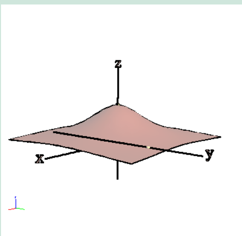
(b) $f(2,-1)$ ______

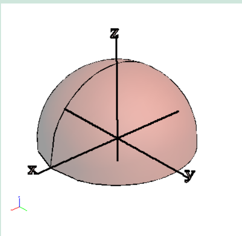
(c) $f(\mathrm{e},3)$ ______

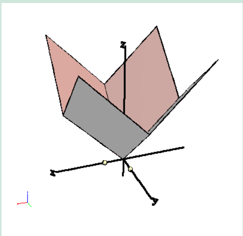
(d) $f(1,\ln(\mathrm{e}))$ ______

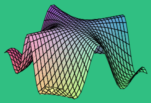
(e) $f(r,t)$ ______

4. K funkci $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ přiřaďte její graf.

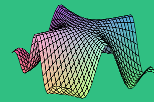
(a) 

(b) 

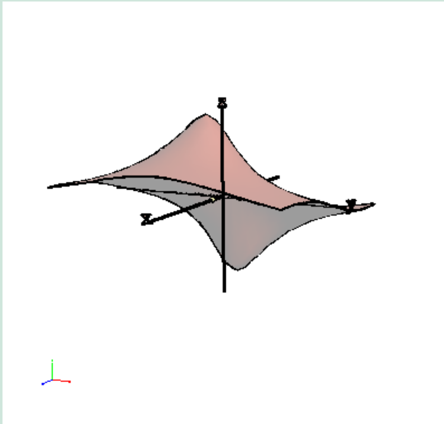
(c) 



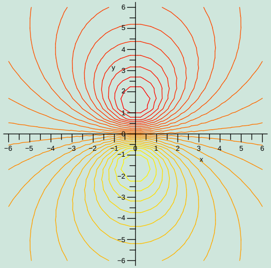
Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 15 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec



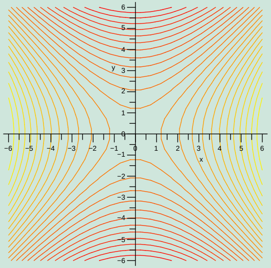
5. Na základě grafu funkce vyberte graf jejích vrstevnic.



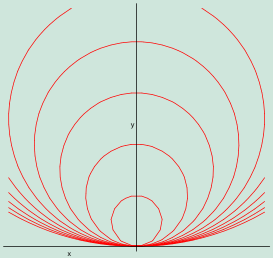
(a)



(b)



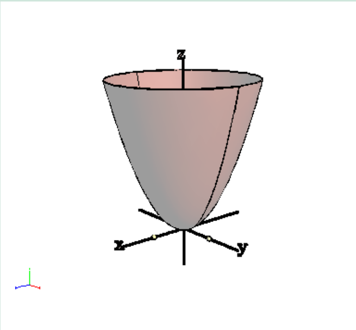
(c)



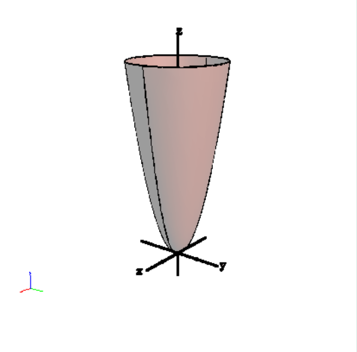
6. Prohlédněte si grafy funkcí $f(x,y)$, $g(x,y)$ a rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé.

(a) $g(x,y) = f(x,y) + 2$ (b) $g(x,y) = 2f(x,y)$ (c) $g(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$

(d) $g(x,y) = -f(x,y)$ (e) $g(x,y) = 2 - f(x,y)$ (f) $g(x,y) = \frac{1}{2}f(x,y)$



Graf funkce $f(x,y)$.

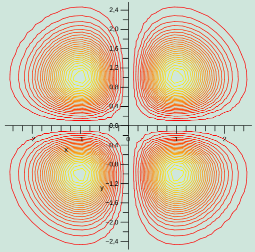


Graf funkce $g(x,y)$.

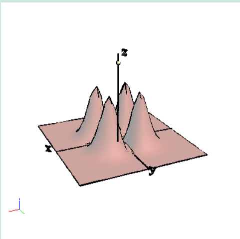
7. Určete funkci $f(u,v)$, jestliže $f(x-y, \frac{x}{y}) = x^3 - y^3, y \neq 0$.

$f(u,v) =$ $\boxed{}$

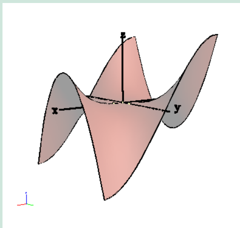
8. Na základě grafu vrstevnic vyberte graf funkce.



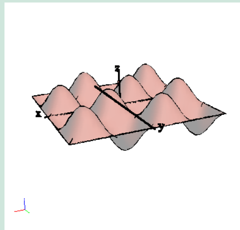
(a)

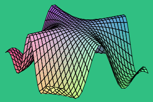


(b)

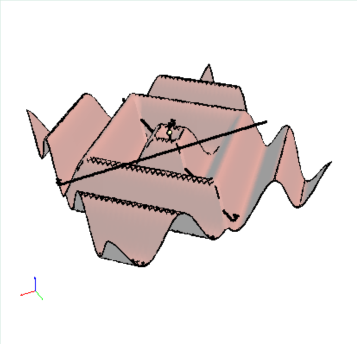


(c)





9. K danému grafu vyberte funkční předpis.



(a) $f(x, y) = |x| + |y|$ (b) $f(x, y) = |xy|$ (c) $f(x, y) = \sin(|x| + |y|)$

Konec testu Výsledky

Počet správných odpovědí:

Start testu **Pojem funkce – test 3**

1. Rozhodněte, zda předpis $e^{xyz} = 4$ je funkce proměnných x, y.

(a) ano (b) ne

2. Určete, které podmínky musí splňovat definiční obor funkce $f(x, y) = \ln[x \ln(y - x)]$.

☐ $y = x$ ☐ $y > x$ ☐ $y = x + 1$

☐ $y < x + 1 \wedge x < 0$ ☐ $y > x + 1 \wedge x < 0$ ☐ $y < x$

3. Přiřaďte správné funkční hodnoty funkce $f(x, y) = y^x + \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)$.

(a) $f(\mathrm{e}, 1)$ ☐

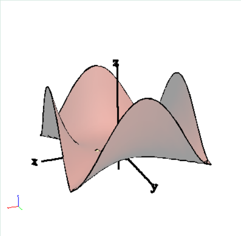
(b) $f(1, \sqrt{(}3))$ ☐

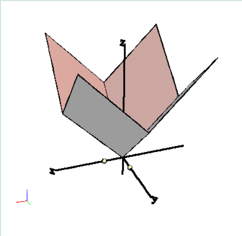
(c) $f(-1, 2)$ ☐

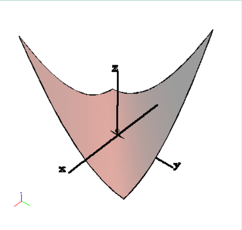
(d) $f(-\mathrm{e}, \mathrm{e})$ ☐

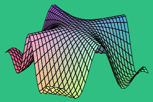
(e) $f(-1, \frac{1}{t})$ ☐

4. K funkci $f(x, y) = |x| + |y|$ přiřaďte její graf.

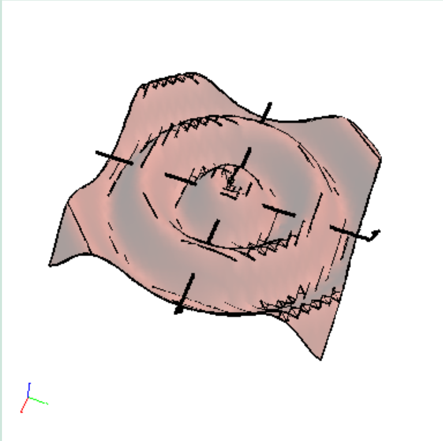
(a) 

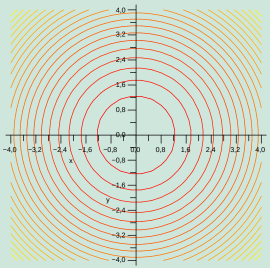
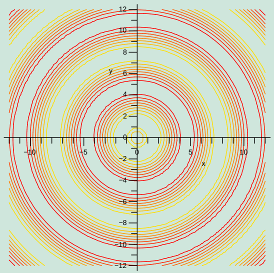
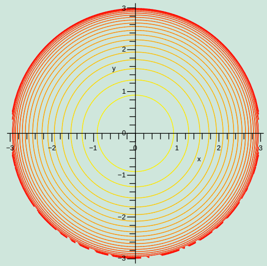
(b) 

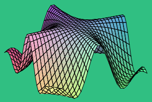
(c) 



5. Na základě grafu funkce vyberte graf jejích vrstevnic.



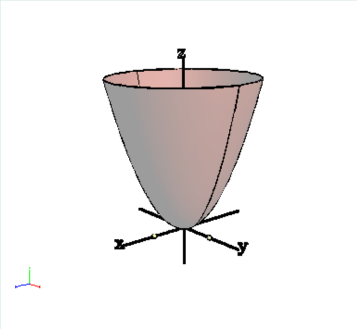
(a)  (b)  (c) 



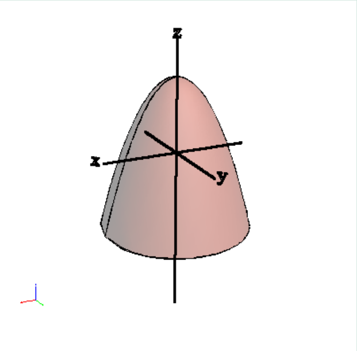
6. Prohlédněte si grafy funkcí $f(x,y)$, $g(x,y)$ a rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé.

(a) $g(x,y) = f(x,y) + 2$ (b) $g(x,y) = 2f(x,y)$ (c) $g(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$

(d) $g(x,y) = -f(x,y)$ (e) $g(x,y) = 2 - f(x,y)$ (f) $g(x,y) = \frac{1}{2}f(x,y)$

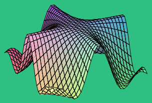


Graf funkce $f(x,y)$.

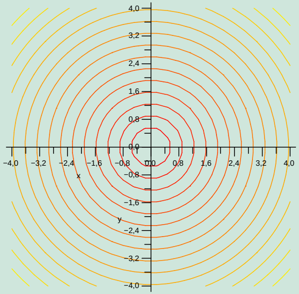


Graf funkce $g(x,y)$.

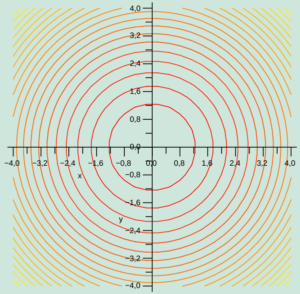
7. Na následujících dvou obrázcích jsou grafy vrstevnic, které se liší o stejnou konstantu (ekvidistantní vrstevnice). Jeden z nich je pro kužel, druhý pro rotační paraboloid. Rozhodněte, který z grafů zobrazuje vrstevnice kužele.



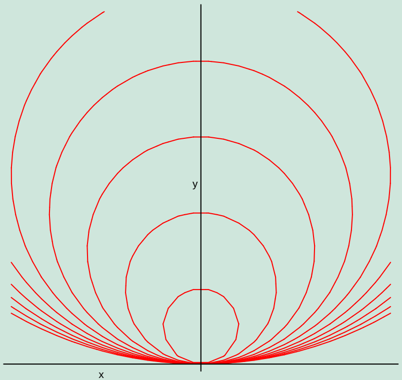
(a)

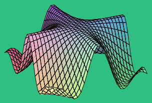


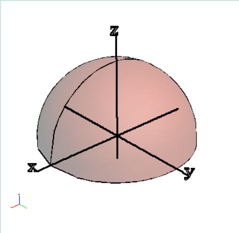
(b)

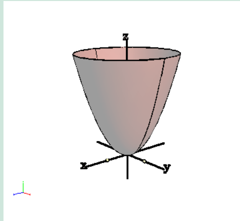


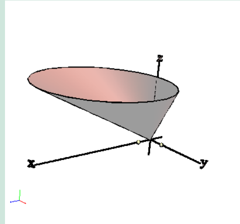
8. Na základě grafu vrstevnic vyberte graf funkce.



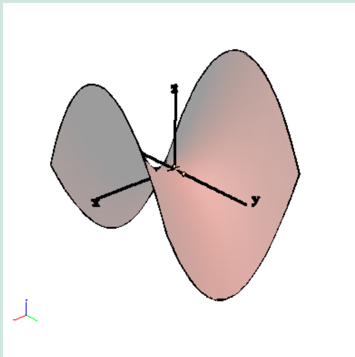


(a) 

(b) 

(c) 

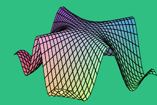
9. K danému grafu vyberte funkční předpis.

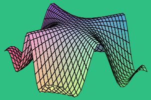


(a) $z = x^2y^2\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ (b) $z = \sin^2(x) + \frac{y^2}{4}$ (c) $z = x^2 - y^2$

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí:

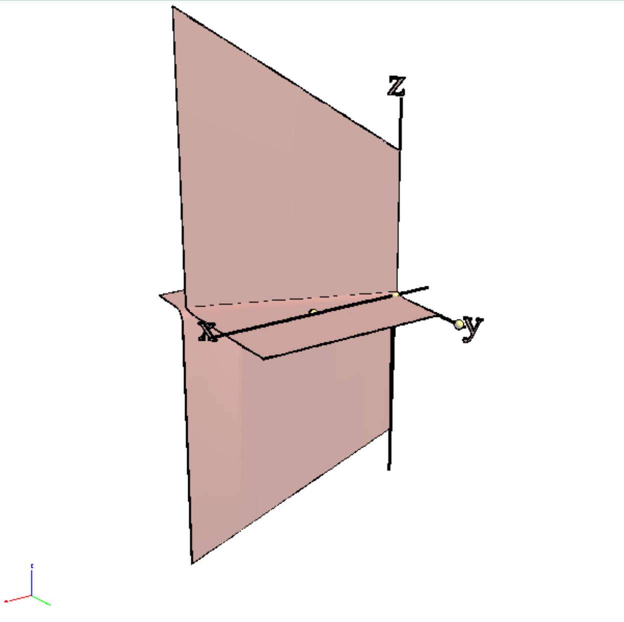




2. Limita a spojitost funkce

Příklad 2.1. Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x-y+3}{2x+5y}.$$



Obrázek 5: Graf funkce $z = \frac{x-y+3}{2x+5y}$.

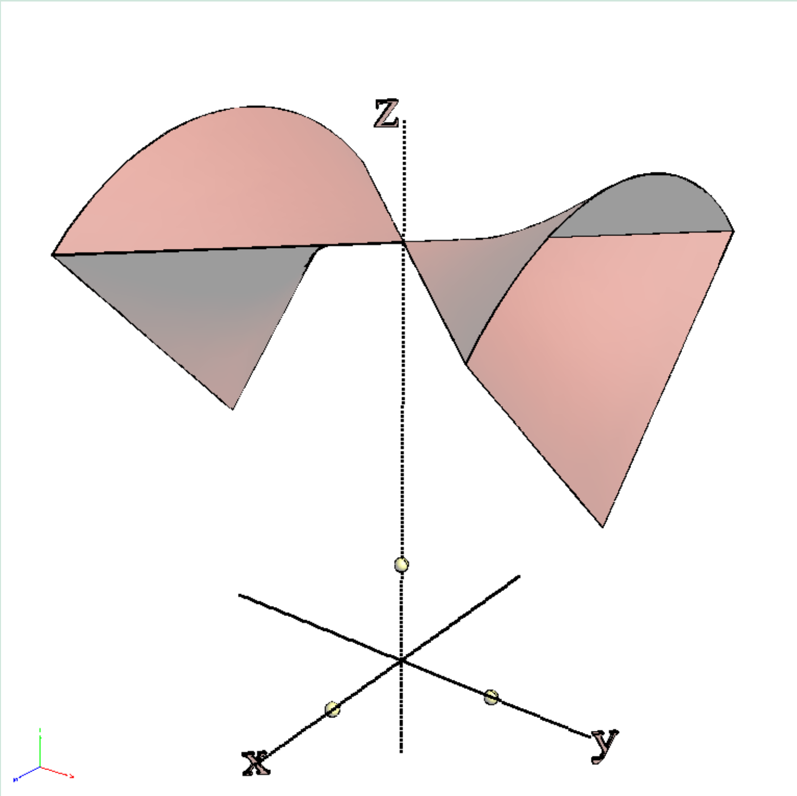
Řešení. Pokud můžeme souřadnice limitního bodu do příslušného výrazu dosadit (tj. po dosazení neobdržíme neurčitý výraz), je hodnota limity dané funkce rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Platí tedy

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x-y+3}{2x+5y} = \frac{4}{2} = 2.$$

Příklad 2.2. Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2-y^2+4}-2}.$$

Na obrázku 6 je vykreslen graf funkce $z = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2-y^2+4}-2}$. Naším úkolem je spočítat limitu v bodě, kde se stýkají obě části grafu. Budeme-li se k vyšetřovanému bodu $(0,0)$ blížit v libovolném směru (což lze snadno ověřit prozkoumáním 3D modelu, např. jeho rotací, zvětšením, zmenšením), dojdeme vždy do stejného bodu. Limita zadané funkce v bodě $(0,0)$ tedy existuje.



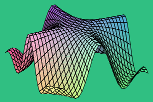
Obrázek 6: Graf funkce $z = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4} - 2}$.

Řešení. Protože bychom dosazením souřadnic limitního bodu získali neurčitý výraz typu $\left\| \frac{0}{0} \right\|$, najdeme hodnotu limity obratem typickým i pro funkce jedné proměnné. Zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{x^2 - y^2 + 4} + 2$ a dostáváme:

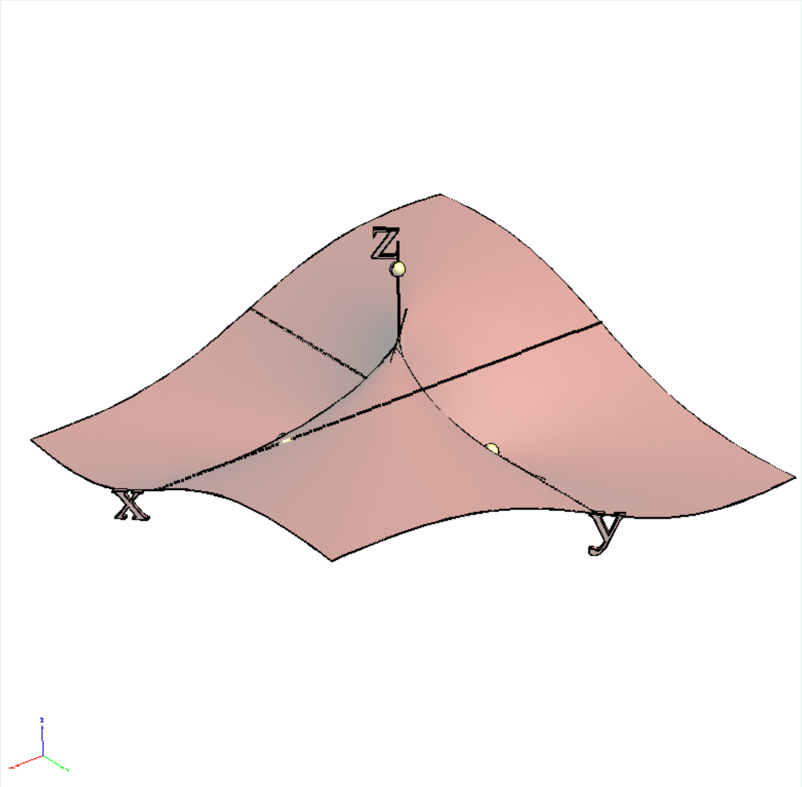
$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4} - 2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - y^2 + 4} + 2}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4} + 2} = \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(\sqrt{x^2 - y^2 + 4} + 2)}{x^2 - y^2 + 4 - 4} = \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{x^2 - y^2 + 4} + 2) = 4.
\end{aligned}
$$

Příklad 2.3. Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 28 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec



Obrázek 7: Graf funkce $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Řešení. Zavedením polárních souřadnic dostáváme

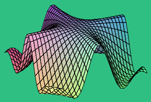
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2 \sin\varphi \cos\varphi}{r^2} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi.$$

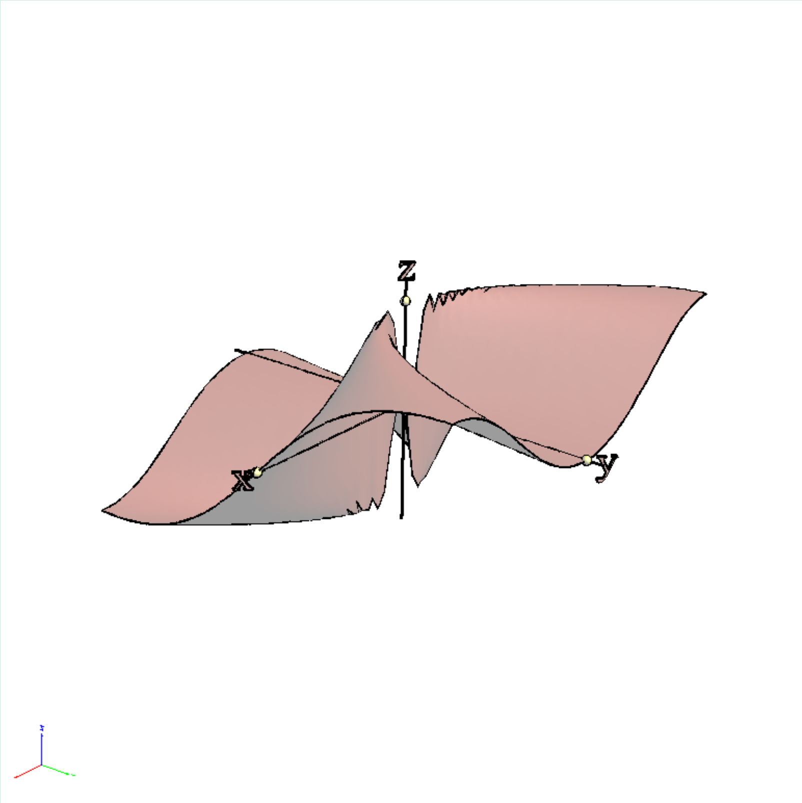
Protože výsledek závisí na φ, tj. na cestě, po které se blížíme k bodu $[0,0]$, uvedená limita neexistuje.

Povšimněte si, že v grafu na obrázku 7 se v okolí bodu $[0,0]$ vyskytují hroty. Je zřejmé, že takto graf zadané funkce nevypadá. Obrázek, který vidíme, byl nakreslen tak, že se spočítalo mnoho bodů a ty se pospojovaly. Funkce se v okolí bodu $[0,0]$ chová „velmi divoce“, stačí malá změna a dostanete zcela jinou funkční hodnotu. Proto ani software nespojí jednotlivé body zcela správně. Na druhou stranu to přesně odpovídá našemu tvrzení, že když se blížíme k bodu $[0,0]$ po různých drahách, dostaneme různý výsledek.

Příklad 2.4. Rozhodněte, zda existuje limita v bodě $[0,0]$ funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované takto

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$





Obrázek 8: Graf funkce $f(x, y)$.

Řešení. Po transformaci do polárních souřadnic dostáváme

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2(r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{r\to} \frac{r \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi} = 0,$$

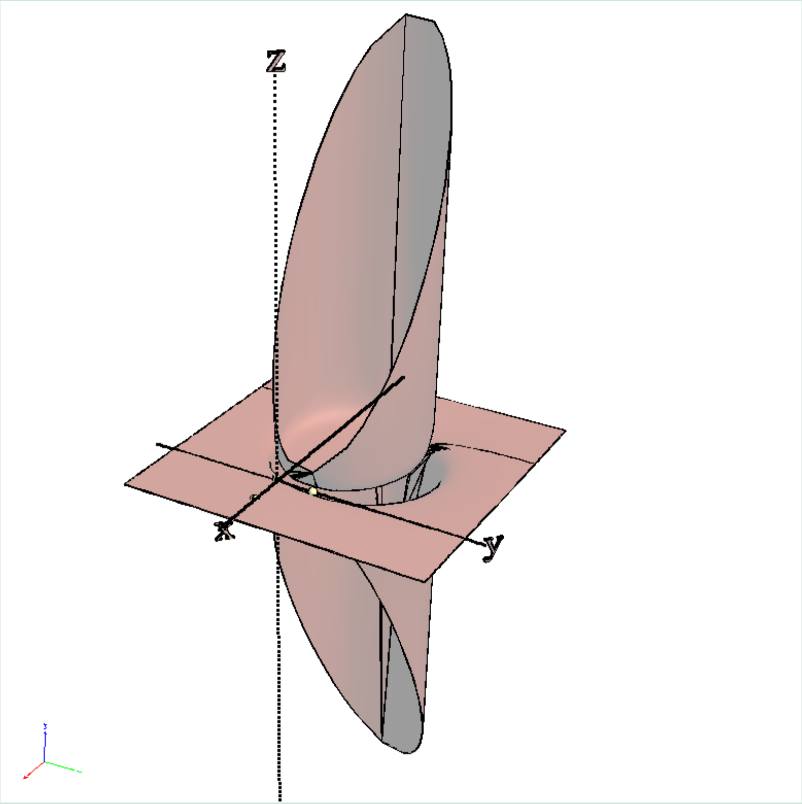
přesto však limita funkce v bodě $[0, 0]$ neexistuje. Vskutku, položíme-li $y = kx^2$, tj. k limitnímu bodu $[0, 0]$ se blížíme po parabolách, dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2},$$

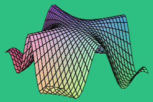
což je výsledek závisející na konstantě k. Jinými slovy dostáváme různé výsledky, blížíme-li se k limitnímu bodu po různých cestách, proto i na obrázku 8 dochází k podobnému chování funkce jako v předcházejícím příkladě.

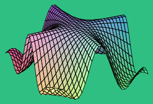
Příklad 2.5. Určete body, v nichž není funkce $f(x, y) = \frac{5x-y}{(x+2)^2+(y-1)^2-4}$ spojitá.

Řešení. Funkce $f_1(x, y) = 5x - y$, $f_2(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 4$ jsou polynomy ve dvou proměnných a ty jsou spojité v celé rovině. Funkce f není spojitá v bodech, ve kterých není definována, tj. kde $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Body, v nichž funkce není spojitá, tvoří kružnici se středem v bodě $[-2, 1]$ a s poloměrem 2, jak je vidět na obrázku 9.



Obrázek 9: Graf funkce $f(x, y) = \frac{5x-y}{(x+2)^2+(y-1)^2-4}$.





Start testu **Limita a spojitost funkce – test 1**

Pokud v následujících příkladech máte vepsat hodnotu limity, která neexistuje, vepište do pole pro vlastní odpověď znak −.

1. Nechť je dána limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$.

(a) Rozhodněte, zda limita existuje.

(a) ano (b) ne

(b) Hodnota limity je: ☐

2. Rozhodněte, zda existuje limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 \cos\frac{1}{xy^2}$.

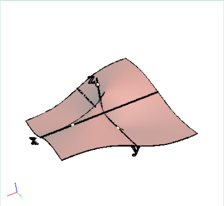
(a) (a) ano (b) ne

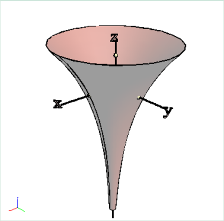
(b) Hodnota limity je: ☐

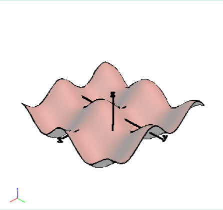
3. Rozhodněte, zda limita funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\to(0,0)$

(a) (a) neexistuje (b) existuje a je nevlastní (c) existuje a je vlastní tj. ☐

(b) Podle výsledku rozhodněte, který z následujících obrázků je grafem funkce f.

(a) 

(b) 

(c) 

Pojem funkce více proměnných
Limita a spojitost funkce
Parciální a směrové derivace
Diferenciál funkce
Taylorův polynom, derivace . . .
Lokální a absolutní extrémy
Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 34 z 89
◀ ▶
Zpět Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

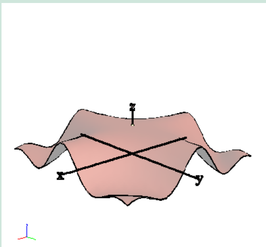
4. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ v bodě $[0,0]$. $\boxed{}$

5. Vypočtěte limitu $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$, jestliže existuje.

(a) (a) Limita neexistuje. (b) Limita existuje.

(b) Hodnota limity je: $\boxed{}$

6. Vyčíslete hodnotu limity $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$, jestliže existuje.



(a) (a) Limita neexistuje.
(b) Limita existuje.

(b) Hodnota limity je: $\boxed{}$

7. Je dána funkce $f(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}$.

(a) $\lim_{(x,y,z)\to(1,2,5)} f(x,y) =$ $\boxed{}$

(b) Funkce je spojitá v $\mathbb{R}^2$ pro

- ☐ $x+y+z=0$
- ☐ $x+y+z>0$
- ☐ $x+y+z<0$
- ☐ všechny body z $\mathbb{R}^2$

8. Rozhodněte o spojitosti složené funkce $f \circ g$, přičemž $f(t) = t^2, g(x, y) = 3x - 2y$. Složená funkce

(a) je (b) není spojitá v $\mathbb{R}^2$.

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí:

Start testu **Limita a spojitost funkce – test 2**

Pokud v následujících příkladech máte vepsat hodnotu limity, která neexistuje, vepište do pole pro vlastní odpověď znak $-$.

1. Nechť je dána limita $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(a) Rozhodněte, zda limita existuje.

(a) ano (b) ne

(b) Hodnota limity je: ☐

2. Rozhodněte, zda existuje limita $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{xy}-1}{x}$.

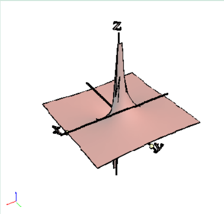
(a) (a) ano (b) ne

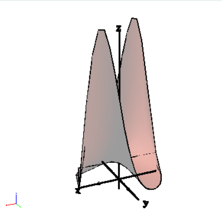
(b) Hodnota limity je: ☐

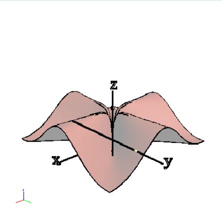
3. Rozhodněte, zda limita funkce $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ pro $(x,y) \to (0,0)$.

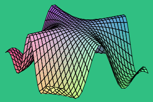
(a) (a) neexistuje (b) existuje a je nevlastní (c) existuje a je vlastní tj. ☐

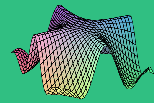
(b) Podle výsledku rozhodněte, který z následujících obrázků je grafem funkce f.

(a) 

(b) 

(c) 





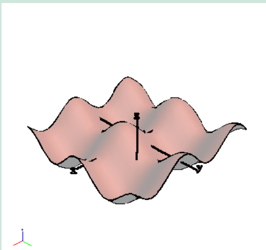
4. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x-y+z-1}{z+x-y-1}$ v bodě $[1,1,1]$. $\boxed{}$

5. Vyčíslete hodnotu limity $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, jestliže existuje.

(a) (a) Limita neexistuje. (b) Limita existuje.

(b) Hodnota limity je: $\boxed{}$

6. Vyčíslete hodnotu limity $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sin x + \cos y)$, jestliže existuje.



(a) (a) Limita neexistuje.
(b) Limita existuje.

(b) Hodnota limity je: $\boxed{}$

7. Je dána funkce $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$.

(a) Limita $\lim_{(x,y)\to(2,4)} f(x,y) =$ $\boxed{}$

(b) Funkce f je spojitá v $\mathbb{R}^2$ pro

(a) $x = y$ (b) $x = -y$ (c) $x \neq y$

(d) $x \neq -y$ (e) $xy \neq 0$ (f) všechny body z $\mathbb{R}^2$

Pojem funkce více proměnných
Limita a spojitost funkce
Parciální a směrové derivace
Diferenciál funkce
Taylorův polynom, derivace . . .
Lokální a absolutní extrémy
Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 38 z 89
◀ ▶
Zpět Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

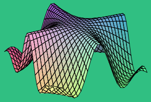
8. Rozhodněte o spojitosti složené funkce $f \circ g$, přičemž $f(t) = \frac{1}{t}, g(x,y) = 3x - 2y$. Složená funkce je spojitá v $\mathbb{R}^2$ pro

- ☐ $y = \frac{3x}{2}$
- ☐ $y \neq \frac{3x}{2}$
- ☐ $y = \frac{2x}{3}$
- ☐ $y \neq \frac{2x}{3}$
- ☐ všechny body z $\mathbb{R}^2$

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí:

Pojem funkce více proměnných
Limita a spojitost funkce
Parciální a směrové derivace
Diferenciál funkce
Taylorův polynom, derivace . . .
Lokální a absolutní extrémy
Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 39 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec



Start testu **Limita a spojitost funkce – test 3**

Pokud v následujících příkladech máte vepsat hodnotu limity, která neexistuje, vepište do pole pro vlastní odpověď znak $-$.

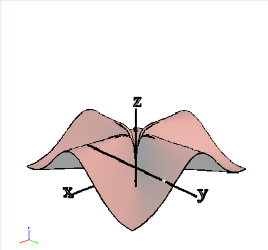
1. Nechť je dána limita $\lim_{(x,y)\to(e^2,1)} \frac{\ln x}{y}$.

(a) Rozhodněte, zda limita existuje.

(a) ano (b) ne

(b) Hodnota limity je: ☐

2. Vyčíslete hodnotu limity $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$, jestliže existuje.



(a) (a) Limita neexistuje. (b) Limita existuje.

(b) Hodnota limity je: ☐

3. Je dána funkce $f(x,y) = \left(\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}\right)^2$.

(a) Existuje limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

(a) ano (b) ne

(b) Hodnota limity je: ☐

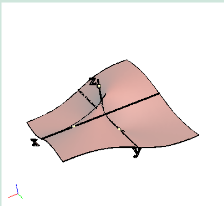
Pojem funkce více proměnných
Limita a spojitost funkce
Parciální a směrové derivace
Diferenciál funkce
Taylorův polynom, derivace . . .
Lokální a absolutní extrémy
Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 40 z 89
◀ ▶
Zpět *Vpřed*
Přepnout režim obrazovky
Konec

4. Rozhodněte o existenci limity funkce $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ pro $(x,y) \to (0,0)$.

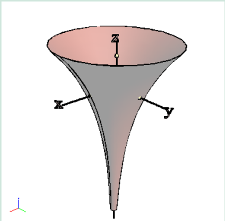
(a) (a) neexistuje (b) existuje a je nevlastní (c) existuje a je vlastní tj.

(b) Podle výsledku rozhodněte, který z následujících obrázků je grafem funkce f.

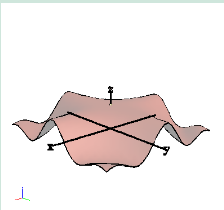
(a)



(b)



(c)



5. Vypočtěte limitu $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}$, jestliže existuje.

(a) (a) Limita neexistuje. (b) Limita existuje.

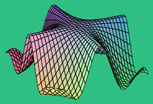
(b) Hodnota limity je:

6. Je dána funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$.

(a) Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$

(b) Funkce je spojitá v $\mathbb{R}^2$ pro

- všechny body z $\mathbb{R}^2$
- $x < 0$
- $x \leq 0$
- $y < 0$
- $y \leq 0$



7. Rozhodněte, zda je limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$$

(a) (a) vlastní (b) nevlastní

(b) Hodnota limity je:

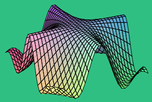
(a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) jiná, tj. ☐

8. Rozhodněte o spojitosti složené funkce $f \circ g$, přičemž $f(t) = \frac{1}{t}, g(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} - 1$.
Složená funkce je spojitá v $\mathbb{R}^2$ pro:

- ☐ $x \neq 0$
- ☐ $x \neq y$
- ☐ $y \neq 0$
- ☐ $\frac{x}{y} \neq 1$
- ☐ všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí: ☐



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 42 z 89
◀ ▶
Zpět Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

3. Parciální a směrové derivace

Příklad 3.1. Vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení. Při výpočtu parciální derivace podle proměnné x považujeme proměnnou y za konstantu, tj. derivujeme jako obyčejnou derivaci podle x:

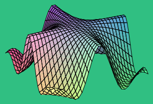
$$z_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2},$$

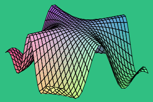
$$z_{xx} = \frac{1(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad z_{xy} = x \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

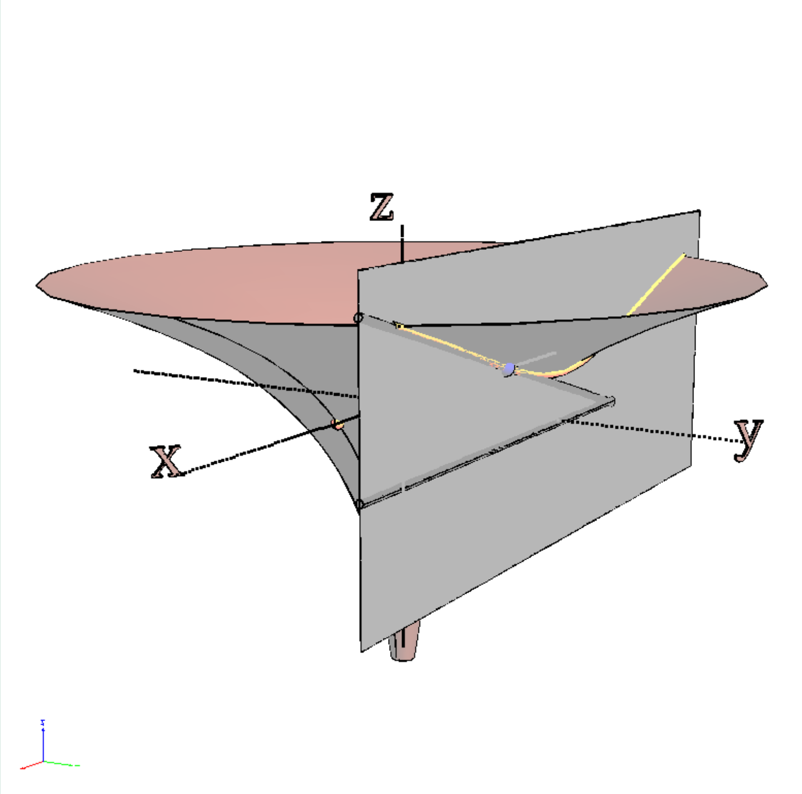
Analogicky:

$$z_y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad z_{yy} = \frac{1(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Na obrázku 10 je zobrazena šedá rovina $y = konst.$, žlutě její průnik s grafem funkce. V modře vyznačeném bodě počítáme parciální derivaci podle x, což je tangens úhlu, který svírá tečna s rovinou xy (úhel mezi černými přímkami).







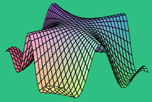
Obrázek 10: Graf funkce $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, geometrický význam parciální derivace podle x v bodě.

Příklad 3.2. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ v bodě $[-1,1]$ ve směru vektoru $u=(1,2)$.

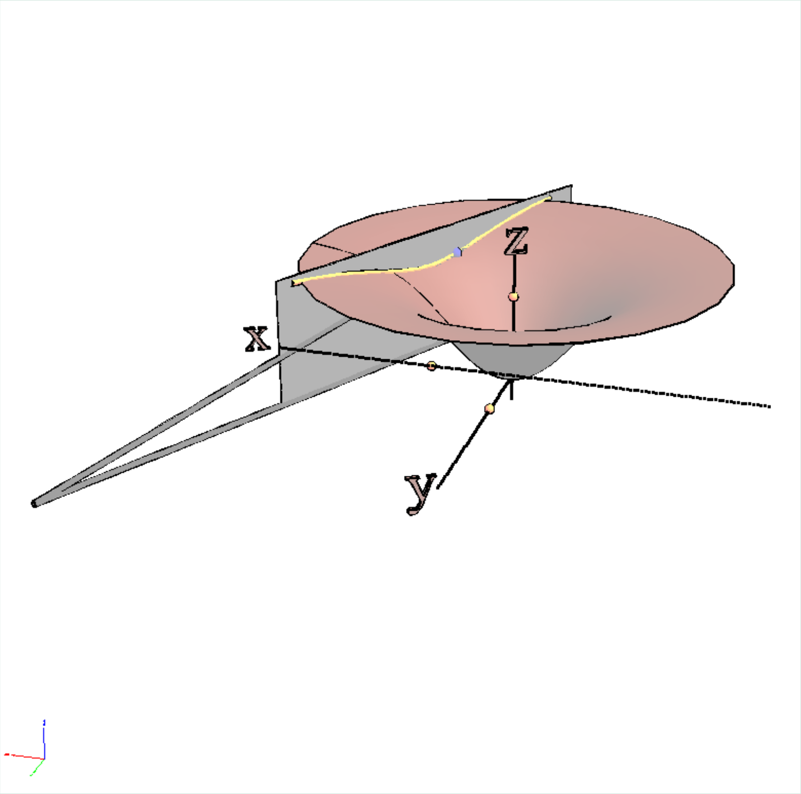
Řešení. Přímým dosazením do definice a využitím l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} f_{(1,2)}(1,1) &= \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\left[(1+t)^2+(-1+2t)^2\right]-\operatorname{arctg}2}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(2-2t+5t^2)-\operatorname{arctg}2}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{-2+10t}{1+(2-2t+5t^2)^2} = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

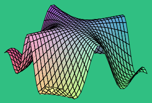
Situace je zobrazena na obrázku 11. V modrém bodě $[1,-1]$ počítáme směrovou derivaci ve směru vektoru $u=(1,2)$. Šedá rovina je určena modrým bodem, směrem u a směrem osy z. Žlutě je označen její průnik s grafem funkce. Tečna k průniku svírá s rovinou xy úhel, jehož tangens je roven námi počítané derivaci v bodě (v obrázku se jedná o úhel mezi černými přímkami).



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 45 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec



Obrázek 11: Graf funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$, geometrický význam směrové derivace v bodě.



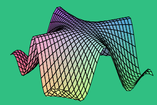
Příklad 3.3. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $[1,1]$ ve směru vektoru $u=(1,0)$.

Řešení. Přímým dosazením do definice a následným využitím l'Hospitalova pravidla dostáváme

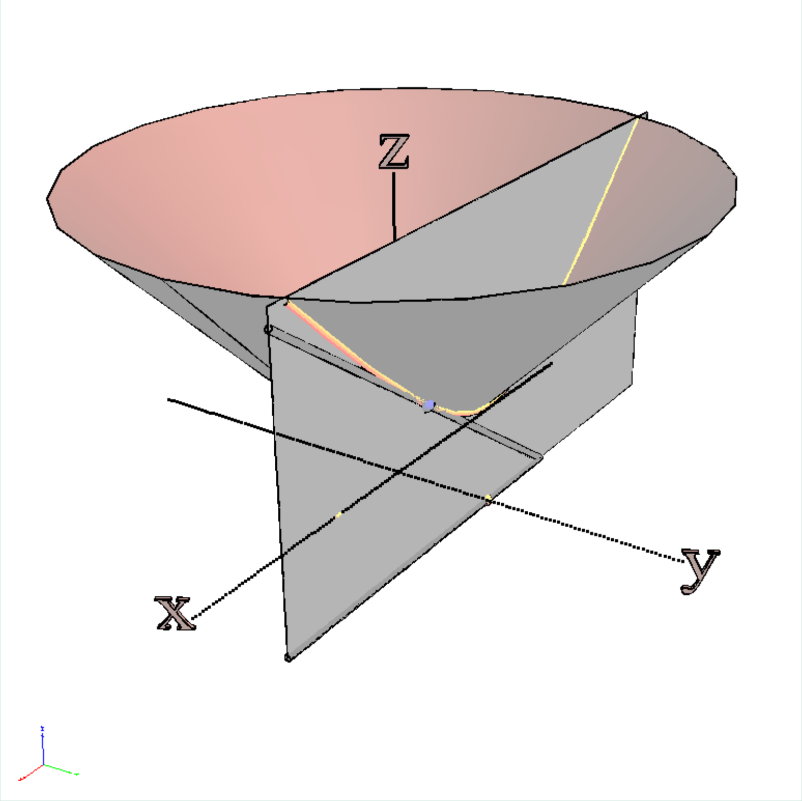
$$
\begin{aligned}
f_{(1,0)}(1,1) &= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{(1+t)^2+1^2}-\sqrt{1^2+1^2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+2t+t^2+1}-\sqrt{2}}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2+2t+t^2}-\sqrt{2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2+2t+t^2}}(2t+2)}{1} = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

V tomto příkladu jsme počítali směrovou derivaci v bodě ve směru $(1,0)$. Všimněme si, že obrázek 12 je obdobný jako obrázek 10. Jinými slovy:

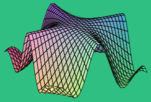
Parciální derivace podle x je směrová derivace ve směru $(1,0)$ a parciální derivace podle y je směrová derivace ve směru $(0,1)$.



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 47 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec



Obrázek 12: Graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Start testu **Parciální derivace – test 1**

1. Rozhodněte, zda platí:

Nechť funkce f má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace f_x, f_y a smíšenou parciální derivaci f_{xy}, která je v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá.

Pak existuje také smíšená parciální derivace $f_{yx}(x_0, y_0)$ a platí:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

(a) ano, tvrzení platí (b) ne, tvrzení neplatí

2. Najděte parciální derivace 1. řádu funkce $z = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4x - 5y + 100$.

$z_x =$ ______ $z_y =$ ______

3. Najděte všechny parciální derivace prvního řádu funkce $f(x, y) = \sin(x\sqrt{y})$ a vyhodnoťte je v bodě $[\frac{\pi}{3}, 4]$.

$f_x =$ ______ $f_x(\frac{\pi}{3}, 4) =$ ______

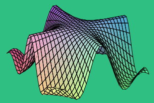
$f_y =$ ______ $f_y(\frac{\pi}{3}, 4) =$ ______

4. Odpovězte:

(a) Kolik smíšených parciálních derivací třetího řádu může mít funkce dvou proměnných? ______

(b) Jestliže jsou všechny její smíšené derivace spojité, kolik různých hodnot mohou mít v daném bodě? ______

5. Smíšená parciální derivace 2. řádu funkce $z = \dfrac{\cos x^2}{y}$ je ______.



6. Rozhodněte zda funkce $z = \dfrac{x+y}{x-y}$ vyhovuje rovnici $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

(a) vyhovuje (b) nevyhovuje

7. Rozhodněte zda funkce $z = \sqrt{x^2+y^2}$ vyhovuje rovnici $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

(a) vyhovuje (b) nevyhovuje

8. Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $z = x^2(1+y^2)$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \boxed{\quad}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \boxed{\quad}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \boxed{\quad}$

9. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = xy$ ve směru vektoru $u = (1,2)$ v bodě $[x_0, y_0] = [1,1]$.

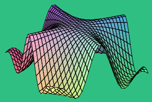
$f_{(1,2)}(1,1) = \boxed{\quad}$

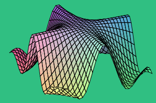
10. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ve směru vektoru $u = (1,0,1)$ v bodě $[x_0, y_0, z_0] = [0,1,0]$.

$f_{(1,0,1)}(0,1,0) = \boxed{\quad}$

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí:





Pojem funkce více proměnných
Limita a spojitost funkce
Parciální a směrové derivace
Diferenciál funkce
Taylorův polynom, derivace ...
Lokální a absolutní extrémy

Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 51 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

Start testu **Parciální derivace – test 2**

1. Rozhodněte, zda platí:
Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ obě parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.

(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí

2. Najděte parciální derivace 1. řádu funkce $z = x \sin(x + 2y)$.

$z_x =$ $z_y =$

3. Najděte všechny parciální derivace prvního řádu funkce $z = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$ a vyhodnoťte je v bodě $[-1, 1]$.

$z_x =$ $z_x(-1, 1) =$

$z_y =$ $z_y(-1, 1) =$

4. Zodpovězte:

(a) Kolik parciálních derivací třetího řádu může mít funkce dvou proměnných?

(b) Jestliže jsou všechny tyto smíšené derivace spojité, kolik různých hodnot mohou mít v daném bodě?

5. Rozhodněte zda funkce $w = x^2 + yz$ vyhovuje rovnici $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z} = 2w$.

(a) vyhovuje (b) nevyhovuje

6. Rozhodněte zda funkce $z = xe^y$ vyhovuje rovnici $x\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(a) vyhovuje (b) nevyhovuje

7. Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $w = x^3y^3z^3$.

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} =$ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} =$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} =$ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} =$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} =$ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} =$

8. Smíšená parciální derivace 2. řádu funkce $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ je

9. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \sqrt{\ln(x^2 + y^2)}$ ve směru vektoru $u = (2, 1)$ v bodě $[x_0, y_0] = [1, 1]$.

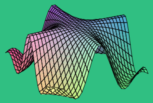
$f_{(1,1)}(2, 1) =$

10. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ ve směru vektoru $u = (3, 4, -12)$ v bodě $[x_0, y_0, z_0] = [-1, 1, 7]$.

$f_{(-1,1,7)}(3, 4, -12) =$

Konec testu Výsledky

Počet správných odpovědí:



Start testu **Parciální derivace – test 3**

1. Rozhodněte, zda platí:
Nechť funkce f má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace f_x, f_y a smíšenou parciální derivaci f_{xy}. Pak existuje také smíšená parciální derivace $f_{yx}(x_0, y_0)$ a platí:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

(a) ano, tvrzení platí (b) ne, tvrzení neplatí

2. Najděte parciální derivace 1. řádu funkce $z = \arctan \dfrac{x-y}{1+xy}$.

$z_x =$ ☐ $z_y =$ ☐

3. Najděte všechny parciální derivace prvního řádu funkce $f(x, y) = \sqrt{y} \sin x$ a vyhodnoťte je v bodě $[\frac{\pi}{3}, 4]$.

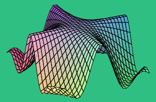
$f_x =$ ☐ $f_x(\frac{\pi}{3}, 4) =$ ☐

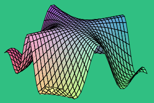
$f_y =$ ☐ $f_y(\frac{\pi}{3}, 4) =$ ☐

4. Nechť existují všechny parciální derivace třetího řádu funkce tří proměnných a jsou spojité. Kolik různých hodnot mohou mít tyto derivace v daném bodě? ☐

5. Vyhovuje funkce $w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ rovnici $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z} = -2w$?

(a) vyhovuje (b) nevyhovuje





6. Rozhodněte zda funkce $z = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ vyhovuje rovnici $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

(a) vyhovuje (b) nevyhovuje

7. Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $z = x\mathrm{e}^y - y\mathrm{e}^x$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \square$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \square$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \square$

8. Smíšená parciální derivace 2. řádu funkce $z = x^{x+y}$ je $\square$

9. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y) = 4xy + 3y^2$ ve směru vektoru $u = (2,-1)$ v bodě $[x_0, y_0] = [1,1]$.

$f_{(1,1)}(2,-1) = \square$

10. Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y,z) = z - \mathrm{e}^x \sin(y)$ ve směru vektoru $u = (1,2,2)$ v bodě $[x_0, y_0, z_0] = [\ln 3, \dfrac{3\pi}{2}, -3]$.

$f_{(\ln 3, \frac{3\pi}{2}, -3)}(1,2,2) = \square$

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí:

Pojem funkce více proměnných
Limita a spojitost funkce
Parciální a směrové derivace
Diferenciál funkce
Taylorův polynom, derivace ...
Lokální a absolutní extrémy

Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 54 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

4. Diferenciál funkce

Příklad 4.1. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně $\sqrt{(0,98)^2+(2,03)^3}$.

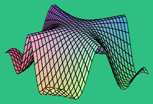
Řešení. K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^3}$ v bodě $[1,2]$ s diferencemi $\mathrm{d}x=-0,02$, $\mathrm{d}y=0,03$. Platí

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(x,y)&=\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^3}}+\frac{3}{2}\frac{y^2\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^3}},\\ \mathrm{d}f(1,2)&=\frac{1}{3}\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

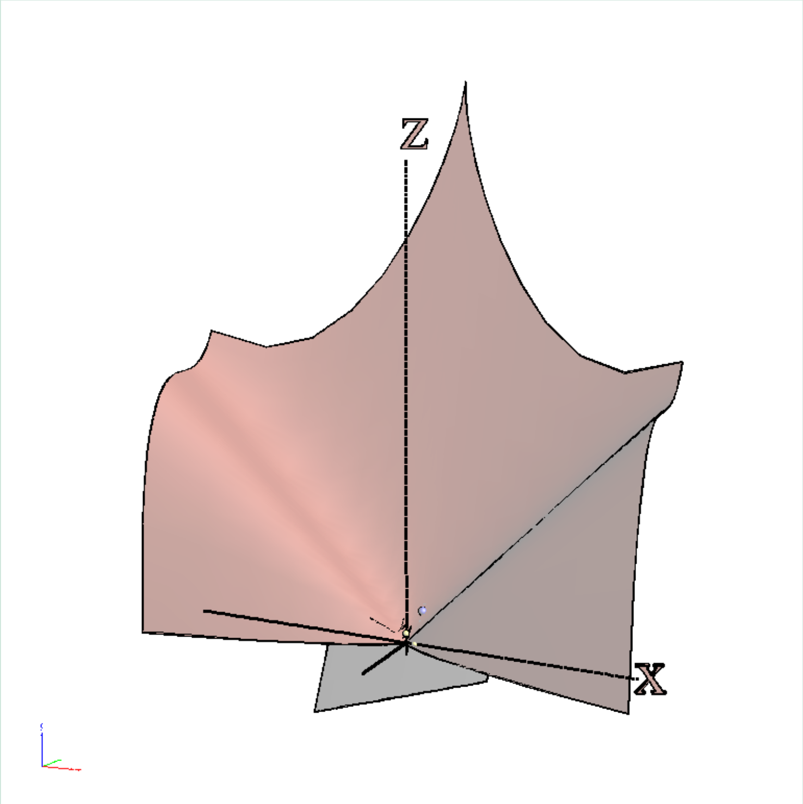
Dosazením do $f(x,y)\doteq f(x_0,y_0)+\mathrm{d}f(x_0,y_0)$ dostáváme

$$\sqrt{(0,98)^2+(2,03)^3}\doteq 3+\frac{1}{3}\cdot(-0,02)+2\cdot(0,03)=3,05\overline{3}.$$

Na obrázku 13 je graf funkce s modře vyznačeným bodem $[1,2]$. V tomto bodě je sestrojena šedá tečná rovina. Náš výpočet totiž odpovídá právě tomu, že vezmeme hodnotu funkce v modrém bodě a připočteme přírůstek na tečné rovině. Tedy aproximujeme v okolí modrého bodu graf funkce tečnou rovinou.



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 55 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec



Obrázek 13: 3D obrázek funkce $f(x, y)$ a diferenciálu $\mathrm{d}f(1, 2)$.

Příklad 4.2. Zjistěte, zda výraz $(2x\ln y+5y)\mathrm{d}x+(\frac{x^2}{y}+5x+3)\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce, a pokud ano, najděte ji:

Řešení. Nejprve ověříme, zda je uvedený výraz opravdu diferenciálem. Označíme $P(x,y) = 2x\ln y + 5y$ a $Q(x,y) = \frac{x^2}{y} + 5x + 3$. Pro každé $[x,y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, na níž jsou funkce P a Q definovány, musí platit

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y), \text{ tj.}$$

$$P_y = \frac{2x}{y} + 5,\ Q_x = \frac{2x}{y} + 5.$$

Zadaný výraz je tedy totálním diferenciálem jisté kmenové funkce H. Dále platí

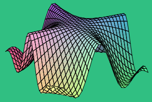
$$H(x,y) = \int (2x\ln y + 5y)\mathrm{d}x = x^2\ln y + 5xy + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ hraje roli integrační konstanty, neboť její derivace podle x je nulová. Derivováním podle y a dosazením do vztahu $H_y = Q$ dostáváme

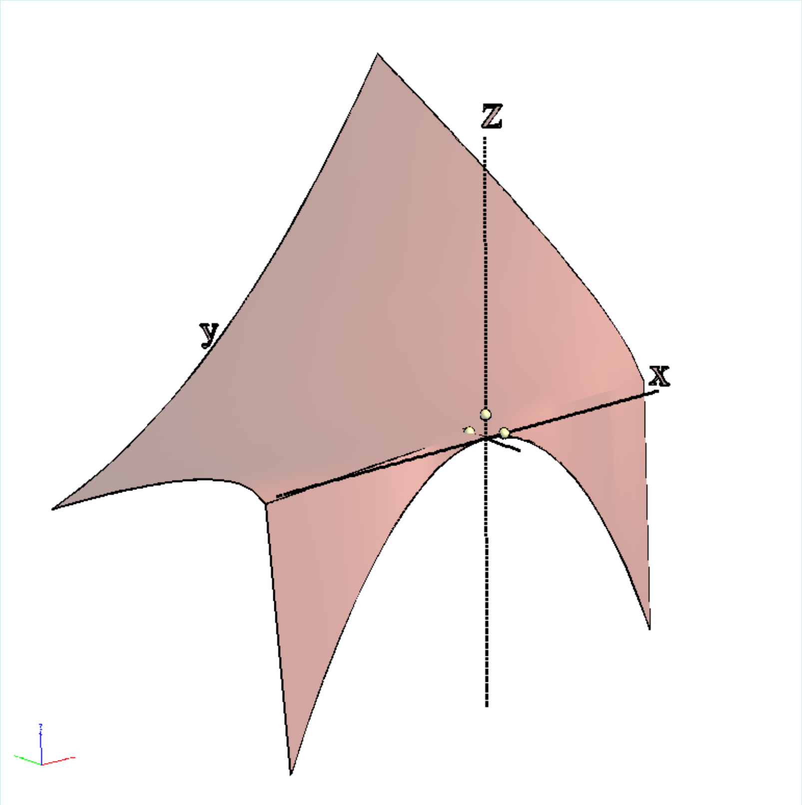
$$H_y = \frac{x^2}{y} + 5x + \varphi'(y) = \frac{x^2}{y} + 5x + 3 = Q,$$

odkud $\varphi'(y) = 3$, tj. $\varphi(y) = 3y + c$. Vypočítali jsme, že zadaný výraz je diferenciálem funkce

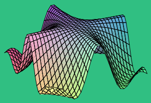
$$H(x,y) = x^2\ln y + 5xy + 3y + c,\ c \in \mathbb{R}.$$



Pojem funkce více proměnných
Limita a spojitost funkce
Parciální a směrové derivace
Diferenciál funkce
Taylorův polynom, derivace . . .
Lokální a absolutní extrémy
Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 57 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec



Obrázek 14: 3D obrázek výsledné kmenové funkce $H(x, y)$ pro $c = 0$.



Start testu **Diferenciál – test 1**

1. Vypočtěte totální diferenciál funkce $z = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ v bodě $A = [2, 2]$ pro $\mathrm{d}x = 0,03$ a $\mathrm{d}y = 0,01$. $\boxed{}$

2. Vypočtěte totální diferenciál funkce $z = \arctan \frac{x}{y}$ v bodě $A = [1, 3]$ pro $\mathrm{d}x = 0,01$ a $\mathrm{d}y = -0,05$. $\boxed{}$

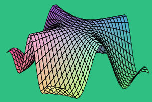
3. Pomocí diferenciálu vypočtěte (s přesností na dvě desetinná místa):
$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3} \doteq$ $\boxed{}$

4. Pomocí diferenciálu s přesností na dvě desetinná místa vypočtěte:
$\mathrm{e}^{0,05^3 - 0,02} \doteq$ $\boxed{}$

5. Rozhodněte, zda platí následující věta:
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.
(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí

6. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x, y) = \ln(2x^3 - 8y^2)$ v bodě $[x_o, y_o, z_o] = [2, 1, ?]$.
ϱ: $\boxed{}$ $= 0$

7. Najděte přibližnou hodnotu funkce $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + \mathrm{e}^{2y}}$ v bodě $[2, 2; -0, 2]$ a to s přesností na jedno desetinné místo.
$\mathrm{d}f(2, 2; -0, 2) \doteq$ $\boxed{}$



8. Nechť $y = x^3$, kde x je derivovatelná funkce proměnné t. Předpokládejme, že pro $x = 4$ je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3$.

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ se pak rovná $\boxed{\quad\quad}$

9. Najděte obecnou rovnici tečny t ke kružnici $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

$t\colon \boxed{\quad\quad\quad\quad} = 0.$

10. Určete diferenciál funkce $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ v bodě $[x_0, y_0] = [\sqrt{3}, 1]$.

$\mathrm{d}z = \boxed{\quad\quad}\,\mathrm{d}x + \boxed{\quad\quad}\,\mathrm{d}y$

11. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$ v obecném bodě.

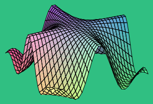
$\mathrm{d}z = \boxed{\quad\quad\quad\quad}\,\mathrm{d}x + \boxed{\quad\quad\quad\quad}\,\mathrm{d}y$

12. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = (x - y)^2$ v obecném bodě.

$\mathrm{d}z = \boxed{\quad\quad\quad\quad}\,\mathrm{d}x + \boxed{\quad\quad\quad\quad}\,\mathrm{d}y$

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí:



Start testu **Diferenciál – test 2**

1. Vypočtěte totální diferenciál funkce $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $A = [3, 4]$ pro $\mathrm{d}x = 0,1$ a $\mathrm{d}y = 0,2$. [ ]

2. Vypočtěte totální diferenciál funkce $z = \mathrm{e}^{xy}$ v bodě $A = [1, 2]$ pro $\mathrm{d}x = -0,1$ a $\mathrm{d}y = 0,1$. [ ]

3. Pomocí diferenciálu vypočtěte:

$$\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98 \cdot 1{,}05^4}} \doteq \boxed{}$$

4. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně:

$$\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05} \doteq \boxed{}$$

5. Rozhodněte, zda platí následující věta:
Funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$ právě tehdy, když je v tomto bodě diferencovatelná.

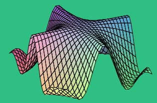
(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí

6. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ v bodě $[x_o, y_o, z_o] = [1, -2, ?]$.

$\varrho\colon \boxed{} = 0$

7. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ v bodě $[x_o, y_o, z_o] = [-2, 2, ?]$.

$\varrho\colon \boxed{} = 0$



8. Najděte přibližnou hodnotu funkce $f(x,y) = \sin(\pi xy + \ln y)$ v bodě $[0,01; 1,05]$ a to s přesností na čtyři desetinná místa.

$\mathrm{d}f(0,01; 1,05) \doteq \boxed{\quad\quad}$

9. Nechť $y = x^3$, kde x je derivovatelná funkce proměnné t. Předpokládejme, že pro $x = 3$ je $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3$.

Čemu se pak rovná $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$? $\boxed{\quad\quad}$

10. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = 3x^2 - 2y^3$ v obecném bodě.

$\mathrm{d}z = \boxed{\quad\quad}\,\mathrm{d}x + \boxed{\quad\quad}\,\mathrm{d}y$

11. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = x^y$ v obecném bodě.

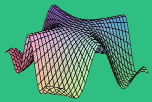
$\mathrm{d}z = \boxed{\quad\quad\quad\quad}\,\mathrm{d}x + \boxed{\quad\quad\quad\quad}\,\mathrm{d}y$

12. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = \arctan\frac{x-y}{x+y}$ v obecném bodě.

$\mathrm{d}z = \boxed{\quad\quad\quad\quad}\,\mathrm{d}x + \boxed{\quad\quad\quad\quad}\,\mathrm{d}y$

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí: $\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad}$



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 62 z 89
Zpět *Vpřed*
Přepnout režim obrazovky
Konec

Start testu **Diferenciál – test 3**

1. Vypočtěte totální diferenciál funkce $z = 2^x \sin y \arctan z$ v bodě $A = [-4, \frac{\pi}{2}, 0]$ pro $\mathrm{d}x = 0,05$, $\mathrm{d}y = 0,06$ a $\mathrm{d}z = 0,08$.

2. Pomocí diferenciálu s přesností na dvě desetinná místa vypočtěte:

$\ln(0,97^2 + 0,05^2) \doteq$

3. Pomocí diferenciálu s přesností na tři desetinná místa vypočtěte:

$\arctan \frac{1{,}02}{0{,}95} \doteq$

4. Rozhodněte, zda platí následující věta:

Je-li funkce f spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě diferencovatelná.

(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí

5. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ v bodě $[x_o, y_o, z_o] = [2, 1, ?]$.

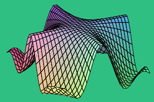
$\varrho\colon$ $= 0$

6. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x,y) = x\mathrm{e}^{3x+2y}$ v bodě $[x_o, y_o, z_o] = [-2, 3, ?]$.

$\varrho\colon$ $= 0$

7. Najděte přibližnou hodnotu (s přesností na jedno desetinné místo) funkce $f(x,y) = x^2 y^3$ v bodě $[3, 1; 0, 9]$.

$\mathrm{d}f(3, 1; 0, 9) \doteq$



8. Určete hodnotu diferenciálu (s přesností na dvě desetinná místa) funkce $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{xy}$ v bodě $T=[2,2]$ pro $\mathrm{d}x=0,03, \mathrm{d}y=0,01$.

$\mathrm{d}f(2,2) \doteq$

9. Nechť $y=x^3$, kde x je derivovatelná funkce proměnné t. Předpokládejme, že pro $y=8$ je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2$.

Čemu se pak rovná $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$?

10. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z=y\ln 2x$ v obecném bodě.

$\mathrm{d}z =$ $\mathrm{d}x +$ $\mathrm{d}y$

11. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $u=\frac{xy}{z}$ v obecném bodě.

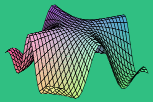
$\mathrm{d}u =$ $\mathrm{d}x +$ $\mathrm{d}y +$ $\mathrm{d}z$

12. Určete diferenciál funkce $f(x,y)=\operatorname{arctan}(xy)$.

$\mathrm{d}f(x,y) =$ $\mathrm{d}x+$ $\mathrm{d}y$.

Konec testu Výsledky

Počet správných odpovědí:



5. Taylorův polynom, derivace složené funkce

Příklad 5.1. Využitím substituce $u = x$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$ najděte všechny funkce splňující rovnost $yz_x - xz_y = 0$.

Řešení. Protože vnitřní i vnější složky mají spojité parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$, má složená funkce parciální derivace v každém bodě tohoto prostoru. Dosazením do

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x, \; z_y = z_u u_y + z_v v_y$$

dostáváme

$$z_x = z_u \cdot 1 + z_v \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = z_u + z_v \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
$$z_y = z_u \cdot 0 + z_v \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = z_v \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Dosadíme-li za z_x a z_y do zadané rovnosti, dostáváme

$$yz_u + yz_v \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - xz_v \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

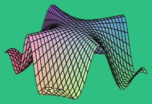
Odtud

$$yz_u = 0,$$
$$z_u = 0.$$

Řešením této rovnice je $z(u, v) = \int 0 \, \mathrm{d}u = 0 + f(v)$, kde f je libovolná (diferencovatelná) funkce jedné proměnné. Po dosazení za u a v dostáváme

$$z(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

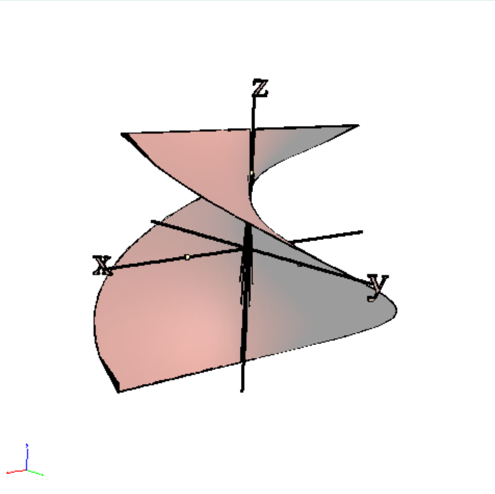
kde f je libovolná funkce jedné proměnné mající derivaci 2. řádu.



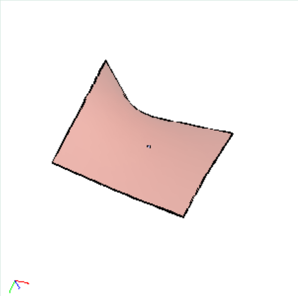
Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 65 z 89
◀ ▶
Zpět *Vpřed*
Přepnout režim obrazovky
Konec

Příklad 5.2. Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně vypočtěte přibližně (s přesností na pět desetinných míst) funkční hodnotu $\operatorname{arctg} \frac{0{,}97}{1{,}02}$.

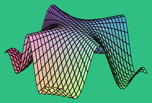
Obrázek 15: Funkce $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

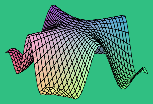


(a) Graf funkce.



(b) Okolí vyšetřovaného bodu.





Řešení. Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ v bodě $[1, 1]$ a diferencemi $h = -0,03$, $k = 0,02$. Parciální derivace funkce z jsou

$$z_x = \frac{1}{\frac{x^2}{y^2} + 1} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z_y = \frac{1}{\frac{x^2}{y^2} + 1} \cdot x \cdot (-1) \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2},$$

$$z_{xx} = y \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$z_{yy} = -x \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$z_{xy} = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Taylorův polynom je roven

$$T_2(x, y) = z(1, 1) + z_x(1, 1)(x - 1) + z_y(1, 1)(y - 1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[z_{xx}(1, 1)(x - 1)^2 + 2 z_{xy}(1, 1)(x - 1)(y - 1) + z_{yy}(1, 1)(y - 1)^2 \right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{4}(x - 1)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (x - 1)(y - 1) + \frac{2}{4}(y - 1)^2 \right] =$$

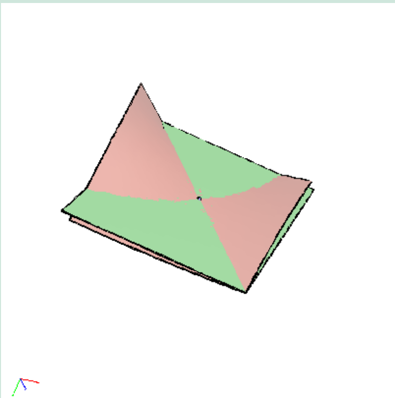
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{4}(x - 1)^2 + \frac{1}{4}(y - 1)^2.$$

Odtud

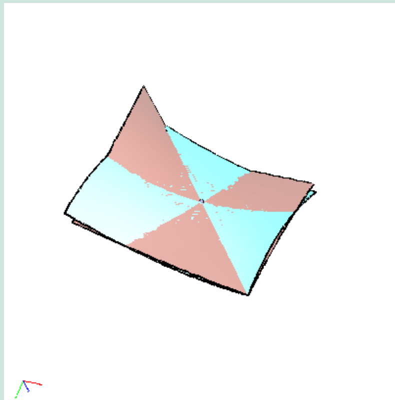
$$\operatorname{arctg} \frac{0,97}{1,02} \doteq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-0,03) - \frac{1}{2}(0,02) - \frac{1}{4}(-0,03)^2 + \frac{1}{4}(0,02)^2 = 0,76027.$$

Taylorův polynom $T_1(x, y)$ prvního řádu je dán lineární rovnicí, ta popisuje zelenou rovinu na obrázku 16(a). Spočítáme-li Taylorův polynom $T_2(x, y)$ druhého řádu dostaneme plochu druhého stupně, zobrazena na obrázku 16(b). Na obrázku 17 pak můžete pozorovat, že $T_2(x, y)$ aproximuje graf funkce lépe než $T_1(x, y)$, tj. více se blíží grafu funkce. Uvědomme si, že vše je vázáno na bod grafu, ve kterém výpočty provádíme. (Ten je ve všech obrázcích vyznačen modře.)

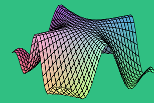
Obrázek 16: Graf funkce $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ a jejího Taylorova polynomu v bodě $[1, 1]$.



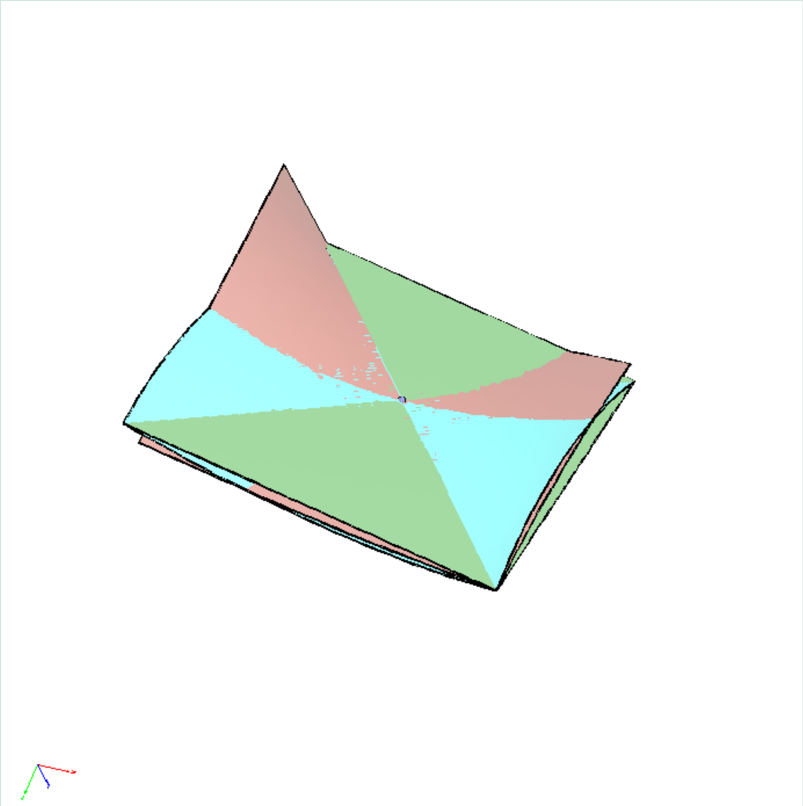
(a) Taylorův polynom 1. řádu.



(b) Taylorův polynom 2. řádu.



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 68 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec



Obrázek 17: Graf funkce $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ a její aproximace Taylorovým polynomem, kombinace obou grafů z obrázku 16.

Start testu **Taylorův polynom, derivace složené funkce – test 1**

1. Najděte Taylorův mnohočlen prvního řádu funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ se středem $A = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. $T_1(A) =$

2. Najděte Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě $A = [\frac{\pi}{2}, 1]$ pro funkci $f(x, y) = \sin(xy)$. $T_2(A) =$

3. Určete Maclaurinův polynom 2. stupně funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{x-y}$.

4. Určete Taylorův polynom daného stupně funkce $f(x, y) = \cos x \cos y$ se středem v bodě§ A.

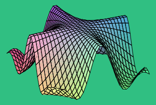
(a) $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $T_1(A) =$ $T_2(A) =$

(b) $A = [0, 0]$, $T_1(A) =$ $T_2(A) =$

5. Napište Maclaurinův mnohočlen řádu 2 pro funkci $f(x, y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$.

6. Najděte Maclaurinův mnohočlen třetího řádu funkce $f(x, y) = \ln(1 + xy)$.

7. Vyjádřete mnohočlen $24 + 11x - 9y - x^2 - 2xy + y^2 - x^3$ v mocninách $u = x + 2$ a $v = y - 1$.
Pozn.: Při zápisu výsledku použijte symboly u a v.



8. Vyjádřete mnohočlen $46 + 32x - 28y - 4x^2 - 20xy + 4y^2 + 3xy^2 - 2x^3$ v mocninách $u = x + 1$ a $v = y - 3$.
Pozn.: Při zápisu výsledku použijte symboly u a v.

[ ]

9. Na grafu funkce x^y najděte bod $T = [x_o, y_o, z_o]$, v němž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $\varrho\colon x - z = 0$.

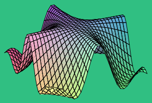
(a) (a) Takových bodů T existuje více.

(b) Takový bod T existuje jediný

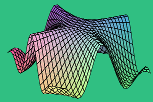
(b) Souřadnice bodu T jsou: $[x_0, y_0, z_0] =$[[ ], [ ], [ ]]
Existuje-li více bodů T, tj. nelze souřadnice jednoznačně určit, vyplňte $[-, -, -]$.

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí: [ ]



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 71 z 89
◀ ▶
Zpět Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec



Start testu

Taylorův polynom, derivace složené funkce – test 2

1. Najděte Taylorův polynom prvního stupně se středem v bodě $A = [\frac{\pi}{2}, 1]$ pro funkci $f(x,y) = \frac{\sin x}{y}$. $T_1(A) =$

2. Najděte Taylorův mnohočlen druhého řádu funkce $f(x,y) = \frac{x}{y}$ se středem $A = [1,1]$.
$T_2(A) =$

3. Určete Maclaurinův polynom 2. stupně funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x+y}$.

4. Určete Taylorův polynom daného stupně funkce $f(x,y) = \cos x \sin y$ se středem v bodě A.

(a) $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, pak $T_1(A) =$

(b) $A = [0,0]$, $T_1(A) =$ $T_2(A) =$

5. Najděte Maclaurinův mnohočlen druhého řádu funkce $f(x,y) = \operatorname{arctan} \frac{1+x+y}{1-x+y}$.

6. Napište Maclaurinův mnohočlen řádu 3 pro funkci $f(x,y) = \mathrm{e}^{x} \sin y$.

7. Vyjádřete mnohočlen $13 + 16x - 4y + 11x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x^3 - xy^2 - y^3$ v mocninách $u = x + 2$ a $v = y - 2$.
Pozn.: Při zápisu výsledku použijte symboly u a v.

8. Vyjádřete mnohočlen $2+4x+2y+3x^2+xy-y^2+x^3+x^2y+xy^2+y^3$ v mocninách $u=x+1$ a $v=y-1$.
Pozn.: Při zápisu výsledku použijte symboly u a v.

9. Na grafu funkce $z=x^3+y^3$ najděte bod $T=[x_o,y_o,z_o]$, v němž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $\varrho\colon 12x+3y-z=0$.

(a) (a) Takových bodů T existuje více.

(b) Takový bod T existuje jediný

(b) Souřadnice bodu T jsou: $[x_0,y_0,z_0]=$[, ,]
Existuje-li více bodů T, tj. nelze souřadnice jednoznačně určit, vyplňte $[-,-,-]$.

Konec testu Výsledky

Počet správných odpovědí:

Start testu **Taylorův polynom, derivace složené funkce – test 3**

1. Najděte Taylorův polynom prvního stupně se středem v bodě $A = [2, 1]$ pro funkci $f(x, y) = \frac{1}{2+x-2y}$. $T_1(A) =$

2. Najděte Taylorův mnohočlen druhého řádu funkce $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ se středem $A = [1, 1]$. $T_2(A) =$

3. Určete Maclaurinův polynom 2. stupně funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}$.

4. Najděte Maclaurinův mnohočlen třetího řádu funkce $f(x, y) = \frac{\cos(x)}{\cos(y)}$.

5. Určete Taylorův polynom daného stupně funkce $f(x, y) = \sin x \sin y$ se středem v bodě A.

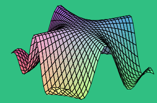
(a) $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $T_1(A) =$ $\quad$ $T_2(A) =$

(b) $A = [0, 0]$, $T_1(A) =$ $\quad$ $T_2(A) =$

6. Napište Maclaurinův mnohočlen řádu 3 pro funkci $f(x, y) = \mathrm{e}^x \ln(1 + y)$.

7. Vyjádřete mnohočlen $9-10x-8y+x^2-4xy-8y^2-xy^2-2y^3$ v mocninách $u = x-3$ a $v = y+2$.
Pozn.: Při zápisu výsledku použijte symboly u a v.

8. Vyjádřete mnohočlen $9-16x-5y+8x^2-xy-7y^2-x^3+2x^2y+3xy^2-y^3$ v mocninách



$u = x - 2$ a $v = y + 1$.

Pozn.: Při zápisu výsledku použijte symboly u a v.

9. Na grafu funkce $z = x^2 - y^2$ najděte bod $T = [x_o, y_o, z_o]$, v němž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou ϱ: $x + y + z = 0$.

(a) (a) Takových bodů T existuje více.

(b) Takový bod T existuje jediný

(b) Souřadnice bodu T jsou: $[x_0, y_0, z_0] =$[, ,]

Existuje-li více bodů T, tj. nelze souřadnice jednoznačně určit, vyplňte $[-, -, -]$.

Konec testu Výsledky

Počet správných odpovědí:

6. Lokální a absolutní extrémy

Příklad 6.1. Najděte lokální extrémy funkce $z = xy(4 - x - y)$.

Řešení. Funkce $z = xy(4 - x - y)$, jejíž extrémy hledáme, je polynomem proměnných x, y, a proto jsou její parciální derivace spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy tedy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech, které najdeme jako řešení soustavy rovnic.

$$z_x = y(4 - x - y) - xy = 0, \quad z_y = x(4 - x - y) - xy = 0.$$

Z první rovnice plyne $y_1 = 0$, $y_2 = 4 - 2x$. Z druhé rovnice plyne $x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2y$. Celkově tedy dostáváme čtyři stacionární body:

$$P_1 = [0, 0], P_2 = [4, 0], P_3 = [0, 4], P_4 = \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

Prověříme jednotlivé body na existenci lokálního extrému. Dále platí $z_{xx} = -2y$, $z_{yy} = -2x$, $z_{xy} = 4 - 2x - 2y$. V dalším výpočtu využijeme vztah

$$D(x_0, y_0) = z_{xx}(x_0, y_0) z_{yy}(x_0, y_0) - [z_{xy}(x_0, y_0)]^2.$$

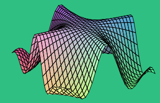
Nejdříve vyjádříme $D(x, y)$ pro obecný bod $[x, y]$

$$D(x, y) = -4x^2 - 4y^2 + 16x + 16y - 4xy - 16.$$

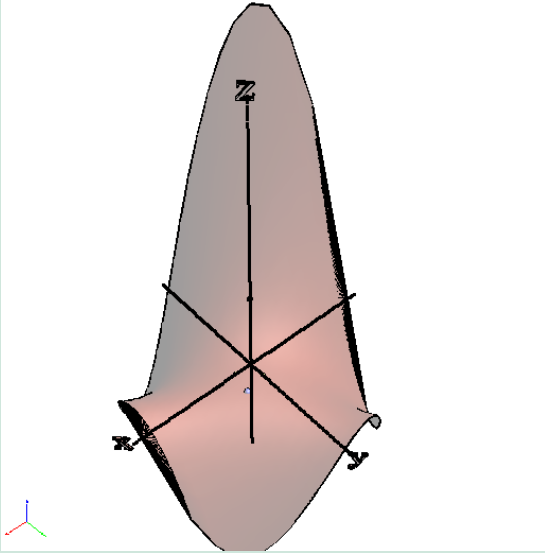
a následně dosadíme souřadnice $[x_0, y_0]$ stacionárních bodů. Dostáváme:

$$D(P_1) = -16, \; D(P_2) = -16, \; D(P_3) = -16, \; D(P_4) = \frac{16}{3}.$$

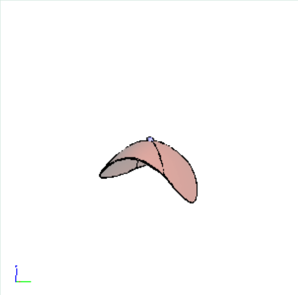
V bodech P_1, P_2, P_3 tedy lokální extrém nenastává. V bodě P_4 nastává ostré lokální maximum, neboť $z_{xx}(P_4) = -\frac{8}{3}$. Situaci si můžete prohlédnout na obrázku 18.



Obrázek 18: Funkce $z = xy(4 - x - y)$ s modře vyznačeným bodem lokálního maxima.



(a) Graf funkce („jednotka“ na ose z ukazuje hodnotu 100).



(b) Detail – okolí lokálního maxima.

Příklad 6.2. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$ na množině $M\colon x^2 + y^2 \le 1$.

Řešení. Nejprve určíme stacionární body ležící uvnitř množiny M (množina M je v rovině xy kruhem o poloměru 1). Vypočteme parciální derivace

$$f_x = 2x - 8,\ f_y = 2y$$

a položíme je rovny nule

$$f_x = 2x - 8 = 0,\ f_y = 2y = 0.$$

Dostáváme $P = [4,0]$. Tento bod však neleží v množině M.
Nyní vyšetříme funkci $f(x,y)$ na hranici množiny M. Tu si rozdělíme na dvě části, horní a dolní půlkružnici.

I. $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$, $u = f(x, \sqrt{1-x^2}) = -8x + 11$.

Najdeme největší a nejmenší hodnotu funkce u na intervalu $[-1,1]$. Těchto extrémních hodnot je dosaženo buď v lokálním extrému uvnitř intervalu $[-1,1]$ nebo v některém z krajních bodů $x = -1$, $x = 1$. Platí $u' = -8$. Z toho plyne, že v žádném vnitřním bodě intervalu $[-1,1]$ nemá funkce u lokální extrém. Prověříme krajní body $u(-1) = 19$, $u(1) = 3$.

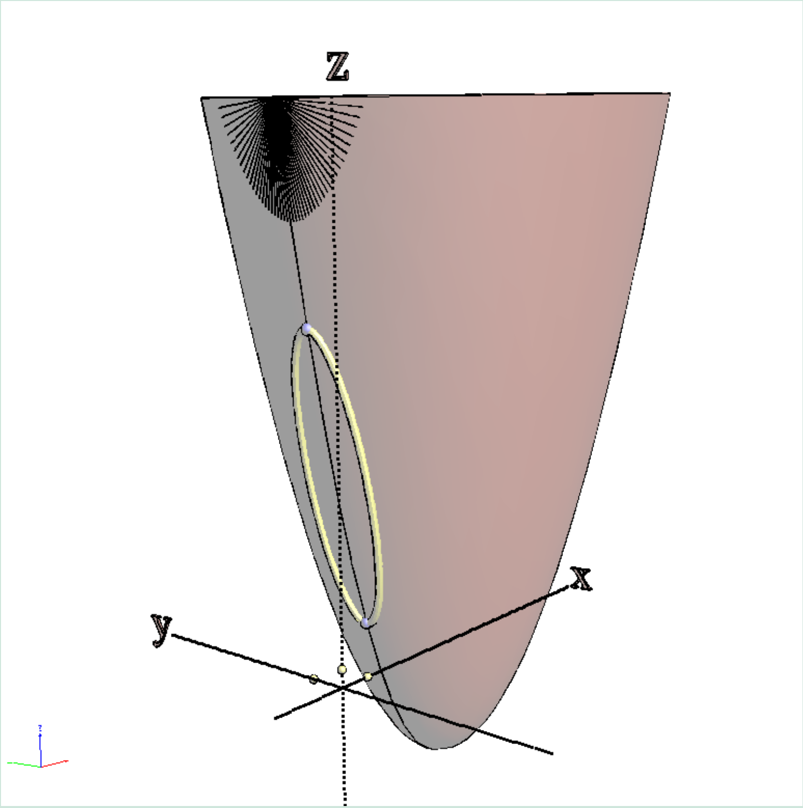
II. $y = -\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$, $u = f(x, -\sqrt{1-x^2}) = -8x + 11$.

Zde je situace zcela stejná jako v případě I, neboť $f(x,-y) = f(x,y)$.

Celkem tedy dostáváme, že

$$\begin{aligned} f_{max} &= 19, \text{pro } [x,y] = [-1,0], \\ f_{min} &= 3,\ \text{ pro } [x,y] = [1,0]. \end{aligned}$$

Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 78 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec



Obrázek 19: Minimum a maximum funkce $f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$ na množině M.

Start testu **Extrémy funkce – test 1**

1. Nechť $H_f(x_0, y_0)$ je Hessova matice funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$. Jestliže funkce $f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokální maximum, pak musí platit (vyberte vhodnou kombinaci):

☐ $\det H_f(x_0, y_0) < 0$	☐ $\det H_f(x_0, y_0) = 0$	☐ $\det H_f(x_0, y_0) > 0$
☐ $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$	☐ $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$	☐ $f_{xy}(x_0, y_0) < 0$
☐ $f_{xy}(x_0, y_0) > 0$	☐ $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$	☐ $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$

2. Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = xy(4 - x - y)$ a zapište je ve tvaru [A,B]; [C,D]; [E,F];. . . ☐

3. Vypočtěte Hessovu matici funkce $f(x, y) = y + \frac{1}{y} - 2\ln^2 x$ v bodě $[1, 1]$.

(a)

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

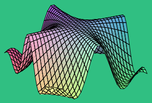
(b)

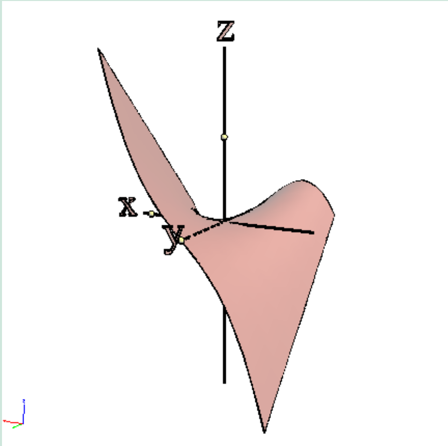
$$H_{f(x,y)}(1, 1) = \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = \square$$

4. Zjistěte, zda má funkce $f(x, y) = x^y - x$ v bodě $B = [1, 1]$ lokální extrém.

(a) Bod B je lokální minimum funkce f.
(b) Bod B je lokální maximum funkce f.
(c) Funkce f nemá v bodě B lokální extrém.

5. Model zobrazuje část grafu funkce $f(x, y) = x^3 + xy$ pro $x \in (-1, 1)$ a $y \in (-1, 1)$.

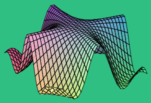




Určete lokální extrémy funkce.

(a) Maximum nastává v bodě [______ , ______] a funkční hodnota v něm je rovna ______ .

(b) Minimum nastává v bodě [______ , ______] a funkční hodnota v něm je rovna ______ .



6. Znáte-li Hessovu matici funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ v bodě $[0, 0]$,

$$H_{f(x,y)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

rozhodněte, zda je tento bod

(a) lokální minimum
(b) lokální maximum
(c) sedlový bod
(d) nelze rozhodnout

7. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2$ na množině $[x, y]\colon x^2 + y^2 \leq 1, y \geq |x| - 1$.

Jestliže extrémy neexistují, vyplňte do polí znak $-$.

Funkce $f(x, y)$ má na dané množině

(a) maximum v bodě [____ , ____] a funkční hodnota v něm je rovna ____ .

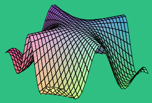
(b) minimum v bodě [____ , ____] a funkční hodnota v něm je rovna ____ .

8. Do elipsy $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ vepište obdélník největšího obsahu.

Výsledný obdélník má kratší stranu délky ____ a delší stranu délky ____ .

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí: ____



Start testu **Extrémy funkce – test 2**

1. Nechť $H_f(x_0, y_0)$ je Hessova matice funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$. Jestliže funkce $f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokální minimum, pak musí platit (vyberte vhodnou kombinaci):

- ☐ $\det H_f(x_0, y_0) < 0$
- ☐ $\det H_f(x_0, y_0) = 0$
- ☐ $\det H_f(x_0, y_0) > 0$
- ☐ $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$
- ☐ $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$
- ☐ $f_{xy}(x_0, y_0) < 0$
- ☐ $f_{xy}(x_0, y_0) > 0$
- ☐ $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$
- ☐ $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$

2. Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$ a zapište je ve tvaru [A,B]; [C,D]; [E,F];...

3. Znáte-li Hessovu matici funkce $f(x, y) = 9x - 9y - x^2 - y^2$ v bodě $[-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}]$,

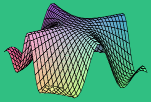
$$H_{f(x,y)}(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

rozhodněte, zda je tento bod

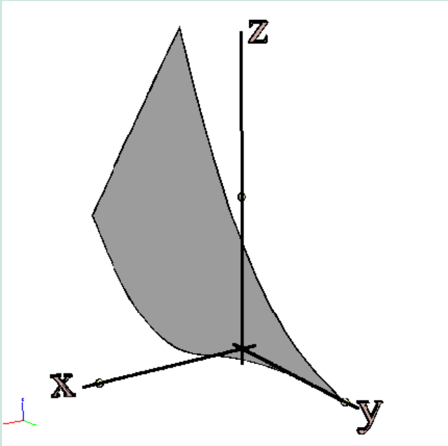
(a) lokální minimum
(b) lokální maximum
(c) sedlový bod
(d) nelze rozhodnout

4. Zjistěte, zda má funkce $f(x, y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ v bodě $B = [1, 1]$ lokální extrém.

(a) Bod B je lokální minimum funkce f.
(b) Bod B je lokální maximum funkce f.
(c) Funkce f nemá v bodě B lokální extrém.



5. Model zobrazuje část grafu funkce $f(x, y)$ pro $x \in (0, 1)$ a $y \in (0, 1)$.



Určete lokální extrémy funkce.

(a) Maximum nastává v bodě [___ , ___].

(b) Minimum funkce nastává v bodech splňující následující podmínky (*pokud neexistují omezující podmínky pro x či y, vyplňte* $-$):

$x =$ ___ pro ___ $\leq y \leq$ ___

a $y =$ ___ pro ___ $\leq x \leq$ ___

6. Vypočtěte Hessián funkce $f(x,y) = 9xy + \frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ v bodě $[\frac{1}{3}, 1]$.

(a)

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

(b)

$$H_{f(x,y)(1,1)} = \begin{vmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{vmatrix} = \boxed{}$$

7. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2$ na množině $[x,y]\colon x^2 + y^2 \le 1$.
Jestliže extrémy neexistují, vyplňte do polí znak $-$.

Funkce $f(x,y)$ má na dané množině

(a) minimum v bodě $[\boxed{}, \boxed{}]$, funkční hodnota v něm je $\boxed{}$.

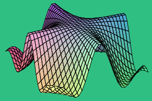
(b) maximum v bodě $[\boxed{}, \boxed{}]$, funkční hodnota v něm je $\boxed{}$.

8. Určete rozměry vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\,\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší obsah.

Dno: $\boxed{}$ m $\times$ $\boxed{}$ m Výška kvádru: $\boxed{}$ m

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí: $\boxed{}$



Start testu **Extrémy funkce – test 3**

1. Nechť $H_f(x_0, y_0)$ je Hessova matice funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$. Jestliže $[x_0, y_0]$ je sedlový bod funkce $f(x, y)$, pak musí platit (vyberte vhodnou kombinaci):

☐ $\det H_f(x_0, y_0) < 0$	☐ $\det H_f(x_0, y_0) = 0$	☐ $\det H_f(x_0, y_0) > 0$
☐ $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$	☐ $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$	☐ $f_{xy}(x_0, y_0) < 0$
☐ $f_{xy}(x_0, y_0) > 0$	☐ $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$	☐ $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$

2. Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 30$ a zapište je ve tvaru [A,B]; [C,D]; [E,F];. . . ☐

3. Vypočtěte Hessián funkce $f(x, y) = \ln(x - y) - x^2 - y$ v bodě $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.

(a)

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

(b)

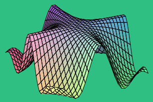
$$H_{f(x,y)(1,1)} = \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = \square$$

4. Zjistěte, zda má funkce $f(x, y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ v bodě $B = [1, 1]$ lokální extrém.

(a) Bod B je lokální minimum funkce f.

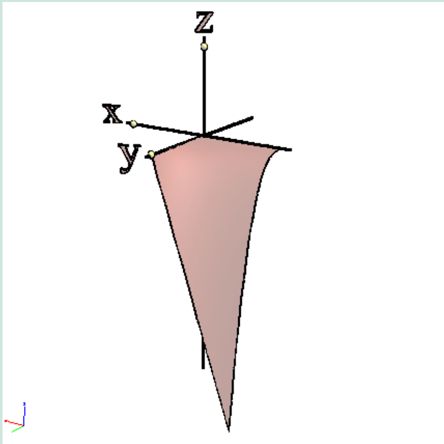
(b) Bod B je lokální maximum funkce f.

(c) Funkce f nemá v bodě B lokální extrém.



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 86 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

5. Model zobrazuje část grafu funkce $f(x,y) = 3xy^3$ pro $x \in (-1, 0)$ a $y \in (0, 1)$.



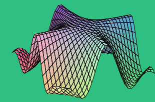
Určete lokální extrémy funkce.

(a) Maximum funkce nastává v bodech splňující následující podmínky (*pokud neexistují omezující podmínky pro x či y, vyplňte* $-$):

$x =$ $\boxed{}$ pro $\boxed{}$ $\leq y \leq$ $\boxed{}$

a $y =$ $\boxed{}$ pro $\boxed{}$ $\leq x \leq$ $\boxed{}$

(b) Minimum nastává v bodě [$\boxed{}$, $\boxed{}$] a funkční hodnota v něm je rovna $\boxed{}$.



6. Znáte-li Hessovu matici funkce $f(x,y) = x^4 + y^4$,

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix},$$

rozhodněte, zda je bod $B = [0,0]$ lokálním extrémem funkce $f(x,y)$.

(a) Ano, bod B je lokální minimum.
(b) Ano, bod B je lokální maximum.
(c) Ne, bod B je sedlový bod.
(d) Nelze rozhodnout.

7. Nechť je dána funkce $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ a množina $0 \geq x, y \leq \pi$. Určete absolutní extrémy funkce $f(x,y)$ na dané množině.

(a) maximum v bodě [,] a funkční hodnota v něm je rovna .

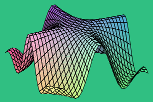
(b) minimum v bodě [,] a funkční hodnota v něm je rovna .

8. Do elipsoidu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + z^2 = 1$ vepište kvádr největšího obsahu.

Hrany výsledného kvádru (řazeny od velikostně nejmenší) mají tyto rozměry:
 , ,

Konec testu Výsledky

Počet správných odpovědí:



Reference

[1] Došlá, Z., Došlý, O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 3. vyd. Brno : Masarykova univerzita, 2006. iv, 144 s. ISBN 80-210-4159-5.

[2] Došlá, Z., Plch, R., Sojka P.: *Matematická analýza s programem Maple. Díl 1, Diferenciální počet funkcí více proměnných*. MU, Brno 1999. CD-ROM.

[3] Kolektiv autorů VŠCHT: *Sbírka příkladů Matematiky II pro strukturované studium, Kapitola 7*, Praha. http://www.vscht.cz/mat/sbirka/KapitolaII7.pdf, 2008 [online].

[4] Mařík, R.: *Interactive Mathematics*, Brno. http://user.mendelu.cz/~marik/index.php?item=42, 2008 [online].

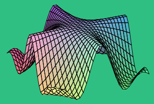
[5] Kuráňová, S., Vondra, J.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*. Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008, Plzeň, 2008, s. 199–203.

[6] Plch, R., Šarmanová, P.: *Interaktivní 3D grafika v HTML a PDF dokumentech*. Zpravodaj CSTUG, Konvoj Praha, **18**, č. 1–2, 2008, s. 76–92.

[7] Plch, R., Šarmanová, P.: *An Interactive Presentation of Maple 3D Graphics in PDF Documents*. Electronic Journal of Mathematics and Technology, Mathematics and Technology, LLC, Blacksburg, Volume 2, Number 3, 2008, s. 281–290.

[8] AcroTeX eDucation Bundle (oficiální stránky): http://www.acrotex.net, 2008 [online].

[9] Story, D. P.: AeB website, http://www.math.uakron.edu/~dpstory/webeq.html, 2008 [online].



Titulní strana
Instrukce k testům
Testy ke kapitole
Reference
Strana 89 z 89
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec