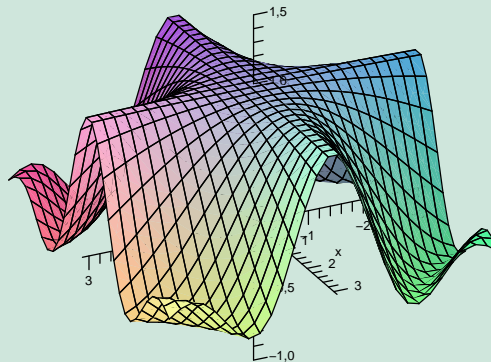


Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek

Silvie Kuráňová a Jan Vondra

Prosinec 2008



Podpořeno grantem 1411/2008 FRVŠ ČR.

Diferenciál funkce

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 1 z 16



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

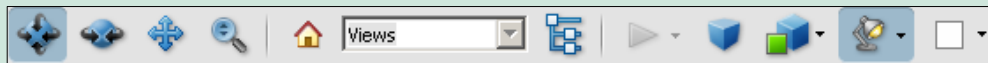
Konec

Instrukce k testům

Práce s 3D obrázky

Všechny grafy funkcí dvou proměnných jsou zobrazeny jako 3D obrázky, které je možné ovládat, tj. libovolně natáčet, posunovat, zvětšovat, měnit osvětlení apod.

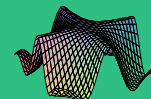
V řešených příkladech slouží k ovládnutí grafů funkcí panel, v testech pak pravé tlačítka myši. Panel zobrazíme či schováme kliknutím na modrý trojúhelníček v levém horním rohu obrázky, může vypadat například¹ takto:



Ovládání modelu naznačují jednotlivé ikony na panelu. Panel je rozdělen na tři části. První zleva obsahuje tlačítka pro otáčení kolem bodu, otáčení kolem přímky, posunutí a zvětšení či zmenšení objektu. V druhé části panelu nás bude zajímat především tlačítko se symbolem domečku – umožňuje návrat k výchozímu pohledu. Dále je například možné zobrazit z jakých částí je graf složen, popřípadě některé části skrýt. V poslední části najdeme tlačítko na přepínání mezi perspektivním a pravouhlejším promítáním. Tlačítko pro režim vykreslení modelu, zde obzvláště doporučujeme vyzkoušet volby „Průhledné“ a „Drátový model“. Rovněž nabídka osvětlení je velmi bohatá. Poslední tlačítko umožňuje zvolit barvu pozadí, tedy například volbou žluté zvýšit kontrast při promítání ve výuce apod.

Všechny grafy funkcí v tomto textu mají cihlovou barvu, jsou opatřeny souřadnými osami a na každé z os je žlutě vyznačen jednotkový bod. Výjimečně je z technického hlediska volen jiný bod na ose z (na což je pak v textu upozorněno). U složitějších modelů je vždy uveden popis modelu. Navíc všechny 3D modely (na rozdíl od 2D grafiky) mají bílé pozadí.

¹Vzhled panelu závisí na verzi a jazyku Acrobat Readeru. Následující obrázek i text se týkají verze 8.1 v češtině.



[Titulní strana](#)

[Instrukce k testům](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Reference](#)

[Strana 2 z 16](#)

[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)

Práce s testy

Motto: „Cvičení dělá mistra.“

Ověřit si znalost dané látky je možné prostřednictvím interaktivních testů umístěných v závěru každé kapitoly.

Začátek testu je nutno zahájit stisknutím volby **Start testu**. Test nebude možno ukončit dokud nezodpovíte všechny otázky.

Typy otázek v testech

1. Výběr z možností, právě jedna správná odpověď.

(a) špatně (b) špatně (c) správně (d) špatně

2. Výběr z možností, více správných odpovědí.

správně špatně správně špatně

3. Zápis vlastní odpovědi. *Do pole запиšte výraz vlevo od rovnítka.*

$xy =$

4. Zápis vlastní odpovědi do skupiny polí, tj. tlačítko **Ans** ovládá postupně jednotlivá políčka. *Do pole запиšte výraz vlevo od rovnítka.*

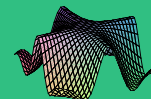
$1 + \frac{1}{2} =$ +

Počet správných odpovědí:

Správná odpověď:

Test ukončíte kliknutím na **Konec testu**. Stisknutím volby **Výsledky** se zobrazí správné odpovědi a u pole pro zápis vlastní odpovědi se objeví tlačítko **Ans** (do té doby neviditelné).

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Diferenciál funkce

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 3 z 16



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Správné odpovědi

Pokud si práci s testem vyzkoušíte, zjistíte, že správné odpovědi jsou po skončení testu a po stisku tlačítka **Výsledky** vyznačeny symbolem ✓ a nesprávné symbolem ✗. V případě chybné odpovědi je správná varianta zvýrazněna symbolem ●.

Pokud bylo špatně zodpovězeno pole pro vlastní odpověď, objeví se kolem něj červený rámeček a správnou variantu si můžete prohlédnout v poli za textem „**Správná odpověď:**“ po stisknutí tlačítka **Ans**. Toto pole je v rámci testu „Typy otázek v testech“ umístěno na jeho konci a také v pravém panelu obrazovky (viz. str. 3). V testech na konci kapitol je toto pole zobrazováno pouze v pravém panelu obrazovky.

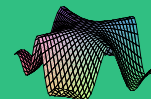
Bodové hodnocení

Získané body se zobrazí po ukončení testu červeně vedle každé otázky (případně podotázky). Standardní bodové ohodnocení je 1 bod za správnou odpověď (u otázek typu 1, 3 a 4) a záporné body za výběr chybné varianty u otázky druhého typu.

Zápis matematiky v testech

K zápisu odpovědí do matematického pole používáme následující notaci:

- Desetinná čísla: Desetinou čárku pište jako tečku, čili 1.2 místo 1,2.
- Ludolfovo číslo π jako pi, Eulerovo číslo jako e.
- Znak dělení: Použijte lomítko /.
- Znak násobení: Symbol *, např. 4*x pro 4x.
- Mocnina: Symbol ^, např. 4*x^3 pro 4x³, 12*x^(-6) pro 12x⁻⁶.
- Odmocnina: \sqrt{x} zapište jako sqrt(x) nebo x^(1/2). **Pozor!** výraz x^(1/2) **není** \sqrt{x} .



Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 4 z 16

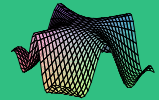


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Diferenciál funkce

- Závorky: Je možno použít kulaté (), hranaté [] či složené { }. **Závorky je nutné uvádět**, vymezují argumenty funkcí, definují pořadí operací.
Píšte $\sin(x)$ raději než $\sin x$, $4*x*(x^2+1)^3$ pro $4x(x^2 + 1)^3$, $4^(2*x+1)$ pro 4^{2x+1} .
Nepište $\sin^2(x)$ pro $\sin^2(x)$, ale $(\sin(x))^2$.
- Funkce, které můžete použít:
 - Trigonometrické: \sin , \cos , \tan , \cot , \sec , \csc .
 - Inverzní trigonometrické: \arcsin , \arccos , \arctan .
 - Logaritmus: \log či \ln (přirozený logaritmus), př. $\ln(x)$.
 - Exponenciála: e^x můžete zadat jako $\exp(x)$ nebo e^x .

Vyzkoušejte si zápis matematiky!

- 1, 5 =
- $\sin(2x)^3 =$ není totéž jako $\sin^3 2x =$
- $(x^2 - 1)(x^2 + 1) =$
- $\ln \frac{x}{2} =$
- $\frac{y}{1+x^2y^2} =$
- $e^{x^2} + 3y =$
- $-2x^4 + x^2y + y^2x + 1 =$
- $(\log a)^2 =$

Počet správných odpovědí:

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 5 z 16



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

4. Diferenciál funkce

Příklad 4.1. Pomocí diferenciálu vypočtete přibližně $\sqrt{(0,98)^2 + (2,03)^3}$.

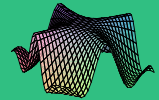
Řešení. K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ v bodě $[1, 2]$ s diferencienci $dx = -0,02$, $dy = 0,03$. Platí

$$df(x, y) = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^3}} + \frac{3}{2} \frac{y^2 dy}{\sqrt{x^2 + y^3}},$$
$$df(1, 2) = \frac{1}{3} dx + 2dy.$$

Dosažením do $f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$ dostáváme

$$\sqrt{(0,98)^2 + (2,03)^3} \doteq 3 + \frac{1}{3} \cdot (-0,02) + 2 \cdot (0,03) = 3,05\bar{3}.$$

Na obrázku 1 je graf funkce s modře vyznačeným bodem $[1, 2]$. V tomto bodě je sestrojena šedá tečná rovina. Náš výpočet totiž odpovídá právě tomu, že vezmeme hodnotu funkce v modrém bodě a připočteme přírůstek na tečné rovině. Tedy aproximujeme v okolí modrého bodu graf funkce tečnou rovinou.



[Titulní strana](#)

[Instrukce k testům](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Reference](#)

[Strana 6 z 16](#)

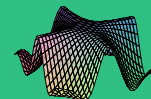


[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)



Diferenciál funkce

[Titulní strana](#)

[Instrukce k testům](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Reference](#)

[Strana 7 z 16](#)

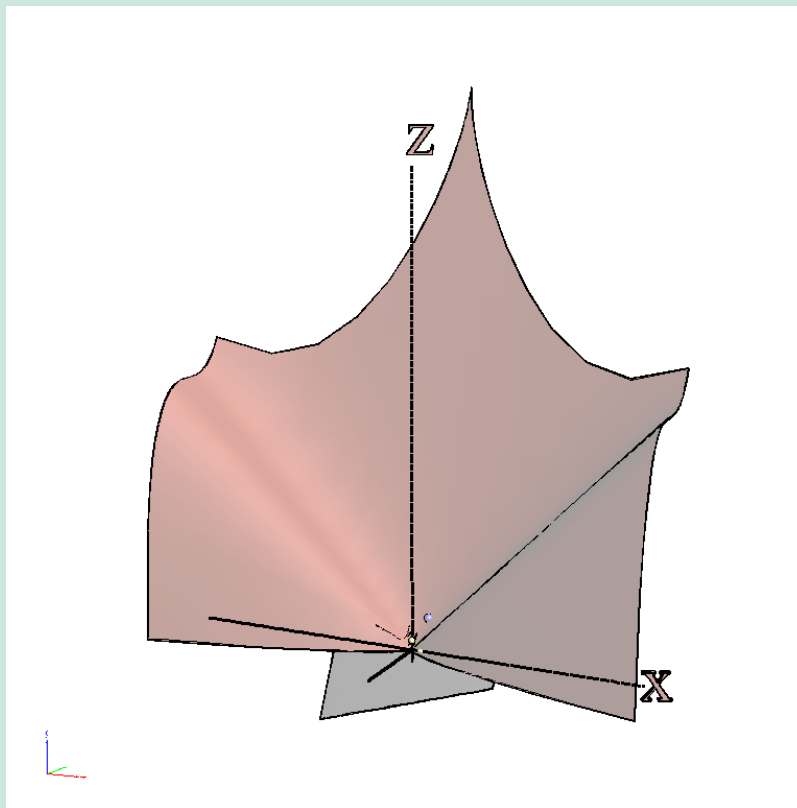


[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)



Obrázek 1: 3D obrázek funkce $f(x, y)$ a diferenciálu $df(1, 2)$.

Příklad 4.2. Zjistěte, zda výraz $(2x \ln y + 5y)dx + (\frac{x^2}{y} + 5x + 3)dy$ je totálním diferenciálem nějaké funkce, a pokud ano, najděte ji:

Řešení. Nejprve ověříme, zda je uvedený výraz opravdu diferenciálem. Označíme $P(x, y) = 2x \ln y + 5y$ a $Q(x, y) = \frac{x^2}{y} + 5x + 3$. Pro každé $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, na niž jsou funkce P a Q definovány, musí platit

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y), \text{ tj.}$$

$$P_y = \frac{2x}{y} + 5, \quad Q_x = \frac{2x}{y} + 5.$$

Zadaný výraz je tedy totálním diferenciálem jisté kmenové funkce H . Dále platí

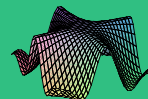
$$H(x, y) = \int (2x \ln y + 5y)dx = x^2 \ln y + 5xy + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ hraje roli integrační konstanty, neboť její derivace podle x je nulová. Derivováním podle y a dosazením do vztahu $H_y = Q$ dostáváme

$$H_y = \frac{x^2}{y} + 5x + \varphi'(y) = \frac{x^2}{y} + 5x + 3 = Q,$$

odkud $\varphi'(y) = 3$, tj. $\varphi(y) = 3y + c$. Vypočítali jsme, že zadaný výraz je diferenciálem funkce

$$H(x, y) = x^2 \ln y + 5xy + 3y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$



Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 8 z 16

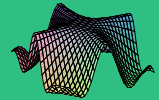


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Diferenciál funkce

[Titulní strana](#)

[Instrukce k testům](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Reference](#)

[Strana 9 z 16](#)

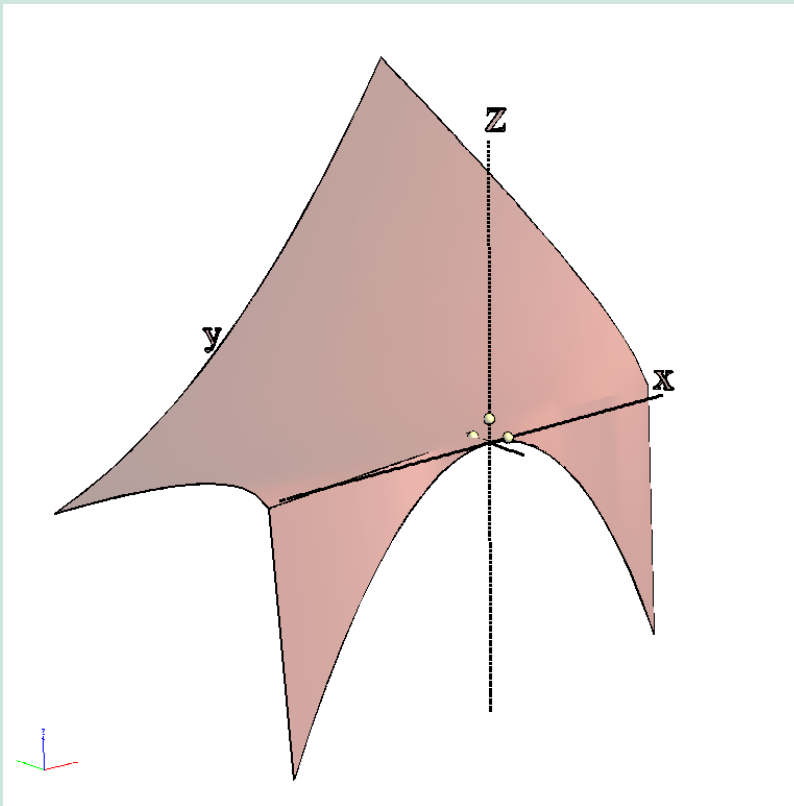


[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

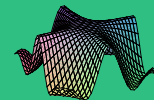
[Konec](#)



Obrázek 2: 3D obrázek výsledné kmenové funkce $H(x, y)$ pro $c = 0$.

Diferenciál – test 1

1. Vypočtete totální diferenciál funkce $z = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ v bodě $A = [2, 2]$ pro $dx = 0,03$ a $dy = 0,01$.
2. Vypočtete totální diferenciál funkce $z = \arctan \frac{x}{y}$ v bodě $A = [1, 3]$ pro $dx = 0,01$ a $dy = -0,05$.
3. Pomocí diferenciálu vypočtete (s přesností na dvě desetinná místa):
 $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3} \doteq$
4. Pomocí diferenciálu s přesností na dvě desetinná místa vypočtete:
 $e^{0,05^3 - 0,02} \doteq$
5. Rozhodněte, zda platí následující věta:
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.
(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí
6. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x, y) = \ln(2x^3 - 8y^2)$ v bodě $[x_0, y_0, z_0] = [2, 1, ?]$.
 $\varrho: \quad \quad \quad = 0$
7. Najděte přibližnou hodnotu funkce $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ v bodě $[2, 2; -0, 2]$ a to s přesností na jedno desetinné místo.
 $df(2, 2; -0, 2) \doteq$



Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 10 z 16

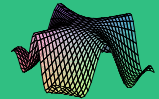


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Diferenciál funkce

8. Necht $y = x^3$, kde x je derivovatelná funkce proměnné t . Předpokládejme, že pro $x = 4$ je $\frac{dx}{dt} = 3$.

$\frac{dy}{dt}$ se pak rovná

9. Najděte obecnou rovnici tečny t ke kružnici $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

$t: \quad \quad \quad = 0$.

10. Určete diferenciál funkce $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ v bodě $[x_0, y_0] = [\sqrt{3}, 1]$.

$dz = \quad \quad \quad dx + \quad \quad \quad dy$

11. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = e^{\frac{x}{y}}$ v obecném bodě.

$dz = \quad \quad \quad dx + \quad \quad \quad dy$

12. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = (x - y)^2$ v obecném bodě.

$dz = \quad \quad \quad dx + \quad \quad \quad dy$

Počet správných odpovědí:

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 11 z 16



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Diferenciál – test 2

1. Vypočtete totální diferenciál funkce $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $A = [3, 4]$ pro $dx = 0, 1$ a $dy = 0, 2$.
2. Vypočtete totální diferenciál funkce $z = e^{xy}$ v bodě $A = [1, 2]$ pro $dx = -0, 1$ a $dy = 0, 1$.
3. Pomocí diferenciálu vypočtete:

$$\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98 \cdot 1,05^4}} \doteq$$

4. Pomocí diferenciálu vypočtete přibližně:

$$\arcsin \frac{0,48}{1,05} \doteq$$

5. Rozhodněte, zda platí následující věta:

Funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$ právě tehdy, když je v tomto bodě diferencovatelná.

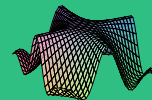
(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí

6. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ v bodě $[x_o, y_o, z_o] = [1, -2, ?]$.

$$\varrho: \quad \quad \quad = 0$$

7. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ v bodě $[x_o, y_o, z_o] = [-2, 2, ?]$.

$$\varrho: \quad \quad \quad = 0$$



Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 12 z 16

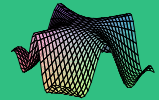


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Diferenciál funkce

8. Najděte přibližnou hodnotu funkce $f(x, y) = \sin(\pi xy + \ln y)$ v bodě $[0, 01; 1, 05]$ a to s přesností na čtyři desetinná místa.

$$df(0, 01; 1, 05) \doteq$$

9. Necht $y = x^3$, kde x je derivovatelná funkce proměnné t . Předpokládejme, že pro $x = 3$ je $\frac{dy}{dt} = 3$.

$$\text{Čemu se pak rovná } \frac{dx}{dt}?$$

10. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = 3x^2 - 2y^3$ v obecném bodě.

$$dz = \quad dx + \quad dy$$

11. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = x^y$ v obecném bodě.

$$dz = \quad dx + \quad dy$$

12. Vypočtěte totální diferenciál prvního řádu funkce $z = \arctan \frac{x-y}{x+y}$ v obecném bodě.

$$dz = \quad dx + \quad dy$$

Počet správných odpovědí:

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 13 z 16



Zpět

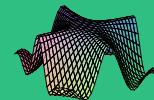
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Diferenciál – test 3

1. Vypočtete totální diferenciál funkce $z = 2^x \sin y \arctan z$ v bodě $A = [-4, \frac{\pi}{2}, 0]$ pro $dx = 0,05$, $dy = 0,06$ a $dz = 0,08$.
2. Pomocí diferenciálu s přesností na dvě desetinná místa vypočtete:
 $\ln(0,97^2 + 0,05^2) \doteq$
3. Pomocí diferenciálu s přesností na tři desetinná místa vypočtete:
 $\arctan \frac{1,02}{0,95} \doteq$
4. Rozhodněte, zda platí následující věta:
Je-li funkce f spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě diferencovatelná.
(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí
5. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ v bodě $[x_0, y_0, z_0] = [2, 1, ?]$.
 $\varrho: \quad \quad \quad = 0$
6. Určete rovnici tečné roviny ϱ ke grafu funkce $f(x, y) = xe^{3x+2y}$ v bodě $[x_0, y_0, z_0] = [-2, 3, ?]$.
 $\varrho: \quad \quad \quad = 0$
7. Najděte přibližnou hodnotu (s přesností na jedno desetinné místo) funkce $f(x, y) = x^2y^3$ v bodě $[3, 1; 0, 9]$.
 $df(3, 1; 0, 9) \doteq$



Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 14 z 16

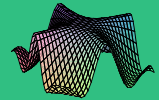


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Diferenciál funkce

8. Určete hodnotu diferenciálu (s přesností na dvě desetinná místa) funkce $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ v bodě $T = [2, 2]$ pro $dx = 0,03$, $dy = 0,01$.
 $df(2, 2) \doteq$
9. Necht $y = x^3$, kde x je derivovatelná funkce proměnné t . Předpokládejme, že pro $y = 8$ je $\frac{dx}{dt} = 2$.
Čemu se pak rovná $\frac{dy}{dt}$?
10. Vypočtete totální diferenciál prvního řádu funkce $z = y \ln 2x$ v obecném bodě.
 $dz = \quad dx + \quad dy$
11. Vypočtete totální diferenciál prvního řádu funkce $u = \frac{xy}{z}$ v obecném bodě.
 $du = \quad dx + \quad dy + \quad dz$
12. Určete diferenciál funkce $f(x, y) = \arctan(xy)$.
 $df(x, y) = \quad dx + \quad dy$.

Počet správných odpovědí:

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 15 z 16



Zpět

Vpřed

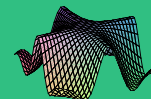
Přepnout režim obrazovky

Konec

Reference

- [1] Došlá, Z., Došlý, O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 3. vyd. Brno : Masarykova univerzita, 2006. iv, 144 s. ISBN 80-210-4159-5.
- [2] Došlá, Z., Plch, R., Sojka P.: *Matematická analýza s programem Maple. Díl 1, Diferenciální počet funkcí více proměnných*. MU, Brno 1999. CD-ROM.
- [3] Kolektiv autorů VŠCHT: *Sbírka příkladů Matematiky II pro strukturované studium, Kapitola 7*, Praha. <http://www.vscht.cz/mat/sbirka/KapitolaII7.pdf>, 2008 [online].
- [4] Mařík, R.: *Interactive Mathematics*, Brno. <http://user.mendelu.cz/~marik/index.php?item=42>, 2008 [online].
- [5] Kuráňová, S., Vondra, J.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*. Sborník konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008, Plzeň, 2008, s. 199–203.
- [6] Plch, R., Šarmanová, P.: *Interaktivní 3D grafika v HTML a PDF dokumentech*. Zpravodaj CSTUG, Konvoj Praha, **18**, č. 1–2, 2008, s. 76–92.
- [7] Plch, R., Šarmanová, P.: *An Interactive Presentation of Maple 3D Graphics in PDF Documents*. Electronic Journal of Mathematics and Technology, Mathematics and Technology, LLC, Blacksburg, Volume 2, Number 3, 2008, s. 281–290.
- [8] AcroTeX eDucation Bundle (oficiální stránky): <http://www.acrotex.net>, 2008 [online].
- [9] Story, D. P.: AeB website, <http://www.math.uakron.edu/~dpstory/webeq.html>, 2008 [online].

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Diferenciál funkce

Titulní strana

Instrukce k testům

Testy ke kapitole

Reference

Strana 16 z 16



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec