

Derivace - základní pravidla

Lenka Příbylová

28. července 2006

Obsah

$y = x^5 - x^3 + 1$	3
$y = 2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$	6
$y = (x^2 + 2) \sin x$	11
$y = 3 \ln x \operatorname{arctg} x$	15
$y = \frac{x^2}{x+1}$	19
$y = \frac{xe^x}{x+1}$	24

Derivujte $y = x^5 - x^3 + 1$.

$$y' = (x^5 - x^3 + 1)'$$

Derivujte $y = x^5 - x^3 + 1$.

$$y' = (x^5 - x^3 + 1)' = (x^5)' - (x^3)' + (1)'$$

- Funkce je ve tvaru součtu.
- Derivace součtu je součet derivací.

Derivujte $y = x^5 - x^3 + 1$.

$$y' = (x^5 - x^3 + 1)' = (x^5)' - (x^3)' + (1)' = 5x^4 - 3x^2$$

- První dva členy derivujeme podle vzorce $(x^n)' = nx^{n-1}$.
- Derivace konstanty je 0.

Derivujte $y = 2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

$$y' = \left(2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)'$$

Derivujte $y = 2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

$$y' = \left(2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)' = (2x^4)' + (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x} \right)'$$

- Funkce je ve tvaru součtu.
- Derivace součtu je součet derivací.

Derivujte $y = 2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}y' &= \left(2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = (2x^4)' + (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= 2(x^4)' + (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{-1})'\end{aligned}$$

- Konstantu v prvním členu lze vytknout.
- Všechny členy přepíšeme do tvaru x^n .

Derivujte $y = 2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}y' &= \left(2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = (2x^4)' + (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= 2(x^4)' + (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{-1})' = 2 \cdot 4x^3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + (-1) \cdot x^{-2}\end{aligned}$$

Členy derivujeme podle vzorce $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Derivujte $y = 2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}y' &= \left(2x^4 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = (2x^4)' + (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)' \\&= 2(x^4)' + (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{-1})' = 2 \cdot 4x^3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + (-1) \cdot x^{-2} \\&= 8x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Výsledek upravíme.

Derivujte $y = (x^2 + 2) \sin x$.

$$y' = \left((x^2 + 2) \sin x \right)'$$

Derivujte $y = (x^2 + 2) \sin x$.

$$y' = \left((x^2 + 2) \sin x \right)'$$

Funkce je ve tvaru součinu.

Derivujte $y = (x^2 + 2) \sin x$.

$$\begin{aligned}y' &= \left((x^2 + 2) \sin x \right)' \\ &= (x^2 + 2)' \sin x + (x^2 + 2) (\sin x)'\end{aligned}$$

Součin derivujeme podle pravidla

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Derivujte $y = (x^2 + 2) \sin x$.

$$\begin{aligned}y' &= \left((x^2 + 2) \sin x \right)' \\&= (x^2 + 2)' \sin x + (x^2 + 2) (\sin x)' \\&= 2x \sin x + (x^2 + 2) \cos x.\end{aligned}$$

Červeně označený člen derivujeme jako součet, přičemž derivace konstanty je 0.

Derivujte $y = 3 \ln x \operatorname{arctg} x$.

$$y' = \left(3 \ln x \operatorname{arctg} x \right)'$$

Derivujte $y = 3 \ln x \operatorname{arctg} x$.

$$\begin{aligned}y' &= \left(3 \ln x \operatorname{arctg} x \right)' \\ &= 3 \left(\ln x \operatorname{arctg} x \right)'\end{aligned}$$

Vytkneme-li konstantu, je funkce ve tvaru součinu.

Derivujte $y = 3 \ln x \operatorname{arctg} x$.

$$\begin{aligned}y' &= \left(3 \ln x \operatorname{arctg} x \right)' \\&= 3 \left(\ln x \operatorname{arctg} x \right)' \\&= 3 \left((\ln x)' \operatorname{arctg} x + \ln x (\operatorname{arctg} x)' \right)\end{aligned}$$

Součin derivujeme podle pravidla

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Derivujte $y = 3 \ln x \operatorname{arctg} x$.

$$\begin{aligned}y' &= \left(3 \ln x \operatorname{arctg} x \right)' \\&= 3 \left(\ln x \operatorname{arctg} x \right)' \\&= 3 \left((\ln x)' \operatorname{arctg} x + \ln x (\operatorname{arctg} x)' \right) \\&= 3 \left(\frac{1}{x} \operatorname{arctg} x + \ln x \frac{1}{1+x^2} \right).\end{aligned}$$

Elementární funkce derivujeme podle vzorců.

Derivujte $y = \frac{x^2}{x+1}$.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+1} \right)'$$

Derivujte $y = \frac{x^2}{x+1}$.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+1} \right)'$$

Funkce je ve tvaru podílu.

Derivujte $y = \frac{x^2}{x+1}$.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+1} \right)' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2}$$

Podíl derivujeme podle pravidla

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Derivujte $y = \frac{x^2}{x+1}$.

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{x^2}{x+1} \right)' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Jednotlivé členy derivujeme podle základních vzorců.

Derivujte $y = \frac{x^2}{x+1}$.

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{x^2}{x+1} \right)' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Výsledek upravíme.

Derivujte $y = \frac{xe^x}{x+1}$.

$$y' = \left[\frac{xe^x}{x+1} \right]'$$

Derivujte $y = \frac{xe^x}{x+1}$.

$$y' = \left[\frac{xe^x}{x+1} \right]'$$

Funkce je ve tvaru podílu.

Derivujte $y = \frac{xe^x}{x+1}$.

$$y' = \left[\frac{xe^x}{x+1} \right]' = \frac{(xe^x)'(x+1) - xe^x(x+1)'}{(x+1)^2}$$

Podíl derivujeme podle pravidla

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Derivujte $y = \frac{xe^x}{x+1}$.

$$\begin{aligned}y' &= \left[\frac{xe^x}{x+1} \right]' = \frac{(xe^x)'(x+1) - xe^x(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(e^x + xe^x)(x+1) - xe^x \cdot 1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Červený člen derivujeme jako součin podle pravidla
 $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Derivujte $y = \frac{xe^x}{x+1}$.

$$\begin{aligned}y' &= \left[\frac{xe^x}{x+1} \right]' = \frac{(xe^x)'(x+1) - xe^x(x+1)'}{(x+1)^2} \\&= \frac{(e^x + xe^x)(x+1) - xe^x \cdot 1}{(x+1)^2} \\&= \frac{e^x x + e^x + e^x x^2 + xe^x - xe^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x^2 + x + 1)}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Výsledek upravíme.