Limity

Robert Mařík a Lenka Přibylová

19. září 2006

Obsah

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1+1}$$

- Dosadíme $x = 1$.
- Jedná se o definovaný výraz. Funkce je spojitá v bodě $x = 1$ a funkční hodnota je rovna hodnotě limity.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1+1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2}$$

$\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, resp. $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4} = 1$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1+1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Zjednodušíme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1}$$

Dosadíme . . .

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

...a upravíme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$$

- Funkce je typu $\dfrac{\text{nenulový výraz}}{\text{nula}}$.
- Musíme proto studovat nejprve jednostranné limity. Začneme s limitou zprava.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

Dosadili jsme $x = -1$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} \right\|$$

- Musíme určit znaménko jmenovatele.
- Je-li x napravo od -1, pak $x > -1$ a platí $x + 1 > 0$.
- Jmenovatel je kladný.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to-1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} \right\| = -\infty$$

Limita zprava je $-\infty$.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{-0} \right\|$$

- Je-li x nalevo od čísla -1, pak $x < -1$.
- Proto $x+1 < 0$ a jmenovatel je záporný.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{-0} \right\| = +\infty$$

Limita je $+\infty$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{\operatorname{arctg}(-1)}{-1+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{0} \right\|$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{+0} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \left\| \frac{-\frac{\pi}{4}}{-0} \right\| = +\infty$$

Oboustranná limita $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$ neexistuje.

Obě jednostranné limity jsou různé a oboustranná limita tedy neexistuje.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{}$$

- Určíme limitu čitatele a jmenovatele samostatně.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$ může být určena z grafu funkce $y = \operatorname{arctg} x$.
- Funkce $y = \operatorname{arctg} x$ má vodorovnou asymptotu $y = -\dfrac{\pi}{2}$ v $-\infty$. Hodnota limity čitatele je $-\dfrac{\pi}{2}$

Vypočtěte $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty}$$

Limita jmenovatele je $-\infty + 1 = -\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x+1} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty} = 0$$

Konečná hodnota dělená nekonečnem je rovna nule.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$$

Začneme s limitou v $+\infty$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty}$$

- Určíme zvlášť limity funkcí v součinu.
- Dosadíme. Výrazem $e^{-\infty}$ máme na mysli limitu $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty$$

- Dosadíme do druhé funkce.
- Výrazem $\operatorname{arctg} \infty$ máme na mysli limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0 \frac{\pi}{2}$$

Zkoumáním grafů funkcí $y = e^x$ a $y = \operatorname{arctg} x$ zjistíme, že

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

a

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x}\operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\operatorname{arctg} x = e^{-\infty}\operatorname{arctg}\infty = 0\frac{\pi}{2} = 0$$

Součin je nula.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x =$$

Pokračujeme s limitou v $-\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty}$$

- Opět určíme limity funkcí v součinu.
- Dosadíme. Protože platí $-(-\infty) = \infty$, dostáváme z prvního součinitele výraz e^{∞}. Tím máme na mysli limitu $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x}$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty} \operatorname{arctg}(-\infty)$$

Dosadíme do druhé funkce. Výrazem $\operatorname{arctg}(-\infty)$ rozumíme limitu $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{-\infty} \operatorname{arctg} \infty = 0\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} \operatorname{arctg} x = e^{\infty} \operatorname{arctg}(-\infty) = \infty(-\frac{\pi}{2})$$

Z grafů funkcí $y = e^x$ a $y = \operatorname{arctg} x$ plyne

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

a

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x}\operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\operatorname{arctg} x = e^{-\infty}\operatorname{arctg}\infty = 0\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\operatorname{arctg} x = e^{\infty}\operatorname{arctg}(-\infty) = \infty(-\frac{\pi}{2}) = -\infty$$

Součin je roven $-\infty$.

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \lim_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4$$

- Začneme s limitou v $+\infty$. Dosadíme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4=\infty+\infty-4$$

$$\infty^3=\infty, \qquad \infty^2=\infty$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4=\infty+\infty-4=\infty$$

$$\infty+\infty-4=\infty$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4=\infty+\infty-4=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-4)$$

Pokračujeme s limitou v $-\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4=\infty+\infty-4=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-4)=(-\infty)^3+2(-\infty)^2-4$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-4) = (-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 4$$

$$= \| -\infty + \infty \| - 4$$

$$(-\infty)\times(-\infty)\times(-\infty) = -\infty \qquad 2(-\infty)(-\infty) = \infty$$

Pozor! Máme neurčitý výraz $\| -\infty + \infty \|$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3+2x^2-4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2-4)=\infty^3+2\infty^2-4=\infty+\infty-4=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-4)=(-\infty)^3+2(-\infty)^2-4$$

$$=\|-\infty+\infty\|-4$$

$$=-\infty$$

- Z teorie víme, jak tento problém vyřešit.
- Lze ukázat, že na výsledek má vliv jenom vedoucí koeficient. Ostatní koeficienty tedy vynecháme.
- Limita vedoucího člene je $-\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3 + 2x^2 - 4)$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 + 2x^2 - 4) = \infty^3 + 2\infty^2 - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(x^3 + 2x^2 - 4) &= (-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 - 4\\ &= \| - \infty + \infty\| - 4\\ &= -\infty\end{aligned}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 1}{2x^2 - 3}$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$$

Začneme s limitou v $+\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

- Limita čitatele i jmenovatele je $+\infty$.
- Dostáváme neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2}$$

- Z teorie víme, že limita se dá určit snadno – jenom z vedoucích členů čitatele a jmenovatele.
- Vynecháme tedy všechno ostatní.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2}$$

Upravíme

$$\frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2}.$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2}$$

Dosadíme $x = \infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

Použijeme známá pravidla pro počítání s nekonečnem.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$

- Pokračujeme s limitou v $-\infty$.
- Dosazením $x=-\infty$ dostáváme opět neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2}$$

Opět uvažujeme pouze vedoucí členy.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2}$$

Upravíme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2}$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

Použijeme známá pravidla pro počítání s nekonečnem.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+1}{2x^2-3} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

$$\text{Vypočtěte } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$$

Začneme s limitou v $+\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

Dosadíme $x=\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4}$$

- Neurčitý výraz.
- Použijeme jenom vedoucí členy.
- Všechno ostatní lze zanedbat.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3}$$

Upravíme

$$\frac{2x^4}{3x^4} = \frac{2}{3}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Limita konstantní funkce je ta konstanta.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

Pokračujeme s limitou v $-\infty$. Dosadíme $x = -\infty$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4}{3x^4}$$

- Máme neurčitý výraz.
- Použijeme jenom vedoucí členy.
- Všechno ostatní zanedbáme.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}$$

Upravíme

$$\frac{2x^4}{3x^4} = \frac{2}{3}$$

Vypočtěte $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Limita konstantní funkce je ta konstanta.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+4x+5}{3x^4-x^3+4x+1} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right].$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right] = \|\infty - \infty\|$$

Protože $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$, dostáváme neurčitý výraz $\|\infty - \infty\|$.

$\boxed{\text{Vypočtěte} \quad \lim_{x\to\infty} \left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right].}$

$$\lim_{x\to\infty} \left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right] = \|\infty - \infty\|$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\ln x^2 - \ln(x^2+x+1)\right]$$

- Limity z neurčitých výrazů ve tvaru zlomku jsou obyčejně jednodušší. Napíšeme funkci jako zlomek. .
- Nejdříve oba členy napíšeme v logaritmickém tvaru.
- Použijeme pravidlo $\boxed{r \ln a = \ln a^r}$.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\big[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\big]$.

$$\lim_{x\to\infty}\big[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\big]=\|\infty-\infty\|$$

$$=\lim_{x\to\infty}\big[\ln x^2-\ln(x^2+x+1)\big]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2}{x^2+x+1}$$

Odečteme logaritmy podle pravidla $\boxed{\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}}$.

Vypočtěte $\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\right]=\|\infty-\infty\|$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\ln x^2-\ln(x^2+x+1)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2}{x^2+x+1}=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}\right)$$

- Určíme limitu složené funkce.
- Nejprve prozkoumáme limitu vnitřní složky.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right] = \|\infty - \infty\|$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\ln x^2 - \ln(x^2+x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{x^2}{x^2+x+1} = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}\right) = \ln\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$

Uvnitř máme neurčitý výraz.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right] = \|\infty - \infty\|$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\ln x^2 - \ln(x^2+x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{x^2}{x^2+x+1} = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}\right) = \ln\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\right)$$

Uvažujeme jenom vedoucí členy.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x - \ln(x^2+x+1)\right] = \|\infty - \infty\|$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\ln x^2 - \ln(x^2+x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{x^2}{x^2+x+1} = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}\right) = \ln\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\right) = \ln 1$$

Provedeme krácení ve výrazu $\frac{x^2}{x^2}$ a použijeme zřejmý vztah

$\lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1.$

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\right].$

$$\lim_{x\to\infty}\left[2\ln x-\ln(x^2+x+1)\right]=\|\infty-\infty\|$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\ln x^2-\ln(x^2+x+1)\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2}{x^2+x+1}=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}\right)=\ln\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$$
$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\right)=\ln 1=0$$