

Nevlastní integrál vlivem meze

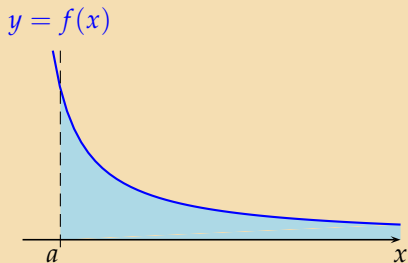
Lenka Příbylová

3. srpna 2006

Obsah

Definice - singularita v horní mezi	3
$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$	3
$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$	10
Definice - singularita v dolní mezi	16
$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$	16
Definice - singularity v obou mezích	23
$\int_{-\infty}^{\infty} dx$	23

Definice - singularita v horní mezi



$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [F(t) - F(a)]$$

Najděte $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Najděte $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

V horní mezi má integrál singularitu. Nelze spočítat určitý integrál, protože je interval integrace nekonečný.

Najděte $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2} dx$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t v okolí ∞ je nyní integrál určitý,

Najděte $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_2^t$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

Dosadíme meze.

Najděte $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Spočteme limitu.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = 0$$

Najděte $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

Najděte $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

V horní mezi má integrál singularitu. Nelze spočítat určitý integrál, protože je interval integrace nekonečný.

Najděte $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t v okolí ∞ je nyní integrál určitý,

Najděte $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^t$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln |t| - \ln 1)\end{aligned}$$

Dosadíme meze.

Najděte $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

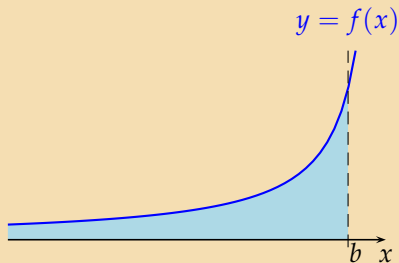
$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln |t| - \ln 1) = \infty\end{aligned}$$

Spočteme limitu.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln |t| = \infty$$

Limita je nevlastní, integrál proto diverguje.

Definice - singularita v dolní mezi



$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [F(b) - F(t)]$$

Najděte $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$.

Najděte $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$.

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$$

V dolní mezi má integrál singularitu. Nelze spočítat určitý integrál, protože je interval integrace nekonečný.

Najděte $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$.

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t v okolí $-\infty$ je nyní integrál určitý,

Najděte $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$.

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [\arctg x]_t^0$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [\operatorname{arctg} x]_t^0 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} t)\end{aligned}$$

Dosadíme meze.

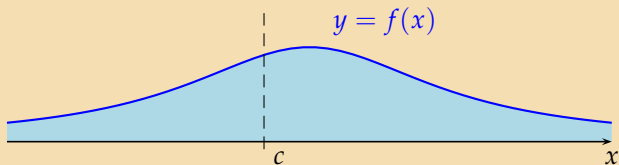
Najděte $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [\operatorname{arctg} x]_t^0 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} t) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Spočteme limitu.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} t = -\frac{\pi}{2}$$

Definice - singularity v obou mezích



$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_c^t f(x) dx\end{aligned}$$

Najděte $\int_{-\infty}^{\infty} dx$.

Najděte $\int_{-\infty}^{\infty} dx$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx$$

Integrál má singularity v obou mezích. Nelze spočítat určitý integrál, protože je interval integrace nekonečný.

Najděte $\int_{-\infty}^{\infty} dx$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx = \int_{-\infty}^0 dx + \int_0^{\infty} dx$$

Rozdělíme na dva nevlastní integrály s jednou singularitou.

Najděte $\int_{-\infty}^{\infty} dx$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx = \int_{-\infty}^0 dx + \int_0^{\infty} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dx$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t v okolí $\pm\infty$ jsou nyní integrály určité,

Najděte $\int_{-\infty}^{\infty} dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx &= \int_{-\infty}^0 dx + \int_0^{\infty} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [x]_t^0 + \lim_{t \rightarrow \infty} [x]_0^t\end{aligned}$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli. Hledáme primitivní funkci k 1 v proměnné x .

Najděte $\int_{-\infty}^{\infty} dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx &= \int_{-\infty}^0 dx + \int_0^{\infty} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [x]_t^0 + \lim_{t \rightarrow \infty} [x]_0^t = \lim_{t \rightarrow -\infty} (0 - t) + \lim_{t \rightarrow \infty} (t - 0)\end{aligned}$$

Dosadíme meze.

Najděte $\int_{-\infty}^{\infty} dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx &= \int_{-\infty}^0 dx + \int_0^{\infty} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [x]_t^0 + \lim_{t \rightarrow \infty} [x]_0^t = \lim_{t \rightarrow -\infty} (0 - t) + \lim_{t \rightarrow \infty} (t - 0) = \infty\end{aligned}$$

Spočteme limity. Integrál diverguje.

KONEC