

Substituční metoda

Lenka Příbylová

28. července 2006

Obsah

$\int e^{2x+7} dx$	3
$\int xe^{1-x^2} dx$	11
$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$	19

Vypočtěte $\int e^{2x+7} dx$

Vypočtěte $\int e^{2x+7} dx$

$$\int e^{2x+7} dx$$

Vnitřní složka je $2x + 7$.

Vypočtěte $\int e^{2x+7} dx$

$$\int e^{2x+7} dx =$$

$2x + 7 = t$

Zavedeme substituci $2x + 7 = t$.

Vypočtěte $\int e^{2x+7} dx$

$$\int e^{2x+7} dx = \begin{array}{l} 2x + 7 = t \\ 2 dx = dt \end{array}$$

Nalezneme vztah mezi dx a dt .

Vypočtěte $\int e^{2x+7} dx$

$$\int e^{2x+7} dx =$$

$2x + 7 = t$
$2 dx = dt$
$dx = \frac{1}{2} dt$

Vypočtěte $\int e^{2x+7} dx$

$$\int e^{2x+7} dx = \begin{array}{l} 2x + 7 = t \\ 2 dx = dt \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} = \int e^t \frac{1}{2} dt$$

Dosadíme substituci.

Vypočtěte $\int e^{2x+7} dx$

$$\int e^{2x+7} dx = \begin{array}{l} 2x + 7 = t \\ 2 dx = dt \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} = \int e^t \frac{1}{2} dt$$
$$= \frac{1}{2} e^t + c$$

Integrujeme.

Vypočtete $\int e^{2x+7} dx$

$$\int e^{2x+7} dx = \begin{array}{l} 2x + 7 = t \\ 2 dx = dt \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} = \int e^t \frac{1}{2} dt$$
$$= \frac{1}{2} e^t + c = \frac{1}{2} e^{2x+7} + c$$

Použijeme substituci k návratu k proměnné x . Došli jsme k témuž výsledku jako při použití vztahu $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b)$.

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2} dx$.

Vypočtete $\int xe^{1-x^2} dx$.

$$\int xe^{1-x^2} dx$$

Výraz je součinem polynomu a složené exponenciální funkce.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2} dx$.

$$\int xe^{1-x^2} dx$$

$$1 - x^2 = t$$

Zkusíme substituovat za vnitřní složku složené funkce e^{1-x^2} .

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2} dx$.

$$\int xe^{1-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \end{aligned}$$

Hledáme vztah mezi diferenciály. Derivujeme obě strany substituce.

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2} dx$.

$$\int x e^{1-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \\ x dx &= -\frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

Vyjádríme odsud výraz $x dx$, který figuruje uvnitř integrálu.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2} dx$.

$$\int xe^{1-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \\ x dx &= -\frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^t dt$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2} dx$.

$$\int xe^{1-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \\ x dx &= -\frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^t dt$$

$$= -\frac{1}{2} e^t + c$$

Vypočtěte integrál pomocí vzorce.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2} dx$.

$$\int xe^{1-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \\ x dx &= -\frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^t dt$$

$$= -\frac{1}{2} e^t + c$$

$$= -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$$

Použijeme substituci pro návrat k původní proměnné.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$$

Příklady s odmocninou z lineárního členu řešíme vždy druhou substituční metodou. Zbavujeme se tak nepříjemné odmocniny.

Vypočtete $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx =$$

$$\sqrt{1+x} = t$$

Zavedeme proto substituci $t = \sqrt{1+x}$.

Vypočtete $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx =$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= t \\ 1+x &= t^2\end{aligned}$$

Odmocninu vždy převedeme umocněním na tvar bez odmocniny, přecházíme takto vlastně k inverzní funkci.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx =$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= t \\ 1+x &= t^2 \\ x &= t^2 - 1\end{aligned}$$

Inverzní funkce bude v přepisu také třeba.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx =$$

$$\sqrt{1+x} = t$$

$$1+x = t^2$$

$$x = t^2 - 1$$

$$dx = 2t dt$$

Hledáme vztah mezi diferenciály. Derivujeme obě strany inverzní substitute.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx =$$

$$\sqrt{1+x} = t$$

$$1+x = t^2$$

$$x = t^2 - 1$$

$$dx = 2t dt$$

$$= \int \frac{1}{(2+t^2-1)}$$

Všechny výrazy s x zaměníme pomocí substituce za ekvivalentní výrazy s t . Nejdříve použijeme za x inverzní substituce.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx =$$

$$\sqrt{1+x} = t$$

$$1+x = t^2$$

$$x = t^2 - 1$$

$$dx = 2t dt$$

$$= \int \frac{1}{(2+t^2-1)t} dt$$

Odmocnina odpovídá t .

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx =$$

$$\sqrt{1+x} = t$$

$$1+x = t^2$$

$$x = t^2 - 1$$

$$dx = 2t dt$$

$$= \int \frac{1}{(2+t^2-1)t} \cdot 2t dt$$

Diferenciál také substituujeme. Všechny členy s x jsme nahradili.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx =$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= t \\ 1+x &= t^2 \\ x &= t^2 - 1 \\ dx &= 2t dt \end{aligned}$$

$$= \int \frac{1}{(2+t^2-1)t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

Zkrátíme a konstantu převedeme před integrál.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx =$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= t \\ 1+x &= t^2 \\ x &= t^2 - 1 \\ dx &= 2t dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{(2+t^2-1)t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 2 \operatorname{arctg} t + c\end{aligned}$$

Integrujeme.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx =$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= t \\ 1+x &= t^2 \\ x &= t^2 - 1 \\ dx &= 2t dt\end{aligned}$$

$$= \int \frac{1}{(2+t^2-1)t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= 2 \operatorname{arctg} t + c = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{1+x} + c$$

Navrátíme se k původní proměnné.