

Taylorův polynom

Lenka Příbylová

28. července 2006

Obsah

Najděte $T_{2n}(x)$ pro funkci $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$. . .	3
Najděte $T_4(x)$ pro funkci $f(x) = e^{-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$	9

Najděte Tayl. polynom st. $2n$ pro $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$.

Najděte Tayl. polynom st. $2n$ pro $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$.

$$f(x) = e^{-x+3}$$

$$f(3) = 1$$

Vypočteme funkční hodnotu funkce $f(x)$ v bodě x_0 :

$$f(3) = e^{-3+3} = e^0 = 1.$$

Najděte Tayl. polynom st. $2n$ pro $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$.

$$f(x) = e^{-x+3}$$

$$f(3) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x+3} \cdot (-1)$$

$$f'(3) = -1$$

Spočítáme první derivaci. Funkční hodnota se liší pouze znaménkem.

Najděte Tayl. polynom st. $2n$ pro $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$.

$$f(x) = e^{-x+3} \qquad f(3) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x+3} \cdot (-1) \qquad f'(3) = -1$$

$$f''(x) = -e^{-x+3} \cdot (-1) \qquad f''(3) = 1$$

Spočítáme druhou derivaci. Funkční hodnota se od první liší zase pouze znaménkem.

Najděte Tayl. polynom st. $2n$ pro $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$.

$$f(x) = e^{-x+3} \qquad f(3) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x+3} \cdot (-1) \qquad f'(3) = -1$$

$$f''(x) = -e^{-x+3} \cdot (-1) \qquad f''(3) = 1$$

$$f'''(x) = e^{-x+3} \cdot (-1) \qquad f'''(3) = -1$$

Další derivace se budou chovat podobně. Derivace lichého řádu budou mít v bodě $x_0 = 3$ hodnotu -1 a sudé $+1$.

Najděte Tayl. polynom st. $2n$ pro $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$.

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{-x+3} & f(3) &= 1 \\f'(x) &= e^{-x+3} \cdot (-1) & f'(3) &= -1 \\f''(x) &= -e^{-x+3} \cdot (-1) & f''(3) &= 1 \\f'''(x) &= e^{-x+3} \cdot (-1) & f'''(3) &= -1\end{aligned}$$

Taylorův polynom sudého stupně je tvaru:

$$\begin{aligned}T_{2n} &= 1 + \frac{-1}{1!}(x-3) + \frac{1}{2!}(x-3)^2 + \frac{-1}{3!}(x-3)^3 + \dots \\&\dots + \frac{-1}{(2n-1)!}(x-3)^{2n-1} + \frac{1}{(2n)!}(x-3)^{2n}.\end{aligned}$$

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$f(x) = e^{-x^2} \quad f(0) = 1$$

Vypočteme funkční hodnotu funkce $f(x)$ v bodě x_0 :

$$f(0) = e^0 = 1.$$

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$\begin{array}{lll} f(x) = & e^{-x^2} & f(0) = 1 \\ f'(x) = & e^{-x^2}(-2x) & f'(0) = 0 \end{array}$$

Spočítáme první derivaci a její funkční hodnotu.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2)$$

Druhou derivaci počítáme jako součin.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) \qquad f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) \\ &= e^{-x^2}(4x^2 - 2) \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) \qquad f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) \\ &= e^{-x^2}(4x^2 - 2) \qquad f''(0) = -2 \end{aligned}$$

Dosadíme $x = x_0 = 0$.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) \qquad f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) \\ &= e^{-x^2}(4x^2 - 2) \qquad f''(0) = -2 \end{aligned}$$

$$f'''(x) = e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x)$$

Třetí derivaci počítáme také jako součin.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) \qquad f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) \\ &= e^{-x^2}(4x^2 - 2) \qquad f''(0) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) \\ &= e^{-x^2}(-8x^3 + 12x) \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) \qquad f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) \\ &= e^{-x^2}(4x^2 - 2) \qquad f''(0) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) \\ &= e^{-x^2}(-8x^3 + 12x) \qquad f'''(0) = 0 \end{aligned}$$

Dosadíme $x = x_0 = 0$.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) \qquad f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) \\ &= e^{-x^2}(4x^2 - 2) \qquad f''(0) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) \\ &= e^{-x^2}(-8x^3 + 12x) \qquad f'''(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= e^{-x^2}(-2x)(-8x^3 + 12x) + \\ &\quad + e^{-x^2}(-24x^2 + 12) \end{aligned}$$

Čtvrtou derivaci počítáme také jako součin.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) \qquad f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) \\ &= e^{-x^2}(4x^2 - 2) \qquad f''(0) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) \\ &= e^{-x^2}(-8x^3 + 12x) \qquad f'''(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= e^{-x^2}(-2x)(-8x^3 + 12x) + \\ &\quad + e^{-x^2}(-24x^2 + 12) \\ &= e^{-x^2}(16x^4 - 48x^2 + 12) \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) \qquad f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) \\ &= e^{-x^2}(4x^2 - 2) \qquad f''(0) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) \\ &= e^{-x^2}(-8x^3 + 12x) \qquad f'''(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= e^{-x^2}(-2x)(-8x^3 + 12x) + \\ &\quad + e^{-x^2}(-24x^2 + 12) \\ &= e^{-x^2}(16x^4 - 48x^2 + 12) \qquad f^{(4)}(0) = 12 \end{aligned}$$

Dosadíme $x = x_0 = 0$.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

Víme tedy, že

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -2, f'''(0) = 0, f^{(4)}(0) = 12.$$

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

Víme tedy, že

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -2, f'''(0) = 0, f^{(4)}(0) = 12.$$

Taylorův polynom 4.stupně v počátku je tedy tvaru:

$$T_4 = 1 + \frac{0}{1!}(x - 0) + \frac{-2}{2!}(x - 0)^2 + \frac{0}{3!}(x - 0)^3 + \frac{12}{4!}(x - 0)^4$$

$$T_4 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$