

Určitý integrál

Lenka Příbylová

28. července 2006

Obsah

$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$	3
$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$	14
$\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$	16
$\int_1^2 x \ln x dx$	24
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$	32

Najděte $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$.

Najděte $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$.

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$$

Počítáme určitý integrál z polynomu na intervalu $\langle -2, 1 \rangle$. Polynom je spojitá funkce na celém \mathbb{R} , proto můžeme k výpočtu použít Newton-Leibnitzovu větu.

Najděte $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$.

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx = \left[3 \frac{x^3}{3} \right]$$

Najdeme primitivní funkci k danému polynomu.

Najděte $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$.

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1$$

Najdeme primitivní funkci k danému polynomu

Najděte $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$.

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1$$

a zapíšeme ji do hranatých závorek s dolní a horní mezí intervalu. Tento zápis značí odčítání $F(1) - F(-2)$. Integrační konstantu nemusíme psát, protože by se v rozdílu stejně odečetla.

Najděte $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$.

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1 = \left[x^3 + x^2 - 9x \right]_{-2}^1$$

Před dosazováním upravíme.

Najděte $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$.

$$\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1 = \left[x^3 + x^2 - 9x \right]_{-2}^1$$
$$= 1 + 1 - 9$$

Dosadíme do primitivní funkce horní mez

Najděte $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx &= \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1 = \left[x^3 + x^2 - 9x \right]_{-2}^1 \\ &= 1 + 1 - 9 - (-8 + 4 + 18)\end{aligned}$$

a odečteme hodnotu v dolní mezi.

Najděte $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx &= \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1 = \left[x^3 + x^2 - 9x \right]_{-2}^1 \\ &= 1 + 1 - 9 - (-8 + 4 + 18) = -7 - 14 = -21\end{aligned}$$

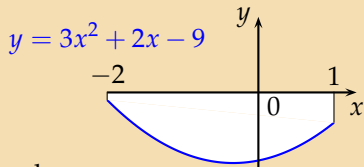
Dostali jsme výsledek, kterým je vždy číslo, protože představuje obsah plochy pod křivkou $y = 3x^2 + 2x - 9$.

Najděte $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx &= \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x \right]_{-2}^1 = \left[x^3 + x^2 - 9x \right]_{-2}^1 \\ &= 1 + 1 - 9 - (-8 + 4 + 18) = -7 - 14 = -21\end{aligned}$$

Proč je určitý integrál **záporný**?

Najděte $\int_{-2}^1 (3x^2 + 2x - 9) dx$.



Graf funkce je pod osou x ,

proto v integrálním součtu $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ je $f(\xi_i)$ záporné číslo. Integrální součet je tedy záporný a také jeho limita – určitý integrál – je záporné číslo. Obsah útvaru omezeného osou x a křivkou na daném intervalu je tedy absolutní hodnota určitého integrálu: $S = 21$.

Najděte $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$.

Najděte $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$.

Funkce není na intervalu spojitá, jelikož v bodě 0 není definovaná.
Určitý integrál neexistuje.

Najděte $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$.

Najděte $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$.

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$$

Funkce není definovaná a spojitá v bodech, kde je jmenovatel nulový: $x^2 - 4 = 0$. Není tedy definovaná v bodech 2 a -2 . Na celém intervalu $\langle 3, 7 \rangle$ je tedy funkce definovaná a spojitá, můžeme proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$.

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx =$$

Jde o ryze lomenou funkci. V čitateli vytvoříme derivaci jmenovatele
 $(x^2 - 4)' = 2x$.

Najděte $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$.

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \left[\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| \right]_3^7$$

Použijeme vzorec

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|.$$

Najděte $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$.

$$\begin{aligned}\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx &= \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \left[\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| \right]_3^7 \\ &= \frac{1}{2} \ln 45\end{aligned}$$

Dosadíme horní mez: $7^2 - 4 = 45$

Najděte $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$.

$$\begin{aligned}\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx &= \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \left[\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| \right]_3^7 \\ &= \frac{1}{2} \ln 45 - \frac{1}{2} \ln 5\end{aligned}$$

a dolní mez: $3^2 - 4 = 5$

Najděte $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$.

$$\begin{aligned}\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx &= \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \left[\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| \right]_3^7 \\ &= \frac{1}{2} \ln 45 - \frac{1}{2} \ln 5 = \frac{1}{2} \ln 9\end{aligned}$$

Při úpravě použijeme vzorec pro práci s logaritmy:

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

Najděte $\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx$.

$$\begin{aligned}\int_3^7 \frac{x}{x^2 - 4} dx &= \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \left[\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| \right]_3^7 \\ &= \frac{1}{2} \ln 45 - \frac{1}{2} \ln 5 = \frac{1}{2} \ln 9 = \ln 3\end{aligned}$$

a další vzorec $a \ln b = \ln b^a$.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

$$\int_1^2 x \ln x \, dx$$

Funkce je součinem polynomu a logaritmické funkce. Tyto funkce jsou na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ spojité. Použijeme Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} =$$

Primitivní funkci hledáme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde $u = \ln x$ a $v' = x$.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$

Primitivní funkci hledáme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde $u = \ln x$ a $v' = x$. První část vzorce $u \cdot v$ už je součástí primitivní funkce, proto ji musíme zapsat do **hranatých závorek**. Druhá část je **určitý integrál**, musíme tedy psát meze.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx$$

Dosadíme horní mez a odečteme hodnotu v dolní mezi.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

Najdeme primitivní funkci.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array}} = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2$$
$$= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right)$$

Dosadíme.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array}} = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2$$
$$= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

Upravíme.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$$

Funkce je spojitá na celém \mathbb{R} , tedy i na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Můžeme použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx =$$

$$\sin x = t$$

Primitivní funkci nalezneme pomocí substituce $t = \sin x$, protože jde o funkci goniometrickou typu $R(\sin x) \cos x$.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx =$$

$$\begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x \, dx &= dt \end{aligned}$$

Diferencujeme.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \int t^2 \, dt$$

$$\begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x \, dx &= dt \end{aligned}$$

Dosadíme.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ t_1 = \sin 0 = 0 \\ t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} = \int_0^1 t^2 \, dt$$

Pro původní proměnnou x integrujeme na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Při přechodu k proměnné t musíme spolu s proměnnou x změnit i její interval integrace, protože $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ t_1 = \sin 0 = 0 \\ t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} = \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1$$

Integrujeme v proměnné t .

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ t_1 = \sin 0 = 0 \\ t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} = \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Dosadíme meze proměnné t . Získáváme tedy výsledek aniž bychom se vraceli k původní proměnné.

KONEC