1. Máme určit hodnotu 180% z čísla 8/45, tj. 180/100 z 8/45. K výpočtu tedy stačí vynásobit zlomky (zjednodušíme krácením):

$$\frac{180}{100} \cdot \frac{8}{45} = \frac{18}{10} \cdot \frac{8}{45} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 8}{5 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5} = \frac{8}{25} = \frac{32}{100} = 0{,}32.$$

Číslo 0,32 je správnou odpovědí.

---

2. Označme výroky vstupující do složeného výroku X jako L: "Petr je lékař." a S: "Petr je soudce." Opačné výroky k nim označme $\overline{L}$: "Petr není lékař." a $\overline{S}$: "Petr není soudce." Ve výroku X je spojka nebo ve smyslu slučovacím, tedy "Alespoň jedním (lékařem nebo soudcem) Petr je." (Tj. v případě, že je výrok X pravdivý, může Petr být lékařem a ne soudcem, může být soudcem a ne lékařem, může také být lékařem i soudceem současně.)
Tvrzení X by tedy bylo nepravdivé pouze ve zbývající jediné situaci, kdy Petr není ani lékař ani soudce a oba výroky L i S jsou nepravdivé. Opačným výrokem proto musí být tvrzení: "Petr není ani lékař ani soudce."
Pro názornost uděláme pravdivostní tabulku výroku $X : L \vee S$ i všech nabízených odpovědí $A : \overline{L} \wedge \overline{S}$, $B : \overline{L} \vee \overline{S}$, $C : L \Rightarrow \overline{S}$, $D : S \Rightarrow \overline{L}$ a $E : L \wedge S$.

				X	A	B	C	D	E
L	S	$\overline{L}$	$\overline{S}$	$L \vee S$	$\overline{L} \wedge \overline{S}$	$\overline{L} \vee \overline{S}$	$L \Rightarrow \overline{S}$	$S \Rightarrow \overline{L}$	$L \wedge S$
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0

Vidíme, že pouze ve sloupci A jsou pravdivostní hodnoty právě opačné oproti sloupci X. Proto A je opačným výrokom k X.

---

3. Převedením zlomků na desetinná čísla, tj. 1,45, $7/5 = 14/10 = 1{,}4$, $3/2 = 15/10 = 1{,}5$, $9/7 = 9 : 7 \doteq 1{,}28...$ ihned vidíme, že číslo 9/7 je nejmenší a číslo 3/2 je největší z této čtveřice čísel.

---

4. Pravidlo odpovídá složenému výroku $(U(X) \vee D(X)) \Rightarrow P(X)$, kde jsme jako výrok $U(X)$ označili: "Student X uspěl v praktické zkoušce.", jako výrok $D(X)$: "Student X má doporučení." a jako výrok $P(X)$: "Student X postupuje do dalšího kola."
Porušení pravidla nastává v situaci, kdy pro některého studenta bude složený výrok $(U(X) \vee D(X)) \Rightarrow P(X)$ nepravdivý. Jedná se o implikaci a ta je nepravdivá jedině v případě, že první část $U(x) \vee D(x)$ je pravdivá (tj. alespoň jeden z výroků $U(X)$, $D(X)$ platí), zatímco druhá nepravdivá (tj. $P(X)$ neplatí).
Porušení pravidla nastane pouze v případě výroku týkajícího se studenta Marka: "Marek neuspěl v praktické zkoušce, doporučení měl a do dalšího kola nepostoupil." V tabulce níže vidíme odpovídající pravdivostní hodnoty a ve sloupci

poznámka je uvedeno, kterým z nabízených možností odpovídají jednotlivé řádky (zde pouze u Marka je ve výsledném sloupci nula znamenající nepravdivost složeného výroku a tedy porušení pravidla.)

U	D	P	$U \vee D$	$(U \vee D) \Rightarrow P$	poznámka
1	1	1	1	1	Simona
1	1	0	1	0	
1	0	1	1	1	Jiřina
0	1	1	1	1	
1	0	0	1	0	
0	1	0	1	0	Marek
0	0	1	0	1	Petr
0	0	0	0	1	Nikolas

---

5. Označme jako X částku v tisících, kterou měl nadační fond k dispozici na začátku. Poté, co věnoval dvacet procent z X nemocnici, mu zůstalo osmdesát procent původní částky, tj. $Y = 0{,}8 \cdot X$. Pětinu toho, co zbylo dostal dětský domov. Nový zůstatek byl tedy čtyři pětiny z Y, tj. $Z = 4Y/5 = 0{,}8 \cdot Y = 0{,}8^2 X$. Polovina ze zbytku Z byla věnována škole a zůstalo $Z/2 = 0{,}5 \cdot 0{,}8^2 X$. Toto číslo odpovídá čtyřiceti tisícům a hledanou hodnotu X získáme vyřešením rovnice

$$0{,}5 \cdot 0{,}8^2 X = 40 \implies \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} X = 40.$$

Původní obnos v tisících je $X = (2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 40/(4 \cdot 4) = 125$. Správnou odpověď lze také zjistit "vylučovací" metodou, tj. postupným dosazení nabízených odpovědí do zadání.

---

6. Můžeme vyjít z informace, že klavíristka je z Ostravy. Podle první tabulky je klavíristkou buď Lenka, nebo Míša. Podle druhé tabulky však Míša není z Ostravy. Proto klavíristkou z Ostravy musí být Lenka. Podle první tabulky Míša nemůže být houslistkou, je tedy dirigentkou. Podle druhé tabulky Katka nemůže být z Brna, je tedy z Prahy. Celkem: Lenka je klavíristka z Ostravy. Míša je dirigentka z Brna. Katka je houslistka z Prahy. Snadno již vybereme *nepravdivé* tvrzení z nabízených možností: "Míša je z Prahy." Všechny ostatní nabízené možnosti jsou pravdivé.

---

7. První způsob řešení: Budeme dělit čtyřciferné číslo $3XY5$ pěti.

$$3X\rfloor Y5 : 5 = X5Y$$

Zatrhli jsme první dvě cifry odpovídající číslu mezi třiceti a čtyřiceti. V tomto případě může být hodnota částečného podílu buď 6, nebo 7. Číslo $x = 6$ je však nevyhovující ($36 : 5 = 7 + 1/5$), musí tedy být $X = 7$ a $37 : 5 = 7 + 2/5$. Sepíšeme zbytek 2 a pokračujeme v dělení.

$$\begin{array}{l} 37\rfloor Y5 : 5 = 75Y \\ \ \ 2\,Y \end{array}$$

Vidíme, že částečný podíl $2Y = 5 + z/5$ je pět a proto číslo $2Y$ musí být alespoň 25. Pro hodnotu Y tak připadají v úvahu pouze cifry 6,8 nebo 9, odpovídající zbytek z pak nabývá hodnot 1,3 nebo 4. (Různá písmena zastupují různé cifry, a sedmička je X, cifra 5 ve výpočtu zastupuje sama sebe). Postupným dosazením ($26 : 5 = 5 + 1/5$, $28 : 5 = 5 + 3/5$ a $29 : 5 = 5 + 4/5$) zjistíme, že jedinou možností pro odpovídající pokračování výpočtu je $Y = 9$ neboť $45 : 5 = 9$. (Pro šestku by poslední cifra výsledku musela být 5 a pro osmičku 7, tj. X.). Celý výpočet pak vypadá takto:

$$\begin{array}{l} 37\rfloor 9\rfloor 5\rfloor : 5 = 759 \\ \ \ 2\,9 \\ \ \ \ \ 4\,5 \\ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Celkem tedy $X = 7$ a $Y = 9$ a správnou odpovědí je číslo $X + Y = 16$.
Druhý způsob řešení: Místo dělení si rozepíšeme násobení

$$\begin{aligned} X5Y \cdot 5 &= 3\,XY5, \\ 100X \cdot 5 + 50 \cdot 5 + Y \cdot 5 &= 3\,000 + 100X + 10Y + 5, \quad / - 250 - 100X - 10Y \\ 400X - 5Y &= 2\,755 \quad / : 5 \\ 80X - Y &= 551. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $Y = 80X - 551$ a protože víme, že jak X, tak Y jsou cifry, tj. mohou nabývat pouze hodnot $0, 1, \ldots, 9$, jediné přípustné řešení je $X = 7$ a $Y = 9$.

---

8. Možná uspořádání obyvatel domu shrneme v tabulce. Informace připouští čtyři možnosti, neboť Dvořákovi mohou bydlet buď ve třetím, nebo ve druhém patře (nebydlí v nejvyšším ani v nejnižším) a Cidlinovi bydlí buď přímo v patře nad Dvořákovými, nebo v patře hned pod nimi (chodí k Dvořákovým na návštěvu jedno poschodí). Do zbylých pater lze poté už jediným způsobem umístit zbylé rodiny (Adamovi bydlí výše než Bauerovi).

Patro	1. možnost	2. možnost	3. možnost	4.možnost
4. (nejvyšší)	Cidlinovi	Adamovi	Adamovi	Adamovi
3. (druhé odshora)	Dvořákovi	Dvořákovi	Cidlinovi	Bauerovi
2. (druhé odspodu)	Adamovi	Cidlinovi	Dvořákovi	Dvořákovi
1. (nejnižší)	Bauerovi	Bauerovi	Bauerovi	Cidlinovi

Diskuse je již nyní snadná, jediným tvrzením pravdivým ve všech možných situacích je odpověď "Bauerovi nebydlí ve druhém patře odspodu." Ostatní nabízené odpovědi mohou být jak pravdivé, tak nepravdivé a ze zadaných informací o jejich pravdivosti nelze rozhodnout.

---

9. Můžeme si všimnout, že ve čtyřech obrazcích neobsahujících otazníky je průměrná hodnota čísel stejná a rovna čtyřem:

$$\frac{6+2+1+5+6}{5} = \frac{3+4+7+2}{4} = \frac{3+5}{2} = \frac{4}{1} = 4.$$

Pro zachování tohoto principu by měl být součet čísel v obrazci se třemi čísly roven dvanácti, součet obou otazníků pak dává číslo 10. Z nabízených odpovědí se tedy na místa otazníků hodí všechny dvojice mimo dvojici čísel 7,4 ($7+4 = 11 \neq 10$).

---

10. Údaje ze zadání převedeme na kilometry a shrneme v následující tabulce (v pravém sloupci je uvedeno, na kolikátém kilometru trasy se daný objekt nachází resp. odpovídající rozmezí.

Objekt	zadání	vzdálenost od startu v km
S	start	0
P	8km od startu	8
O	1/6 z 60 až 1/4 z 60	mezi 10 a 15
B	1/2 z 60 až 60−25	mezi 30 a 35
V	60−60/4	45
C	cíl	60

Odečtením získáme krajní hodnoty délek jednotlivých úseků, jak je znázorněno v druhé tabulce.

Úsek	výpočet minima	výpočet maxima	rozmezí v km
SP	8−0	8−0	8
PO	10−8	15−8	mezi 2 a 7
OB	30−15	35−10	mezi 15 a 25
BV	45−35	45−30	mezi 10 a 15
VC	60−45	60−45	15

Nyní už stačí vybrat nejkratší úsek, tj. PO, a nejdelší úsek, tj. OB, a zvolit správnou odpověď.

---

11. Označme $y = a+1$. Víme, že $\heartsuit y = 5$ a dosazením do předpisu pro operaci $\heartsuit$ získáme rovnici

$$\begin{aligned}
\frac{3+2y}{y+3} &= 5 \qquad / \cdot (y+3) \\
3+2y &= 5y+15 \qquad / -5y-3 \\
-3y &= 12 \qquad / : (-3) \\
y &= -4.
\end{aligned}$$

Odtud

$$y = a + 1 = -4 \implies a = y - 1 = -5 \implies a - 1 = -5 - 1 = -6$$

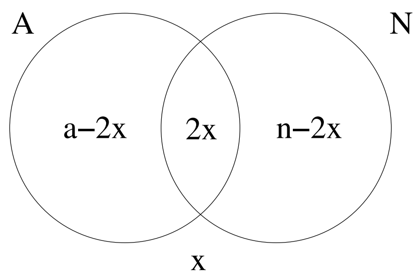
a

$$\heartsuit(a - 1) = \heartsuit(-6) = \frac{3 + 2(-6)}{(-6) + 3} = \frac{-9}{-3} = 3.$$

Správnou odpovědí je číslo 3.

---

12. Situaci snadno znázorníme následujícím obrázkem. Označme $a = 10$ počet studentů zapsaných do angličtiny, $n = 12$ počet studentů zapsaných do němčiny a $x =?$ počet studentů nemajících zapsaný žádný z těchto jazyků. Oba jazyky pak podle zadání má zapsáno $2x$ studentů.

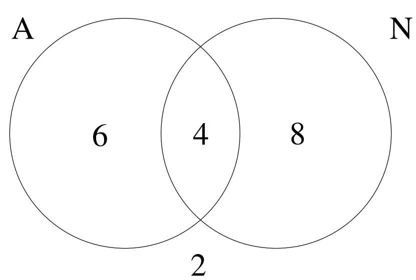


Součet prvků v jednotlivých částech diagramu musí odpovídat celkovému počtu studentů:

$$(a - 2x) + (n - 2x) + 2x + x = 20, \implies (10 - 2x) + (12 - 2x) + 2x + x = 20,$$

$$22 - x = 20 \quad \implies \quad x = 2, \quad 2x = 4.$$

Celkové rozložení vypadá takto:



Nyní k diskusi nabízených možností, ze kterých máme vybrat *nepravdivé* tvrzení:

- "Více než pětina studentů si zapsala oba jazyky." Oba jazyky mají zapsané čtyři studenti a to je právě pětina z dvaceti. **Není pravda, je správnou odpovědí.**

- ”Studentů, kteří si zapsali pouze jeden z jazyků, je více než polovina.” Pouze angličtinu má zapsáno 6 studentů a pouze němčinu 8 studentů, dohromady 14 studentů, tato hodnota převyšuje polovinu ze dvaceti. **Ano, platí, není správnou odpovědí.**
- ”Třetina ze studentů zapsaných do němčiny je zapsána i do angličtiny.” Z 12 studentů zapsaných do němčiny jsou 4 zapsaní také do angličtiny, tedy právě třetina. **Ano, platí, není správnou odpovědí.**
- ”Studentů zapsaných pouze do angličtiny je více než čtvrtina.” Studentů, kteří mají zapsánu pouze angličtinu je 6 a to je více než čtvrtina ze dvaceti. **Ano, platí, není správnou odpovědí.**
- Právě dva studenti nejsou zapsáni ani do jednoho z jazyků. **Ano, platí, není správnou odpovědí.**

---

13. Pro každý z diagramů převedeme informaci do rovnice. U prvního začneme od čísla 4 například po šipce nahoru a získáme jednu stranu rovnice $P : 4 + x$, po šipkách v opačném směru pak máme druhou stranu $L : (4 \cdot x + x) : 3$. Rovnici $L = P$ můžeme vyřešit obvyklým způsobem:

$$\begin{aligned} \frac{4x + x}{3} &= 4 + x \qquad / \cdot 3 \\ 4x + x &= 12 + 3x \qquad / - 3x \\ 2x &= 12 \qquad / : 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

V pravém diagramu opět od čísla 4, tentokrát ve směru šipky doleva je $P : 4 + y$ a v opačném směru po šipkách máme $L : 4 \cdot y - y - 12$. Řešení $L = P$ dává

$$\begin{aligned} 4y - y - 12 &= 4 + y \qquad / + 12 - y \\ 4y - y - y &= 4 + 12 \\ 2y &= 16 \qquad / : 2 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

Snadno provedeme zkoušku správnosti výsledků dosazením do diagramů. Součet $x + y = 6 + 8 = 14$ dává výslednou odpověď.

---

14. Permutace je záměna pořadí prvků konečné posloupnosti (v našem případě čísel 1,2,3). K vyřešení úlohy stačí realizovat slovní popis jednotlivých permutací, tj.

1. Vyjdeme ze základního pořadí **123** a provedeme P_1 (výměna prvků na první a druhé pozici), výsledkem bude **213**.

2. Na získané pořadí **213** nyní aplikujem P_4 (posun prvních dvou prvků doprava a přemístění posledního na začátek), dostaneme **321**.

3. Nakonec u dalšího mezivýsledku **321** opět realizujeme P_1 (výměna prvků na první a druhé pozici) a získáme pořadí **231**.

Dle původního zadání je pořadí **231** označeno jako P_5 a tedy P_5 je správnou odpovědí.

---

15. Do diagramu na obrázku vstupuje hodnota $A = x + 1$ a $B = x - 5$, kde x může být libovolné číslo. Poté se obě čísla vynásobí a odečte se 16. Výstupem je tedy číslo závisející na vstupní hodnotě x tvarem

$$y(x) = A \cdot B - 16 = (x + 1)(x - 5) - 16 = x^2 - x - 5x - 5 - 16 = x^2 - 4x - 21.$$

Hodnota y bude minimální v případě, že bude minimální také hodnota

$$x^2 - 4x = x(x - 4).$$

Pro $x = 0$ a $x = 4$ tento výraz nabývá nulové hodnoty, pro $x > 4$ nebo $x < 0$ kladných hodnot. Pro x splňující $0 < x < 4$ jsou hodnoty $x(x - 4)$ záporné a jelikož grafem je parabola nastává díky její symetrii minimum právě uprostřed tohoto intervalu, ve vrcholu paraboly, tj. pro $x = 2$. Stačí tedy pro určení minimální výstupní hodnoty vyčíslit $y(x)$ pro $x = 2$:

$$y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 21 = -25.$$

Správná odpověď je tedy -25. Správnou hodnotu bychom našli také vyloučením všech ostatních možností (ze skutečnosti, že výraz $x(x-4)$ nabývá také záporných hodnot je zřejmé, že minimum je určitě menší číslo než číslo -21. Libovolně nízké hodnoty však získat nemůžeme, neboť pro $x \to \pm\infty$ se výstupní hodnota stále zvětšuje. Zbývá tedy jediná možnost, a to číslo -25.

Poznámka: S využitím znalostí středoškolské matematiky je pak další možností najít vrchol paraboly $y(x) = ax^2 + bx + c = x^2 - 4x - 21$ dosazením do známého středoškolského vzorce $v = [-b/2a, c - b^2/4a] = [2, -25]$, popřípadě použít derivaci pro nalezení minima funkce $y'(x) = (x^2 - 4x - 21)' = 2x - 4 = 0$ a tedy extrém nastává pro $x = 2$, jedná se o minimum, neboť $y''(2) > 0$ a tato minimální hodnota je $y(2) = -25$.