II. 5. Aplikace integrálního počtu

Geometrické aplikace

- Určitý integrál
$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$
lze geometricky interpretovat jako *obsah plochy vymezené grafem funkce* f v intervalu $[a, b]$.
- *Obsah obrazce ohraničeného uzavřenou křivkou* o parametrických souřadnicích $x=\varphi(t)$ a $y=\psi(t)$ pro $t\in[\alpha,\beta]$:
$$S=-\int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\varphi(t)\,\psi'(t)-\psi(t)\,\varphi'(t)]\,dt.$$
Křivka je orientována kladně, tzn., že plocha leží nalevo od křivky.
- *Obsah plochy vymezené grafy funkcí* f a g v intervalu $[a, b]$ vypočteme pomocí určitého integrálu
$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx.$$
- *Délka grafu funkce* f pro $x\in[a,b]$:
$$l=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$
- *Délka křivky* zadané parametricky $x=\varphi(t)$ a $y=\psi(t)$ pro $t\in[\alpha,\beta]$:
$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$
- *Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací podgrafu spojité nezáporné funkce f, $x\in[a,b]$ kolem osy x:
$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$
- *Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací podgrafu spojité nezáporné funkce f, $x\in[a,b]$, $a>0$, kolem osy y
$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx.$$
- *Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametricky $x=\varphi(t)$ a $y=\psi(t)$ pro $t\in[\alpha,\beta]$, $\varphi(t)\geq 0$, kolem osy x:
$$V_x=\pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\cdot|\varphi'(t)|\,dt.$$
- *Objem rotačního tělesa*, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametricky $x=\varphi(t)$ a $y=\psi(t)$ pro $t\in[\alpha,\beta]$, $\varphi(t)\geq 0$, kolem osy y:
$$V_y=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi(t)\,|\varphi'(t)|\,dt.$$
- *Obsah pláště rotačního tělesa*, které vznikne rotací podgrafu spojitě diferencovatelné nezáporné funkce f, $x\in[a,b]$ kolem osy x:
$$Q_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

- *Obsah pláště rotačního tělesa*, které vznikne rotací plochy vymezené křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) \geq 0$, kolem osy x:

$$Q_x = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Fyzikální aplikace

Funkce $s(t)$ udává *délkovou hustotu* v bodě $[\varphi(t), \psi(t)]$ pro křivku zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom M vyjadřuje *hmotnost křivky* a

$$\left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right]$$

jsou souřadnice jejího *těžiště*, kde S_x a S_y jsou tzv. *statické momenty* křivky vzhledem k ose x, resp. y. Přičemž platí

$$M = \int_\alpha^\beta s(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt,$$

$$S_x = \int_\alpha^\beta s(t)\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt,$$

$$S_y = \int_\alpha^\beta s(t)\varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Nechť nyní funkce $s(x)$ udává *délkovou hustotu* v bodě $[x, f(x)]$ pro křivku grafem funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$. Potom platí

$$M = \int_a^b s(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx,$$

$$S_x = \int_a^b s(x)f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx,$$

$$S_y = \int_a^b xs(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Funkce $S(t)$ udává *hustotu* obrazce vymezeného křivkou zadanou parametricky $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom M vyjadřuje jeho *hmotnost* a

$$\left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right]$$

jsou souřadnice jeho *těžiště*. Přičemž platí

$$M = \int_\alpha^\beta S(t)\psi(t)\varphi'(t)\,dt,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta S(t)\psi^2(t)\varphi'(t)\,dt,$$

$$S_y = \int_\alpha^\beta S(t)\psi(t)\varphi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Nechť nyní funkce $S(t)$ udává *hustotu* obrazce vymezeného křivkou určenou grafem funkce $f(x)$, $x \in [a, b]$, a osou x. Potom M vyjadřuje jeho *hmotnost* a

$$\left[\frac{S_y}{M}, \frac{S_x}{M}\right]$$

jsou souřadnice jeho *těžiště*. Přičemž platí

$$M = \int_a^b S(x)f(x)\,dx,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\int_a^b S(x)f^2(x)\,dx,$$

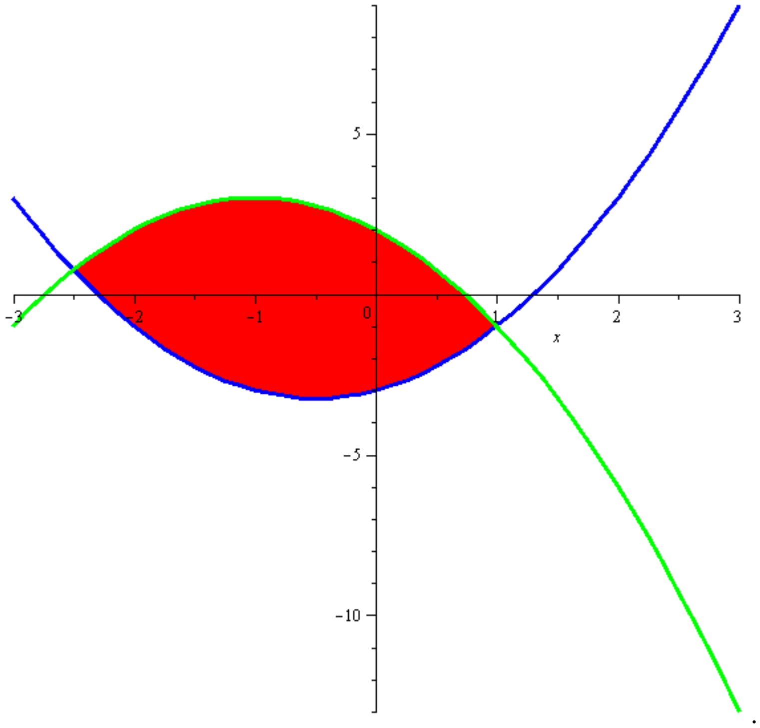
$$S_y = \int_a^b xS(x)f(x)\,dx.$$

(436) Určete obsah plochy vymezené grafy funkcí $f(x) = x^2 + x - 3$ a $g(x) = -x^2 - 2x + 2$.

Řešení:

Nejdříve musíme určit průsečík obou funkcí, tj. vyřešit rovnici $f(x) = g(x)$, tzn. že

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{5}{2} \text{ a } x_2 = 1.$$



Navíc, v intervalu $[-\frac{5}{2}, 1]$ platí $g(x) > f(x)$, proto hledaný obsah vypočteme s pomocí následujícího integrálu

$$S = \int_{-\frac{5}{2}}^{1} \left[(-x^2 - 2x + 2) - (x^2 + x - 3)\right] \, dx = \int_{-\frac{5}{2}}^{1} \left(-2x^2 - 3x + 5\right) \, dx =$$

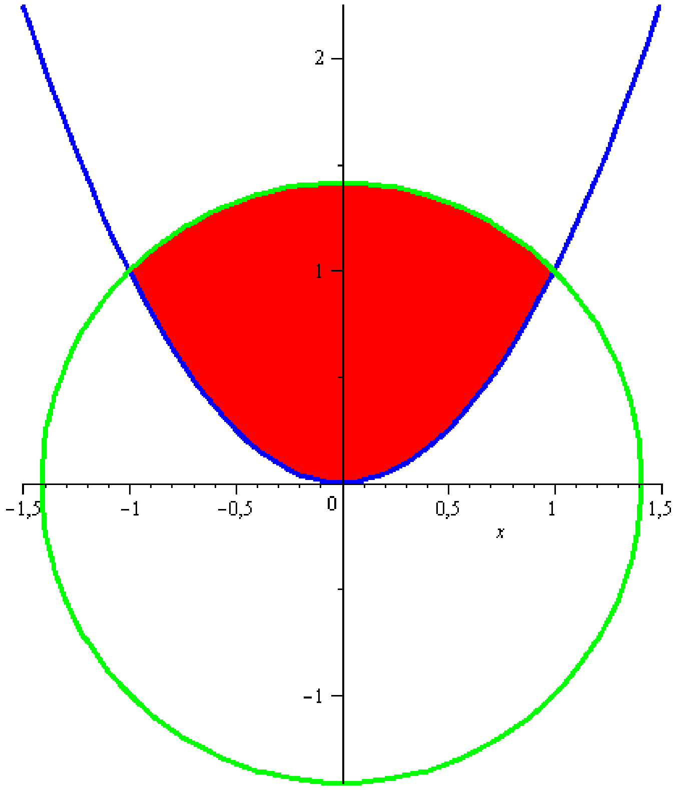
$$= \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x\right]_{-\frac{5}{2}}^{1} = -\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 5 - \left(\frac{250}{54} - \frac{75}{8} - \frac{25}{2}\right) = \frac{343}{24}.$$

(437) Určete obsah plochy ohraničené křivkami $x^2 + y^2 = 2$ a $y = x^2$.

Řešení:

Nejdříve musíme určit průsečík obou funkcí, tj.

$$y + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2 \text{ a } y_2 = 1.$$



Vzhledem k podmínce $y = x^2$ je pro nás zajímavá pouze hodnota y_2. Potom $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Navíc, na intervalu $[-1, 1]$ platí $\sqrt{2 - x^2} > x^2$, proto hledaný obsah dostaneme pomocí integrálu

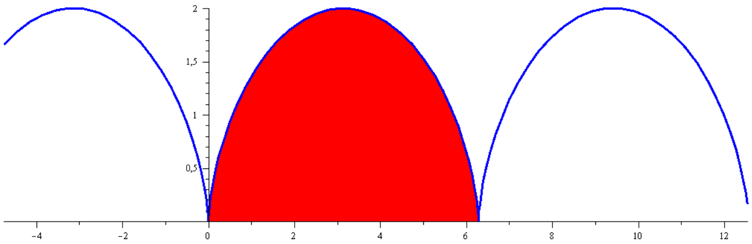
$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{2 - x^2} - x^2\right) dx = 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{2 - x^2} + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Při výpočtu jsme využili následující integrál

$$\int \sqrt{2 - x^2}\, dx \left| \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{2}} = \sin t \\ \frac{dx}{\sqrt{2}} = \cos t\, dt \end{array} \right| = \int \sqrt{2 - 2\sin^2 t}\, \sqrt{2}\cos t\, dt =$$
$$= \sqrt{2}\int \sqrt{1 - \sin^2 t}\, \sqrt{2}\cos t\, dt = 2\int \cos^2 t\, dt \;\left| \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \right| =$$
$$= 2\int \left(\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\right) dt = \int (\cos 2t + 1)\, dt = \frac{1}{2}\sin 2t + t + C =$$
$$= \sin t \cos t + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C =$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{2 - x^2} + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

(438) Určete obsah oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení:



Dosazením do vzorce pro obsah plochy mezi parametricky zadanými křivkami obdržíme

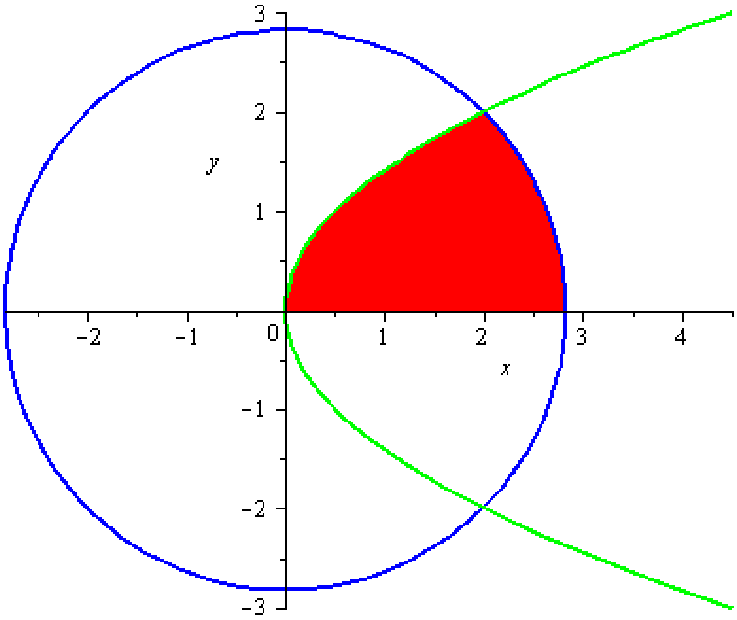
$$S = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt \;\Big|\, \cos^2 t = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2t \,\Big| =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi.$$

(439) Určete, v jakém poměru dělí křivka $P: y^2 = 2x$ plochu kruhu $K: x^2 + y^2 = 8$.

Řešení:

Zadání je znázorněno na následujícím obrázku.



.

Z obrázku je zřejmé, že ve stejném poměru, jako dělí parabola kuh, dělí horní větev paraboly $y = \sqrt{2x}$ horní půlkruh $y = \sqrt{8 - x^2}$. Pro výpočet budeme potřebovat souřadnice průsečíku horní větve paraboly a horního půlkruhu. Poznamenejme, že nás zajímá pouze průsečík v I. kvadrantu, což nám umožní volnější úpravy.

$$
\begin{aligned}
y &= y, \\
\sqrt{2x} &= \sqrt{8 - x^2}, \\
2x &= 8 - x^2, \\
x^2 + 2x - 8 &= 0, \\
x &= 2.
\end{aligned}
$$

Průsečík má tedy souřadnice $[2,2]$. Nyní spočítáme obsah červeně vyznačené plochy.

$$S = \int_0^2 \sqrt{2x}\,dx + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{8}{3} + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,dx \left| \begin{array}{c} x = \sqrt{8}\sin t \\ dx = \sqrt{8}\cos t\,dt \\ \sqrt{8} \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} = \\ 2 \rightsquigarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \frac{8}{3} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8-8\sin^2 t}\sqrt{8}\cos t\,dt =$$

$$= \frac{8}{3} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^2 t\,dt = \frac{8}{3} + 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{8}{3} + 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos 2t\,dt = \frac{8}{3} + 4\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{8}{3} + 4\left(\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} + \pi.$$

Z rovnice kruhu vidíme, že jde o kruh o poloměru $\sqrt{8}$. Protože červená plocha má obsah $\frac{2}{3}+\pi$, zbytek horního půlkruhu má obsah $4\pi - \left(\frac{2}{3}+\pi\right) = 3\pi - \frac{2}{3}$. Hledaný poměr je tedy

$$\left(3\pi - \frac{2}{3}\right) : \left(\pi + \frac{2}{3}\right),$$

neboli

$$(9\pi - 2) : (3\pi + 2).$$

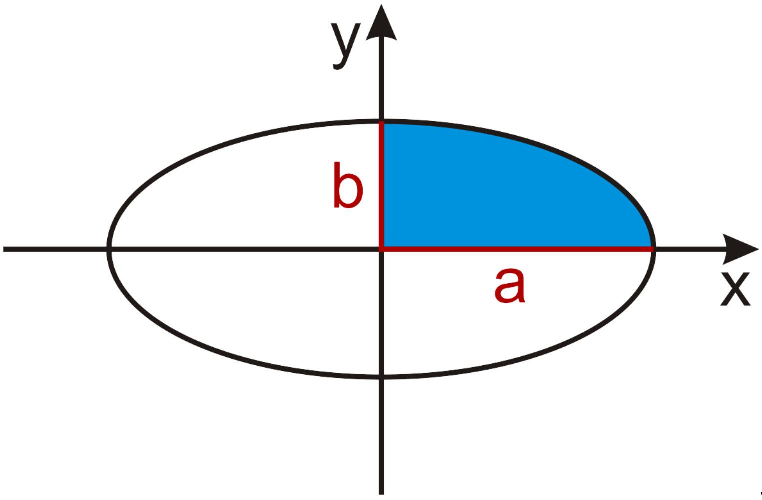
(440) Odvoďte vzorec pro výpočet plochy elipsy s poloosami a a b.

Řešení:

Obecná rovnice zadané elipsy je tvaru

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tato rovnice zadává implicitně funkci horní a dolní půlelipsy. Příklad vyřešíme tak, že si z rovnice elipsy explicitně vyjádříme funkci horní půlelipsy a pomocí ní pak spočítáme obsah čtvrtiny elipsy, která se nachází v I. kvadrantu.



Horní půlelipsa je dána funkcí

$$f: y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Interval, na kterém tato funkce zadává čtvrtelipsu v I. kvadrantu je $x \in [0, a]$. Můžeme tedy počítat

$$\frac{S}{4} = \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx \left| \begin{array}{c} \frac{x}{a} = \sin t \\ dx = a\cos t\,dt \\ a \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \\ 0 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{4}.$$

Vzorec pro obsah elipsy s poloosami a a b je tedy

$$S = \pi ab.$$

(441) Určete délku grafu funkce $f(x) = \ln x$ pro $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$.

Řešení:

Dosazením do vzorce dostaneme

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx \left| \begin{array}{c} t^2 = x^2 + 1 \\ 2t\,dt = 2x\,dx \\ \sqrt{3} \rightsquigarrow 2 \\ \sqrt{15} \rightsquigarrow 4 \end{array} \right| =$$

$$= \int_2^4 \frac{\sqrt{t^2}}{t^2-1}\,t\,dt = \int_2^4 \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = \int_2^4 \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt = \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= \int_2^4 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right)dt = \left[t + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1|\right]_2^4 =$$

$$= 4 + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5 - 2 - \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\ln 3 = 2 + \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5.$$

(442) Určete délku oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení:

Aplikací odpovídajícího vzorce obdržíme

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + (1 - \cos t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt \;\left|\, 1 - \cos t = 2\sin^2 \tfrac{t}{2} \,\right| =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = \left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8.$$

(443) Určete délku oblouku řetězovky $f(x) = a\cosh\frac{x}{a}$, $I = [-1, 1]$.

Řešení:

Připomeňme, že platí

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2\tfrac{x}{a}}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\cosh^2\tfrac{x}{a}}\,dx \;\Big|\; \text{cosh je všude kladný} \;\Big|\; =$$

$$= \int_{-1}^{1} \cosh\tfrac{x}{a}\,dx = \left[a\sinh\tfrac{x}{a}\right]_{-1}^{1} = a\left(\sinh\tfrac{1}{a} - \sinh\tfrac{-1}{a}\right) =$$

$$= a(e^{\frac{1}{a}} - e^{-\frac{1}{a}}).$$

(444) Vypočtěte délku oblouku křivky $f(x) = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ pro $x \in [1, 2]$.

Řešení:

Nejdříve vypočteme a upravíme výrazy potřebné pro výpočet integrálu, tj.

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{\frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{(e^x+1)^2(e^x-1)^2}} = \frac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1}.$$

Proto můžeme spočítat

$$l = \int_2^1 \frac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dt = \int_2^1 \left(\frac{1}{e^{2x}-1} + \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\right) dx = \left[-x + \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right|\right]_1^2 =$$

$$= \left(-2 + \ln\left(e^4-1\right) + 1 - \ln\left(e^2-1\right)\right) = -1 + \ln\frac{\left(e^2-1\right)\left(e^2+1\right)}{e^2-1} = \ln\left(e^2+1\right) - 1 = \ln\frac{e^2+1}{e},$$

přičemž jsem využili následující dva integrály

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-1} \left| \begin{array}{c} t = 2x \\ dt = 2\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{e^t-1} = \frac{1}{2}\int \frac{e^t}{e^{2t}-e^t}\,dt \left| \begin{array}{c} e^t = u \\ e^t\,dt = du \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-u} = \frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{1+u}\right) du = -\frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2}\ln|u-1| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\ln\left|e^t-1\right| + C = -x + \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right| + C;$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx \left| \begin{array}{c} t = e^{2x} \\ dt = 2e^{2x}\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} = \frac{1}{2}\ln|t-1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right| + C.$$

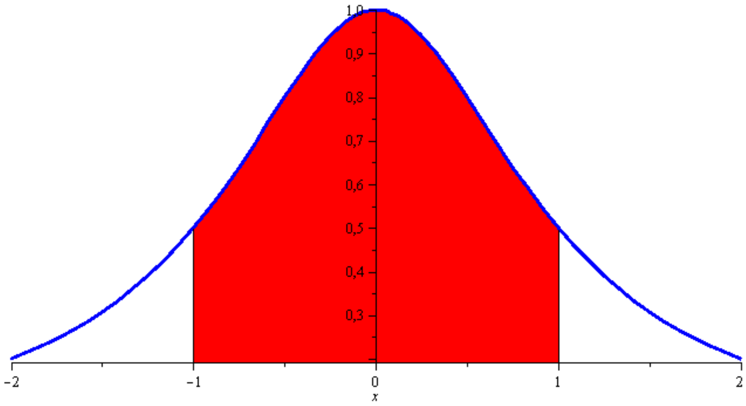
(445) Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin 3x$, $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}]e$, kolem osy x.

Řešení:

$$\begin{aligned}
V_x &= \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{6}} \left(1 + \frac{1}{2}\sin 3x\right)^2 dx = \\
&= \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{6}} \left(1 + \sin 3x + \frac{1}{4}\sin^2 3x\right) dx \ \Big|\ \sin^2 3x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 6x)\ \Big| = \\
&= \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{6}} \left(1 + \sin 3x + \frac{1}{8}(1 - \cos 6x)\right) dx = \\
&= \pi \left[x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{48}\sin 6x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{6}} = \frac{33\pi^2}{16} - \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(446) Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$, kolem osy x.

Řešení:



Poněvadž funkce f je sudá, můžeme spočítat poloviční objem na intervalu $[0, 1]$. Proto

$$V_x = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx = 2\pi \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}(\pi + 2),$$

neboť

$$\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx = K_2(0, 1) = \frac{1}{2}K_1(0, 1) + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + C.$$

(447) Určete objem tělesa, které vznikne rotací prvního oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$, kolem osy x.

Řešení:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t)\, dt = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\, dt =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right)^3 dt =$$

$$= \pi \left[t - 3\sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = \pi\,(2\pi + 3\pi) = 5\pi^2,$$

neboť platí

$$\int \cos^2 t\, dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C;$$

$$\int \cos^3 t\, dt = \int \left(1 - \sin^2 t\right) \cos t\, dt \left| \begin{array}{c} u = \sin t \\ du = \cos t\, dt \end{array} \right| = \int \left(1 - u^2\right)\, du =$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + C = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + C.$$

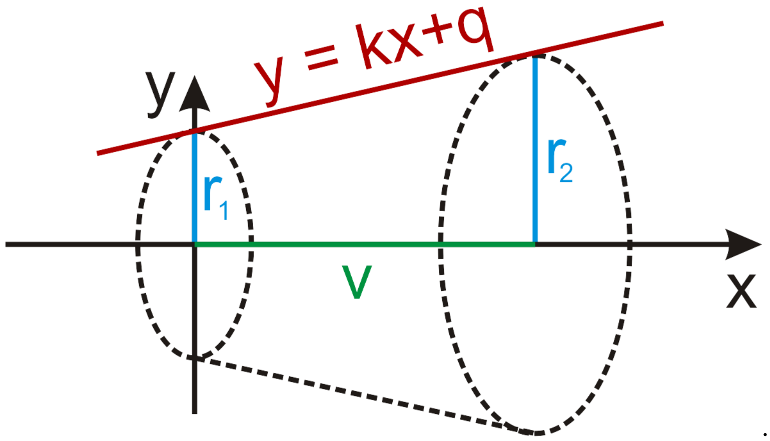
(448) Najděte vzorec pro výpočet objemu komolého kužele s poloměrem podstav r_1, r_2 a výškou v. Jaký je objem „nekomolého" kužele?

Řešení:

Komolý kužel lze vytvořit tak, že necháme rotovat lichoběžník s vrcholy

$$[0,0], \quad [v,0], \quad [v,r_2], \quad [0,r_1]$$

kolem osy x.



K výpočtu ovšem potřebujeme funkční předpis přímky dané body $[0,r_1]$ a $[v,r_2]$. Ten najdeme ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$. Dosazením bodu $[0,r_1]$ do rovnice přímky ihned dostaneme, že $q = r_1$. Pomocí této znalosti a dosazením bodu $[v,r_2]$ do rovnice přímky dostaneme směrnici $k = \frac{r_2-r_1}{v}$. Úsečka, jejíž rotací vznikne plášť studovaného komolého kužele je tedy dána předpisem

$$y = \frac{r_2-r_1}{v}x + r_1, \qquad x \in [0,v].$$

Nyní použijeme známý vzorec

$$V_x = \pi \int_0^v \left(\frac{r_2-r_1}{v}x + r_1\right)^2 dt.$$

Umocním závorky a jednoduchou integrací polynomu obdržíme výsledek

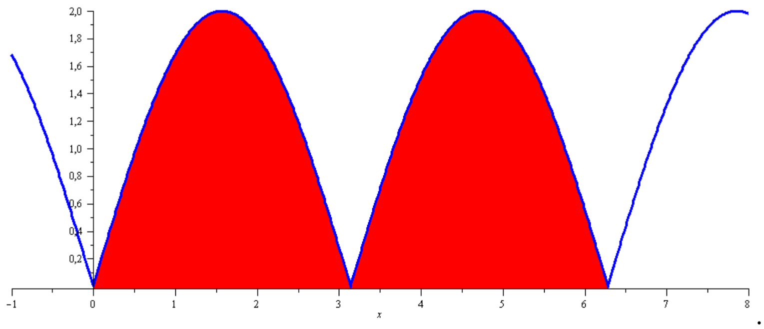
$$V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Obyčejný kužel je speciální případ kužele komolého s nulovým poloměrem jedné podstavy. Tedy položíme-li např. $r_1 = 0, r_2 = r$, získáme vzorec pro objem „obyčejného" kužele ve tvaru

$$V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$$

(449) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = 2|\sin x|$, $x \in [0, 2\pi]$, kolem osy x.

Řešení:



Oba oblouky cykloidy jsou stejné, můžeme se omezit pouze na interval $[0, \pi]$, proto

$$Q_x = 2 \cdot 2\pi \int_0^{2\pi} \left(2 \sin x \sqrt{1 + 4\cos^2 x}\right) dx \left| \begin{array}{c} 2\cos x = t \\ -2 \sin x \, dx = dt \\ 0 \rightsquigarrow 2 \\ \pi \rightsquigarrow -2 \end{array} \right| =$$

$$= -4\pi \int 2^{-2} \sqrt{1+t^2} \, dt = 8 \int_0^2 \sqrt{1+t^2} \, dt = 8\pi \left[\frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| + \frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} \right]_0^2 =$$

$$= 8 \left(\frac{1}{2} \ln \left(2 + \sqrt{5} \right) + \sqrt{5} \right) = 4\pi \ln(2 + \sqrt{5}) + 8\pi\sqrt{5}.$$

Při výpočtu jsme využili následující výpočet primitivní funkce

$$\int \sqrt{1+t^2} \, dt \left| \begin{array}{c} t = \sinh u \\ dt = \cosh u \, du \end{array} \right| = \int \cosh^2 u \, du \; \left| \cosh 2u = 2\cosh^2 u - 1 \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\cosh 2u + 1}{2} du = \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh 2u}{2} + u \right) + C =$$

$$= \frac{\sinh u \cosh u}{2} + \frac{u}{2} + C \; \left| \cosh^2 u - \sinh^2 = 1 \Rightarrow \cosh u = \sqrt{\sinh^2 u + 1} \right| =$$

$$= \frac{t\sqrt{t^2+1}}{2} + \frac{\operatorname{arcsinh} u}{2} + C.$$

Navíc přímým výpočtem ověříme, že

$$\operatorname{arcsinh} u = \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2+1} \right|.$$

Položme $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$, potom

$$\begin{aligned}
\ln\left|y + \sqrt{y^2+1}\right| &= \ln\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} + 1}\right| = \\
&= \ln\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}}\right| = \\
&= \ln\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}}\right| = \\
&= \ln\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right| = \ln|e^x| = x = \operatorname{arcsinh} y.
\end{aligned}$$

(450) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = 4+x$, $x \in [-4, 2]$, kolem osy x.

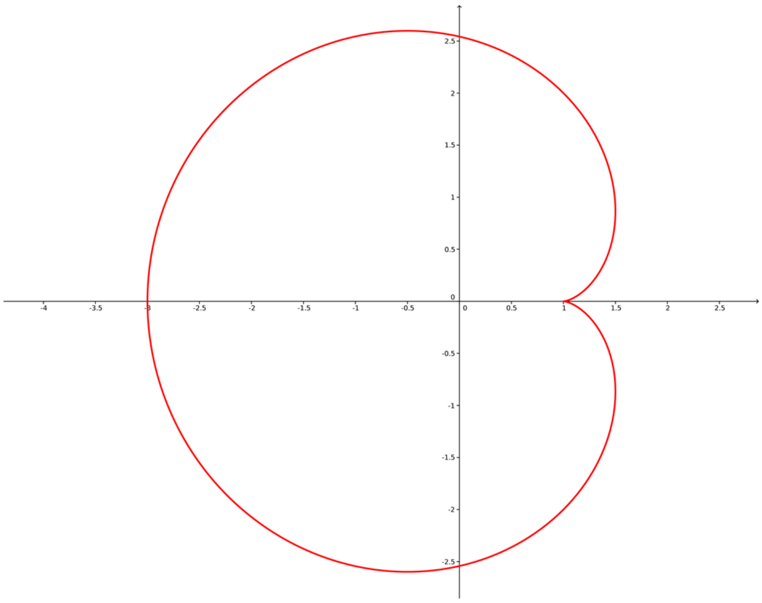
Řešení:

$$Q_x = 2\pi \int_{-4}^{2} (4+x)\sqrt{1+1}\, dx = 2\sqrt{2}\pi \int_{-4}^{2} (4+x)\ dx =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left[4x + \frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{2} = 2\sqrt{2}\pi \left(8 + \frac{4}{2}16 - \frac{16}{2}\right) = 36\sqrt{2}\pi.$$

(451) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací kardioidy (srdcovky) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $t \in [0, \pi]$, kolem osy x.

Řešení:



$$Q = 2\pi \int_0^\pi (2\sin t - \sin 2t)\sqrt{(-2\sin t + 2\sin 2t)^2 + (2\cos t - 2\cos 2t)^2}\,dt =$$

$$= 2\pi \int_0^\pi (2\sin t - \sin 2t)\sqrt{8}\sqrt{-\sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t}\,dt \left| \begin{array}{c} \sin 2t = 2\sin t\cos t \\ \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi \int_0^\pi (2\sin t - \sin 2t)\sqrt{8}\sqrt{1-\cos t}\,dt = 2\sqrt{8}\pi \int_0^\pi 2\sin t\,(1-\cos t)^{3/2}\,dt =$$

$$= 4\sqrt{8}\pi \int_0^\pi \sin t\,(1-\cos t)^{3/2}\,dt \left| \begin{array}{c} u = 1-\cos t \\ du = \sin t\,dt \\ 0 \rightsquigarrow 0 \\ \pi \rightsquigarrow 2 \end{array} \right| = 4\sqrt{8}\pi \int_0^2 2u^{3/2}\,du =$$

$$= 4\sqrt{8}\pi \left[\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right]_0^2 = 4\sqrt{8}\pi \left(\frac{2^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right) = 4\sqrt{8}\pi\frac{2}{5}4\sqrt{2} = \frac{128}{5}\pi.$$

(452) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací prvního oblouku cykoidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$, kolem osy x.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
Q_x &= 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\, dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{3/2}\, dt \ \left| \, 1-\cos t = \sin^2 \tfrac{t}{2} \, \right| = \\
&= 2\sqrt{2}\pi \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = 8\pi \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2}\, dt \ \left| \begin{array}{c} \cos \frac{t}{2} = u \\ \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2}\, dt = du \\ 0 \rightsquigarrow 1 \\ 2\pi \rightsquigarrow -1 \end{array} \right| = \\
&= -8\pi 2 \int_1^{-1} \left(1-u^2\right)\, du = 16\pi \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 16\pi \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

(453) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní půlkružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$.

Řešení:

Podle příslušných vzorců obdržíme

$$M = \sigma \int_0^\pi \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt = \sigma r \int_0^\pi dt = \pi\sigma r,$$

$$S_x = \sigma \int_0^\pi r\sin t\sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt = \sigma r^2 \int_0^\pi \sin t\,dt = \sigma r^2 \left[-\cos t\right]_0^\pi = 2\sigma r^2,$$

$$S_y = \sigma \int_0^\pi r\cos t\sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt = \sigma r^2 \int_0^\pi \cos t\,dt = \sigma r^2 \left[\sin t\right]_0^\pi = 0.$$

Proto souřadnice těžiště jsou

$$T = \left[\frac{0}{\pi\sigma r}, \frac{2\sigma r^2}{\pi\sigma r}\right] = \left[0, \frac{2r}{\pi}\right].$$

(454) Vypočtěte hmotnost a souřadnice těžiště křivky $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$, $x, y \geq 0$, kde délková hustota v bodě $s(x)$ v bodě $[x(t), y(t)]$ je přímo úměrná x-ové souřadnici bodu.

Řešení:

Podle příslušných vzorců obdržíme

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ka\cos^3 t\sqrt{\left(3a\cos^2 t\,(-\sin t)^2\right) + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ka\cos^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ka\cos^3 t\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,dt = \\
&= 3ka^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\sin t\,dt \left|\begin{array}{c} \cos t = u \\ -\sin t\,dt = du \\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 0 \\ 0 \rightsquigarrow 1 \end{array}\right| = -3ka^2\int_1^0 u^4\,du = \\
&= -3ka^2\left[\frac{u^5}{5}\right]_1^0 = -3ka^2\left(0 - \frac{1}{5}\right) = \frac{3ka^2}{5}, \\
S_x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3ka^3\cos^4 t\sin^4 t\,dt = 3ka^3\left[-\frac{1}{128}\sin 4t + \frac{3}{128}t + \frac{1}{1024}\sin 8t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= 3ka^3\frac{3}{128}\frac{\pi}{2} = 3ka^3\frac{3\pi}{256},
\end{aligned}
$$

kde jsme využili následující primitivní funkce

$$
\begin{aligned}
&\int \cos^2 t\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C, \\
&\int \cos^2 2t\,dt \left|\begin{array}{c} 2t = u \\ 3\,dt = du \end{array}\right| \frac{1}{2}\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right) + C = \frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C, \\
&\int \sin^4 t\cos^4 t\,dt \left|\ \cos 2t = 2\cos^2 t - 1\ \right| = \frac{1}{16}\int (1 - \cos 2t)^2\,(1\cos 2t)^2\,dt = \\
&\quad = \frac{1}{16}\int \left(1 - 2\cos^2 2t + \cos^4 2t\right)\,dt \left|\begin{array}{c} 2t = u \\ 3\,dt = du \end{array}\right| = \frac{1}{16}\left(t - t - \frac{\sin 4t}{4} + \frac{1}{2}\int \cos^4 u\,du\right) = \\
&\quad = -\frac{1}{64}\sin 4t + \frac{1}{32}\int \frac{1}{4}(1 + \cos 2u)^2\,du = -\frac{1}{64}\sin 4t + \frac{1}{128}\int \left(1 + 2\cos 2u + \cos^2 2u\right)\,du = \\
&\quad = -\frac{1}{64}\sin 4t + \frac{1}{128}u + \frac{1}{64}\frac{1}{2}\sin 2u + \frac{1}{128}\left(\frac{u}{2} + \frac{\sin 4u}{8}\right) + C = \\
&\quad = \frac{3}{128}t - \frac{1}{128}\sin 4t + \frac{1}{1028}\sin 8t + C.
\end{aligned}
$$

Dále platí

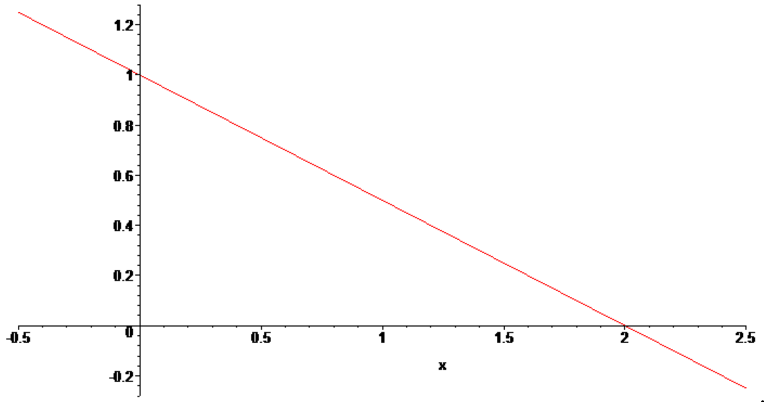
$$
S_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3ka^3\cos^7 t\sin t\,dt \left|\begin{array}{c} u = \cos t \\ du = -\sin t\,dt \\ 0 \rightsquigarrow 1 \\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 0 \end{array}\right| = -3ka^3\int_1^0 u^7\,du = -3ka^3\left[\frac{u^8}{8}\right]_1^0 = \frac{3ka^3}{8}.
$$

Proto těžiště má souřadnice

$$T = \left[\frac{3ka^3}{8}\,\frac{5}{3ka^2}, 3ka^3\,\frac{3\pi}{256}\,\frac{5}{3ka^2}\right] = \left[\frac{5a}{8}, \frac{15\pi a}{256}\right].$$

(455) Vypočtěte souřadnice těžiště trojúhelníku s vrcholy $O = [0, 0]$, $A = [0, 1]$ a $B = [2, 0]$.

Řešení:



$$M = \sigma \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) \, dx = \sigma \left[x - \frac{x^2}{4}\right] = \sigma\,(2 - 1) = \sigma,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\sigma \int_0^2 \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\sigma \left(2 - 2 + \frac{8}{12}\right) = \frac{\sigma}{3},$$

$$S_y = \sigma \int_0^2 x \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \sigma \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \sigma \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \sigma \left(2 - \frac{8}{6}\right) = \frac{2}{3}\sigma.$$

Souřadnice těžiště tedy jsou

$$T = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

(456) Vypočtěte hmotnost a souřadnice těžiště rovinné homogenní plochy omezené křivkou $y = 2\sin 3x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ a osou x.

<u>**Řešení:**</u>

$$M = \sigma \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin 3x \, dx = \frac{2}{3}\sigma \left[-\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3}\sigma,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^2 3x \, dx = 2\sigma \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12}\right] = \frac{\sigma\pi}{3},$$

$$S_y = \sigma \int_0^{\frac{\pi}{3}} x2\sin 3x \, dx = \frac{2}{9}\sigma \left[\sin 3x - 3x\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sigma\pi}{9},$$

kde jsem využili

$$\int \sin^2 3x \, dx \left| \begin{array}{c} t = 3x \\ dt = 3\, dx \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \sin^2 t \, dt = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= \frac{t}{6} - \frac{\sin 2t}{12} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C,$$

$$\int x\sin 3x \, dx \left| \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v = -\frac{1}{3}\cos 3x & v' = \sin 3x \end{array} \right| = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x \, dx =$$

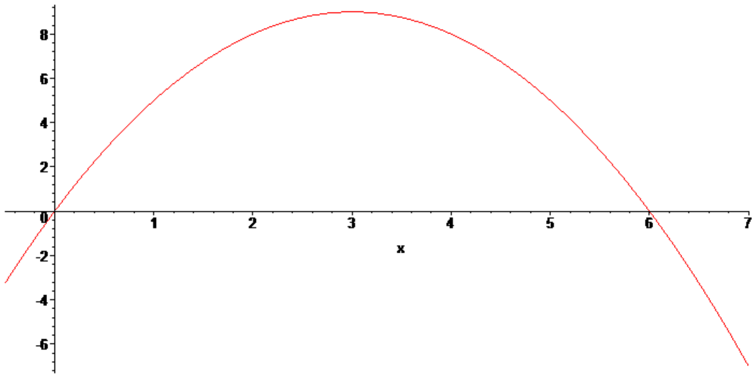
$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C = \frac{1}{9}\left(\sin 3x - 3x\cos 3x\right) + C.$$

Proto těžiště souřadnice jsou dány

$$T = \left[\frac{2\sigma\pi}{9}\frac{3}{4\sigma}, \frac{\sigma\pi}{3}\frac{3}{4\sigma}\right] = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right].$$

(457) Vypočtěte souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkou danou předpisem $y = 6x - x^2$ a osou x.

Řešení:



$$M = \sigma \int_0^6 \left(6x - x^2\right)\, dx = \sigma \left[3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = \sigma\,(108 - 2 \cdot 36) = 36\sigma,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_0^6 \left(6x - x^2\right)^2 dx = \frac{1}{2}\sigma \int_0^6 \left(36x^2 - 12x^3 + x^4\right)\, dx = \frac{1}{2}\sigma \left[\frac{36x^3}{3} - \frac{12x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^6 = \frac{648}{5}\sigma,$$

$$S_y = \sigma \int_0^6 x\left(6x - x^2\right)\, dx = \sigma \int_0^6 \left(6x^2 - x^3\right)\, dx = \sigma \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^6 = 108\sigma.$$

Těžiště má tedy souřadnice

$$T = \left[3, \frac{18}{5}\right].$$

(458) Vypočtěte souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného cykloidou $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ a osou x.

<u>**Řešení:**</u>

$$M = \sigma \int_0^{2\pi} 3\,(1-\cos t)\, 3\,(1-\cos t)\ dt = 9\sigma \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\ dt \overset{\text{Př. (438)}}{=} 9\sigma 4\pi = 27\sigma\pi,$$

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_0^{2\pi} 9\,(1-\cos t)^2\, 3\,(1-\cos t)\ dt = \frac{27}{2}\sigma \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\ dt =$$

$$= \frac{27}{2}\sigma \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right)\ dt \overset{\text{Př. (447)}}{=}$$

$$\overset{\text{Př. (447)}}{=} \frac{27}{2}\sigma \left[t - 3\sin t + \frac{3}{2}\,(\cos t \cdot \sin t + t) - \sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{27}{2}\sigma\,(5\pi) = \frac{135}{2}\pi\sigma,$$

$$S_y = \sigma \int_0^{2\pi} 3(t - \sin t) 3\,(1-\cos t)\, 3\,(1-\cos t)\ dt =$$

$$= 27\sigma \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)(t - \sin t)\, dt =$$

$$= 27\sigma \int_0^{2\pi} \left(t - \sin t - 2t\cos t + 2\cos t \sin t + t\cos^2 t - \cos^2 t \sin t\right)\ dt =$$

$$= 27\sigma \left[\frac{t^2}{2} + \cos t - 2t\sin t - 2\cos t - \cos^2 t + \frac{t}{2}\,(\cos t \cdot \sin t + t) - \right.$$

$$\left. - \frac{t}{2}\left(-\frac{\cos^2 t}{2} + \frac{t^2}{2}\right) - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 27\sigma\left(2\pi^2 + 2\pi^2 + \frac{1}{4} - \pi^2 - \frac{1}{4}\right) = 27\sigma 3\pi^2,$$

k čemuž jsme v posledním integrálu využili

$$\int t\cos^2 t\, dt \left| \begin{matrix} u = t & u' = 1 \\ v \overset{\text{Př. (447)}}{=} \frac{1}{2}\,(\cos t \cdot \sin t + t) & v' = \cos^2 t \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\cos t \cdot \sin t + t) - \frac{1}{2}\int (\cos t \cdot \sin t + t)\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\cos t \cdot \sin t + t) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos^2 t}{2} - \frac{t^2}{2}\right) + C,$$

$$\int t\cos t\, dt \left| \begin{matrix} u = t & u' = 1 \\ v = \sin t & v' = \cos t \end{matrix} \right| = t\sin t - \int \sin t\, dt = t\sin t + \cos t + C,$$

$$\int \cos t \sin t\, dt \left| \begin{matrix} u = \cos t \\ du = -\sin t\, dt \end{matrix} \right| = -\int u\, du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{\cos^2 t}{2} + C,$$

$$\int \cos^2 t \sin t\, dt \left| \begin{matrix} u = \cos t \\ du = -\sin t dt \end{matrix} \right| = -\int u^2\, du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 t}{3}.$$

Proto souřadnice těžiště jsou dány

$$T = T = \left[\frac{27\sigma 3\pi^2}{27\sigma\pi}, \frac{135\pi\sigma}{2 \cdot 27\sigma\pi}\right] = \left[3\pi, \frac{5}{2}\right].$$