II. 4. Určitý a nevlastní integrál

Určitý integrál

Věta 32 (Newtonova–Leibnizova formule). *Nechť* f *je integrovatelná funkce na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a nechť* F *je její primitivní funkce. Pak platí, že*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Základní vzorce pro integrování ($k \in \mathbb{R}$):

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Věta 33 (Metoda per-partes pro určitý integrál). *Nechť funkce* u *a* v *mají na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *derivace* u' *a* v'*, které jsou na tomto intervalu integrovatelné. Pak platí*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Věta 34 (Substituční metoda pro určitý integrál). *Nechť funkce* $f(x)$ *je spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$*. Nechť funkce* φ *má derivaci* φ' *na intervalu* $\langle \alpha, \beta\rangle$*, která je na tomto intervalu integrovatelná. Dále nechť platí* $a \le \varphi \le b$ *pro* $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$ *(tzn., že funkce* $\varphi(x)$ *zobrazuje interval* $\langle \alpha, \beta\rangle$ *do intervalu* $\langle a, b\rangle$*). Potom platí (přesněji „z existence integrálu nalevo plyne existence integrálu napravo a jejich rovnost“)*

$$\int_\alpha^\beta f\,[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt.$$

Nevlastní integrál

Definice 35. Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ se nazývá *nevlastní* pokud alespoň jedno z čísel a, b je rovno $\pm\infty$, nebo je funkce f neomezená na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ (tedy alespoň v jednom bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ má funkce f singulární bod – nemusí jít nutně o krajní bod a nebo b, ale singulární bod může ležet i uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$).

Definice 36. Nechť existuje $\lim_{c\to+\infty} F(c) = I$, $I \in \mathbb{R}$. Pak řekneme, že *nevlastní integrál* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *konverguje* a jeho hodnota je I. Tedy

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} F(c),$$

kde $F(c) := \int_a^c f(x)\,dx$. V opačném případě, tj. když $\lim_{c\to+\infty} F(c)$ je nevlastní nebo neexistuje, řekneme, že *nevlastní integrál* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverguje*.

(405) Vypočtěte

$$\int_1^2 x^2\,dx.$$

Řešení:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

(406) Vypočtěte

$$\int_0^1 x\,(x^2-1)^3\,dx.$$

Řešení:

$$\int_0^1 x\,(x^2-1)^3\,dx \left|\begin{array}{c} t = x^2-1 \\ dt = 2x\,dx \\ 0 \rightsquigarrow -1 \\ 1 \rightsquigarrow 0 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 t^3\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}.$$

(407) Vypočtěte

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x \, dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \sqrt{3} \\ \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2} \, dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} 1 \, dt - \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} \, dt =$$

$$= [t - \operatorname{arctg} t]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}.$$

(408) Vypočtěte
$$\int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^{2x}+3} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx.$$

Řešení:

Využijeme aditivity integrálu a pro přehlednost zadaný integrál rozdělíme na dvě části.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3}\, dx \left| \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x\, dx \\ 1 \rightsquigarrow e \\ 0 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^e \frac{1}{t^2+3}\, dt = \frac{1}{3}\int_1^e \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dt \left| \begin{array}{c} s = \frac{t}{\sqrt{3}} \\ ds = \frac{1}{\sqrt{3}}\, dt \\ e \rightsquigarrow \frac{e}{\sqrt{3}} \\ 1 \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{e}{\sqrt{3}}} \frac{1}{s^2+1}\, ds = \frac{\sqrt{3}}{3}[\operatorname{arctg} s]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{e}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{e\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = [\operatorname{tg} x]_0^1 = \operatorname{tg} 1.$$

Celkem tedy
$$\int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^{2x}+3} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{e\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg} 1.$$

(409) Vypočtěte

$$\int_a^b \operatorname{sgn} x \, dx, \quad a, b \in \mathbb{R}, a < 0, b > 0.$$

Řešení:

$$\int_a^b \operatorname{sgn} x \, dx = \int_a^0 (-1) \, dx + \int_0^b 1 \, dx = [-x]_a^0 + [x]_0^b = a + b.$$

(410) Vypočtěte

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x-3)^5}\,dx.$$

Řešení:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x-3)^5}\,dx \left|\begin{array}{c} t = x-3 \\ dt = dx \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ 0 \rightsquigarrow -3 \end{array}\right| =$$

$$= \int_{-3}^\infty \frac{1}{t^5}\,dt = -\frac{1}{4}[t^{-4}]_{-3}^\infty =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\lim_{a\to\infty} a^{-4} - (-3)^{-4}\right) = -\frac{1}{4}\left(0 - \frac{1}{3^4}\right) = \frac{1}{324}.$$

(411) Vypočtěte

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx \left| \begin{array}{c} t = x+2 \\ dt = dx \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ 0 \rightsquigarrow 2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2[\sqrt{t}]_2^{\infty} =$$

$$= 2\left(\lim_{a\to\infty} \sqrt{a} - \sqrt{2}\right) = 2(\infty - \sqrt{2}) = \infty.$$

(412) Vypočtěte
$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Řešení:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\sqrt{x} \\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ 1 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| =$$
$$= 2\int_1^{\infty} e^{-t}\,dt = 2[-e^{-t}]_1^{\infty} =$$
$$= -2\left(\lim_{t\to\infty} e^{-t} - e^{-1}\right) = \frac{2}{e}.$$

(413) Vypočtěte

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}.$$

Řešení:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = [\operatorname{arctg} x]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

(414) Vypočtěte

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}.$$

Řešení:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = \infty \quad \Rightarrow \text{ integrál diverguje.}$$

(415) Vypočtěte

$$\int_0^\infty \sin x \, dx.$$

Řešení:

$$\int_0^\infty \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\infty = -\lim_{x\to\infty} \cos x + \cos 0 \quad \text{limita neexistuje} \;\Rightarrow\; \text{integrál diverguje.}$$

(416) Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx.$$

Řešení:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx = [e^x]_{-\infty}^{0} = 1 - \lim_{x \to -\infty} e^x = 1.$$

(417) Rozhodněte o konvergenci následujícího integrálu vzhledem k číslu $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_1^\infty x^\alpha \, dx.$$

Řešení:

Buď $\alpha = -1$, potom

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx = [\ln x]_1^\infty = \infty.$$

Nyní uvažujme $\alpha \neq -1$, potom

$$\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^\infty = \frac{1}{\alpha+1}\left(\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1} - 1\right).$$

Pro $\alpha > -1$, tj. $\alpha + 1 > 0$, platí $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1} = \infty$. Dále pro $\alpha < -1$, tj. $\alpha + 1 < 0$, platí $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1} = 0$. To znamená, že

$$\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \begin{cases} \text{diverguje}, & \alpha \geq -1, \\ -\frac{1}{\alpha+1}, & \alpha < -1. \end{cases}$$

(418) Rozhodněte o konvergenci následujícího integrálu vzhledem k číslu $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\int_0^\infty e^{\alpha x}\, dx.$$

Řešení:

Buď $\alpha = 0$, potom
$$\int_1^\infty 1\, dx = [x]_0^\infty = \infty.$$
Nyní uvažujme $\alpha \neq 0$, potom
$$\int_0^\infty e^{\alpha x}\, dx = \left[\frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}\left(\lim_{x\to\infty} e^{\alpha x} - 1\right).$$
Pro $\alpha > 0$ platí $\lim_{x\to\infty} e^{\alpha x} = \infty$. Dále pro $\alpha < 0$ platí $\lim_{x\to\infty} e^{\alpha x} = 0$. To znamená, že
$$\int_0^\infty e^{\alpha x}\, dx = \begin{cases} \text{diverguje}, & \alpha \geq 0, \\ -\frac{1}{\alpha}, & \alpha < 0. \end{cases}$$

(419) Rozhodněte o konvergenci následujícího integrálu vzhledem k číslu $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ e \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \int_1^\infty t^\alpha \overset{\text{Př. (417)}}{=} \begin{cases} \text{diverguje}, & \alpha \geq -1, \\ -\frac{1}{1+\alpha}, & \alpha < 1. \end{cases}$$

(420) Vypočtěte

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2}.$$

Řešení:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\,(x^2+1)} = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} - [\operatorname{arctg} x]_1^{\infty} = 0 + 1 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(421) Vypočtěte

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx \left| \begin{array}{cc} u = x^2 & u' = 2x \\ v = -e^{-x} & v' = e^{-x} \end{array} \right| = \\
&= \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, dx \left| \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v = -e^{-x} & v' = e^{-x} \end{array} \right| = \\
&= -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} - 2\,[x\, e^{-x}]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \\
&= 0 - 2\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} - 2\,[e^{-x}]_0^{\infty} = 2\left(\lim_{x\to\infty} e^{-x} - 1\right) = 2.
\end{aligned}$$

(422) Vypočtěte

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx.$$

Řešení:

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx \left| \begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t \\ \frac{1}{1+x^2}\,dx = dt \\ \infty \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \\ 1 \rightsquigarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}.$$

(423) Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Řešení:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx \left| \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x\, dx \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ -\infty \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = [\operatorname{arctg} t]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

(424) Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx.$$

Řešení:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx \left| \begin{array}{c} t = x^3 \\ dt = 3x^2\,dx \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ -\infty \rightsquigarrow -\infty \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{3}\,[\operatorname{arctg} t]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{3}.$$

(425) Vypočtěte

$$\int_0^2 \frac{dx}{x}.$$

Řešení:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x} = [\ln x]_0^2 = \ln 2 - \lim_{x \to 0} \ln x = \infty \quad \Rightarrow \text{ integrál diverguje.}$$

(426) Rozhodněte o konvergenci následujícího integrálu vzhledem k číslu $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 x^\alpha dx.$$

Řešení:

Rozdělme problém na tři případy.

(i) $\alpha \geq 0$

V tomto případě není integrál nevlastní a můžeme snadno spočítat, že

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

(ii) $\alpha = -1$

Počítejme

$$\int_0^1 x^{-1} dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \lim_{x \to 0^+} \ln x = 0 - (-\infty) = \infty.$$

(iii) $\alpha < 0, \alpha \neq -1$

Počítejme

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1} \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha > -1, \\ \infty, & \alpha < -1. \end{cases}$$

Celkem tedy

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha > -1, \\ \infty, & \alpha \leq -1. \end{cases}$$

(427) Vypočtěte

$$\int_{-1}^{1} \ln|x| \, dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int_{-1}^{1} \ln|x| \, dx = \int_{-1}^{0} \ln(-x) \, dx + \int_{0}^{1} \ln x \, dx = 2 \int_{0}^{1} \ln x \, dx$$

$$\left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = 2 \left([x \ln x]_0^1 - \int_0^1 1 dx \right) = 2 \left([x \ln x]_0^1 - [x]_0^1 \right) =$$

$$= 2 \left(1 \ln 1 - \lim_{a \to 0} (a \ln a) - 1 + 0 \right) = -2 - \lim_{a \to 0} (a \ln a) \; \left| 0 \cdot \infty \right| \; =$$

$$= -2 - \lim_{a \to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{a}} \; \left| \tfrac{\infty}{\infty} \right| \; \overset{\text{l'H.p.}}{=} -2 - \lim_{a \to 0} (-a) = -2.$$

(428) Vypočtěte

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Řešení:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \left| \begin{array}{c} 1-x^2 = t \\ -2x\, dx = dt \\ 1 \rightsquigarrow 0 \\ 0 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \int_1^0 \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{t}}\, dt = -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{-1/2}\, dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]_1^0 = -\left[\sqrt{t}\right]_1^0 = 1.$$

(429) Vypočtěte

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Řešení:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

(430) Vypočtěte

$$\int_0^2 \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}\,dx.$$

Řešení:

$$\int_0^2 \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}\,dx = \int_0^2 \left(x + \frac{1}{x-1}\right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x-1}\right) dx + \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x-1}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x-1|\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x-1|\right]_1^2 =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x-1|\right) + 0 + \frac{4}{2} + 0 - \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x-1|\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + (-\infty) + 2 - \frac{1}{2} - (-\infty) \quad \Rightarrow \text{ integrál diverguje.}$$

(431) Vypočtěte

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Řešení:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{0}^{1} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} - 1 - 1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty + \infty - 2 \quad \Rightarrow \text{ integrál diverguje.}$$

Rozdělení na dva integrály je nutné, neboť jinak

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2,$$

tedy záporný výsledek pro integrál z kladné funkce, což je spor.

(432) Vypočtěte

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} \left| \begin{array}{c} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}\,dx \\ 1 \rightsquigarrow 0 \\ 2 \rightsquigarrow \ln 2 \end{array} \right| = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{t} = [\ln t]_0^{\ln 2} =$$

$$= \ln(\ln 2) - \lim_{t\to 0} \ln t = \ln(\ln 2) + \infty \quad \Rightarrow \text{ integrál diverguje.}$$

(433) Vypočtěte

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx.$$

Řešení:

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}\,dt \\ 0 \rightsquigarrow -\infty \\ -1 \rightsquigarrow -1 \end{array} \right| = -\int_{-1}^{-\infty} t\,e^t\,dt \left| \begin{array}{cc} u = t & u' = 1 \\ v = e^t & v' = e^t \end{array} \right| = -\left[t\,e^t\right]_{-1}^{-\infty} + \int_{-1}^{-\infty} e^t\,dt =$$

$$= -\left[t\,e^t\right]_{-1}^{-\infty} + \left[e^t\right]_{-1}^{-\infty} = -\lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} - \frac{1}{e} + \lim_{t\to-\infty} e^t - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}.$$

(434) Vypočtěte

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Řešení:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \left| \begin{array}{c} t = x + \sqrt{x^2 - a^2} \\ dt = \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) dx \\ a \rightsquigarrow a \\ b \rightsquigarrow b + \sqrt{b^2 - a^2} \end{array} \right| = \int_a^{b+\sqrt{b^2-a^2}} \frac{1}{t} \, dt =$$

$$= \left[\ln |t| \right]_a^{b+\sqrt{b^2-a^2}} = \ln \left(b + \sqrt{b^2 - a^2} \right) - \ln a = \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}.$$

(435) Vypočtěte

$$\int_0^\infty x^{2n+1}\, e^{-x^2}\, dx, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

<u>Řešení:</u>

$$\int_0^\infty x^{2n+1}\, e^{-x^2}\, dx \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2x\, dx \\ 0 \rightsquigarrow 0 \\ \infty \rightsquigarrow \infty \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^n\, e^{-t}\, dt \left| \begin{array}{cc} u = t^n & u' = nt^{n-1} \\ v = -e^{-t} & v' = e^t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[-t^n\, e^{-t} \right]_0^\infty + n \int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-t}\, dt \right) =$$

$$= \frac{n}{2} \int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-t}\, dt \left| \begin{array}{cc} u = t^{n-1} & u' = (n-1)t^{n-2} \\ v = -e^{-t} & v' = e^t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{n}{2} \left(\left[-t^{n-1}\, e^{-t} \right]_0^\infty + (n-1) \int_0^\infty t^{n-2}\, e^{-t}\, dt \right) = \cdots =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots 2}{2} \int_0^\infty t\, e^{-t}\, dt \left| \begin{array}{cc} u = t & u' = 1 \\ v = -e^{-t} & v' = e^t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{n!}{2} \left(\left[-t\, e^{-t} \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\, dt \right) = \frac{n!}{2} \left[-e^{-t} \right]_0^\infty = \frac{n!}{2} (-0 + 1) = \frac{n!}{2}.$$