

Složitost

13.1 Rozhodněte, které z následujících vztahů platí. Odpovědi zdůvodněte.

- a) $2n \in \mathcal{O}(n)$
- b) $n^2 \in \mathcal{O}(n)$
- c) $n \log_2 n \in \mathcal{O}(n^2)$
- d) $n \log_2 n \in \mathcal{O}(n)$
- e) $3^n \in 2^{\mathcal{O}(n)}$
- f) $3n^2 + 4n + 17 \in \mathcal{O}(n^2 - n + 1)$
- g) $(2n)! \in \mathcal{O}(n!^2)$

13.2 Rozhodněte, zda platí následující vztah. Odpověď zdůvodněte.

$$g(n) \notin \mathcal{O}(f(n)) \implies f(n) \in o(g(n))$$

13.3 Dokažte, že třída P je uzavřená na operace sjednocení, komplement a zřetězení. Rozhodněte, na které z těchto operací je uzavřena třída NP. Odpověď zdůvodněte.

13.4 Třída coNP je definována jako $\text{coNP} = \{co-L \mid L \in \text{NP}\}$. Rozhodněte, které z následujících tvrzení platí. Odpovědi zdůvodněte.

- a) $\text{coNP} = co\text{-NP}$
- b) $L_1, L_2 \in \text{coNP} \implies L_1 \cap L_2 \in \text{coNP}$
- c) $L_1 \in \text{NP}, L_2 \subsetneq L_1, L_2 \in \text{coNP} \implies L_1 \setminus L_2 \in \text{NP}$

13.5 Rozhodněte, zda jsou následující formule splnitelné. U splnitelných formulí popište nějaké splňující přiřazení.

- a) $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$
- b) $(x \vee \neg y) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)$
- c) $(x \vee \neg y) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)$
- d) $(u \vee \neg v \vee \neg w) \wedge (w \vee \neg y \vee z) \wedge (w \vee \neg z \vee x) \wedge (x \vee y \vee z)$
- e) $(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$

13.6 Dokažte, že následující problémy jsou NP-úplné.

- a) Problém Hamiltonovské cesty v grafu:
 $HAMPATH = \{(G, s, t) \mid G \text{ je orientovaný graf obsahující Hamiltonovskou cestu z } s \text{ do } t\}$
- b) Problém k -kliky (k -klika je úplný podgraf s k vrcholy):
 $CLIQUE = \{(G, k) \mid G \text{ je neorientovaný graf s } k\text{-klikou}\}$
- c) Problém podgrafového izomorfismu (Subgraph Isomorphism, SGI):
 $SGI = \{(H, G) \mid H = (V, E), G = (U, F) \text{ jsou neorientované grafy takové, že existuje injektivní zobrazení } f : V \rightarrow U \text{ splňující } (u, u') \in E \implies (f(u), f(u')) \in F\}$

13.7 Určete vztahy inkluze/rovnost mezi následujícími dvojicemi složitostních tříd. Svoje tvrzení zdůvodněte.

- a) $\text{TIME}(n^2)$ a $\text{TIME}(n^3)$
- b) $\text{SPACE}(2n^2)$ a $\text{SPACE}(100n^2)$
- c) $\text{SPACE}(n^2)$ a $\text{TIME}(n^2)$
- d) $\text{NSPACE}(n^2)$ a $\text{SPACE}(n^5)$
- e) P a $\text{TIME}(2^n)$

13.8 Zkonstruuje jednopáskový deterministický Turingův stroj, který rozhoduje jazyk $L = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$ v čase $\mathcal{O}(n \log n)$. Není nutné uvádět formální popis stroje.