2 Klasická indexní čísla v prostředí axiomatického přístupu

V této části uvedeme nejdůležitější základní, "klasická" indexní čísla tak, jak byla postupně vyvíjena (navrhována) od poslední čtvrtiny 19.století do zhruba poloviny století dvacátého. Některá z nich jsou přitom aktivně praxí užívána i v současné době. Jak čtenář sezná, tato klasická indexní čísla jsou založena na - prostém nebo váženém - průměrování cenových popř. množstevních poměrů, přičemž volba vah hraje v řadě případů velmi důležitou úlohu z hlediska vlastností, které to-které indexní číslo má. Právě hledáním vlastností, které by mělo "kvalitní" či "ideální" indexní číslo splňovat, se zabývala řada ekonomů popř. statistiků téměř souběžně s tím, jak je objevovaly návrhy jednotlivých matematických konstruktů. Největším přínosem na tomto poli byly v prvé čtvrtině 20.století práce amerických ekonomů Irvinga Fishera a C.M.Walshe (a o něco později norského ekonoma Ragnara Frische), kteří se jako první pokusili o vytvoření určité ucelené soustavy podmínek (axiomů, testů), na základě kterých by bylo možné objektivně posuzovat "kvalitu" jednotlivých návrhů indexních čísel. Přestože se ekonomická teorie v této oblasti patrně pozvolna uzavírá, přece jen lze ještě čas od času zaznamenat přínosné poznatky - v posledním čtvrtstoletí za ně vděčíme především německým autorům působícím v matematické ekonomii a ekonometrii (Wolfgang Eichhorn, Erwin Diewert, Joachim Voeller).

2.1 Průměry jako prostředek formulace indexních čísel

Vrátíme-li se o více než století do minulosti, lze konstatovat, že již v té době probíhaly na stránkách tehdejší odborné literatury polemiky o tom, které z několika tehdy známých návrhů indexních čísel upřednostnit před jinými. Zejména dva z klasických představitelů moderní formalizované ekonomie Stanley W. Jevons (1865) a Francis Y. Edgeworth (1881) se snažili nalézt objektivní hlediska, jak řešit formulovaný problém rigorózně, s použitím nemnoha tehdy známých výsledků statistické analýzy. Několik v té době známých konstruktů bylo založeno vesměs na prostých nebo jednoduše vážených průměrech (aritmetickém či geometrickém) a předmětem posouzení bylo jednak vyšetřit, které vlastnosti přisoudit indexnímu číslo jako nutné, jednak pokusit se zdůvodnit opodstatněnost návrhů indexních čísel ve světle chování ekonomické reality (zejména s ohledem na v ekonomické praxi pozorované vlastnosti empirických rozdělení cenových poměrů).

Literatura uvádí, že vůbec první "indexní číslo" navrhl již v prvé polovině 18.století Charles F.Dutot[1] jako prostý podíl zprůměrovaných cen komodit v běžném a v základním období, tj. výraz

$$\frac{\sum p_i(1)}{N} \Big/ \frac{\sum p_i(0)}{N} \quad .$$

O slabinách tohoto návrhu se zmíníme níže.

Jedna z domněnek, která byla přitom vyslovena, byla tato: Za normálního stavu by se cenový vývoj ekonomického komplexu měl odehrávat tak, že změna (obvykle vzestup) ceny jedné z uvažovaných komodit mezi dvěma obdobími by měl být postupně provázen analogickou změnou (vzestupem) cen ostatních komodit. Tím by mělo dojít (připusťme malé časové zpoždění) k (téměř) proporční změně cen všech uvažovaných komodit mezi těmito obdobími. Edgeworth a Jevons usuzovali, že nepravidelnosti, které v realitě u (nestejného) vývoje cen komodit pozorujeme, jsou způsobeny (kromě zpoždění) především chybami v pozorování

[1] Dutot, Charles de Ferrare: Réflexions politiques sur les finances et le commerce. The Hague [1738].

hodnot (cen) příslušného statistického souboru.[2]
Názor, který byl tehdy zastáván, vycházel z úvahy, že na vektor podílových změn cen

$$x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \qquad i = 1,2,.....,N$$

lze pohlížet jako na konečnou množinu realizací náhodné veličiny X "všeobecná cenová změna", a že každý konkrétně vyšetřovaný soubor podílových cenových změn $p_i(1)/p_i(0)$ má charakter náhodného výběru, jehož prvky jsou vzájemně nezávislé a stejně rozdělené. Tento výběr patrně má (aspoň přibližně) nějaké známé statistické rozdělení, jehož střední hodnotu bude možno určit obvyklými statistickými prostředky s pomocí běžných statistik výběrového souboru.

Přitažlivost tohoto nazírání byla podložena statistickými vývody, neboť je známo, že :

a) jsou-li složky náhodného vektoru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)$ nezávisle a stejně normálně rozděleny $N(\mu, \delta^2)$, pak nestrannou odhadovou funkcí (získanou např. metodou maximální věrohodnosti) střední hodnoty μ je prostý aritmetický průměr prvků výběrového souboru

$$\bar{x}^A = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

b) jsou-li složky vektoru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)$ rozděleny nezávisle a stejně logaritmicko-normálně $LN(\mu, \sigma^2)$, pak nestrannou odhadovou funkcí (získanou metodou maximální věrohodnosti) střední hodnoty μ je prostý geometrický průměr prvků výběrového souboru

$$\bar{x}^G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} (x_i)}$$

V Edgeworthově pohledu na věc (nazývaném též varianta stochastického standardního přístupu) lze dále zaznamenat snahu po vyjádření míry přesnosti měření individuálních cenových změn adekvátním váhovým vektorem. Na druhé straně je však tímto přesnosti měření přikládán význam prakticky nesouvisející s tím, jaká je významnost postavení komodity v analyzovaném spotřebním koši (vyjádřená např. objemem její spotřeby).

Přes určitou inspirativnost byl nicméně záhy tento přístup odmítnut pro zřetelné znásilnění ekonomické reality ve prospěch uvedeného teoreticko-statistického schématu. Jak později ukázali A.L.Bowley a J.M.Keynes, odporují tomuto pohledu jak empirické tak teoretické důvody: Opakovaná empirická šetření nedala za pravdu domněnkám o normalitě ani logaritmické normalitě rozdělení cenových poměrů (až snad na ojedinělé případy). Podobně, reálné projevy cenového vývoje různých komodit jsou charakteristické tím, že vývoj cen určité skupiny komodit se zpravidla (v krátkém či delším horizontu) systematicky liší od vývoje cen jiné skupiny (v závislosti např. na substitučních aspektech) a k přibližování trendů nemusí dojít ani po velmi dlouhém období. Zde hraje zřejmou úlohu provázanost cen se spotřebou komodit charakteristická pro prostředí všeobecné ekonomické rovnováhy : ceny či jejich podíly nejsou v ekonomickém prostředí – až snad na výjimky - rozděleny náhodně.

Edgeworthův přístup však udává základní motivaci pro racionální konstrukci indexního čísla

2 Edgeworth, Francis Ysidro: Papers Relating to Political Economy , Vol I. London [1925].

tím, že usiluje o vystižení “střední cenové změny” nějakým průměrováním podílů $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$.

Jak ukázal další vývoj, právě tímto způsobem postupovali jiní autoři, přičemž řada výsledků tehdy dosažených přetrvala v aplikacích četná další desetiletí. Můžeme přitom vyjádřit jistý údiv nad skutečností, že přes dříve získané poznatky o slabých místech některých těchto konstruktů se tyto s úspěchem v aplikacích používají do dnešní doby. To platí jak v oblasti sledování vývoje životních nákladů a měření inflace, tak pro řadu známých burzovních indexů indikujících vývoj na kapitálových trzích.

Přirozeným způsobem, jak zlepšit vlastnosti (prostého) průměrování podílů $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$, je použití vážených typů průměrů. Volit přitom můžeme jednak z několika typů průměrování, jednak z více možných výběrů vah α_i, které slouží jako míra ohodnocení významnosti jednotlivé komodity (z hlediska ceny či kvantity) na celkovém agregátním vyjádření.

Připomeneme-li si čtyři základní typy průměrů (aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický), lze touto prostou úvahou dospět ke čtyřem skupinám použitelných agregujících konstruktů:

A. Indexní čísla založená na aritmetickém průměru

(2.1) $$P_{01}^{A} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

B. Indexní čísla založená na geometrickém průměru

(2.2) $$P_{01}^{G} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\alpha_i}$$

C. Indexní čísla vycházející z harmonického průměru

(2.3) $$\frac{1}{P_{01}^{H}} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \left(\frac{p_i(0)}{p_i(1)} \right)$$

D. Indexní čísla založená na kvadratickém průměru

(2.4) $$P_{01}^{Q} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^2}$$

Zmíněné průměry uvádíme ve vážené podobě s vahami α_i . Analogické prosté průměry, z nichž se některým též dostalo specifického pojmenování (v kontextu operování s podílovými cenovými změnami), dostaneme snadno z vážených volbou rovnoměrných vah tj. při $\alpha_i = \frac{1}{N}$. Poznamenejme ještě, že kvadratický průměr se oproti třem ostatním používá v prostředí indexních čísel vzácně.

Pro váhy α_i, které zde vystupují, budeme předpokládat standardní omezení spočívající v jejich nezápornosti (též s ohledem na nezápornost kvantit a kladnost cen) a dále v tom, že jejich součet (uvažovaný přes všech N komodit) je jedničkový, tj.požadujeme, aby

(2.5) $$\alpha_i \geq 0 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \; .$$

Použitelnými způsoby vyjádření odlišnosti váhového podílu každé komodity na celkovém agregátním komplexu jsou např. volby vah následujícího typu[3] :

(2.6.a) $$\alpha_i = \frac{q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} q_i(*)}$$

(2.6.b) $$\alpha_i = \frac{p_i(0) \cdot q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(*)}$$

(2.6.c) $$\alpha_i = \frac{p_i(1) \cdot q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(*)}$$

Připomeňme, že z obecné teorie středních hodnot vyplývá, že pro libovolnou $n-$tici nezáporných čísel platí tato fundamentální nerovnost pro vztahy mezi průměry (prostými i váženými)

(2.7) $$P_{01}^{\;H} \leq P_{01}^{\;G} \leq P_{01}^{\;A} \leq P_{01}^{\;Q}$$

Všechny tyto průměry lze totiž zapsat jako zvláštní formy obecného výrazu pro střední hodnotu řádu ρ.

Tuto obecnou střední hodnotu lze pro průměry prostého typu vyjádřit výrazem

(2.8) $$P^{\rho}{}_{01} = \left(\frac{1}{N} . \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\rho} \right)^{1/\rho}.$$

resp. pro průměry váženého typu ji lze zapsat analogicky jako

(2.9) $$_{\alpha}P^{\rho}{}_{01} = \left(. \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\rho} \right)^{1/\rho}.$$

Aritmetický průměr je zvláštním případem obecné střední hodnoty při volbě ρ = 1, kvadratický průměr při volbě ρ = 2, harmonický průměr obdržíme při dosazení ρ = -1 a geometrický průměr je limitním případem obecné střední hodnoty řádu ρ, pokud se hodnota ρ limitně blíží k 0.[4]

Uvedené vzorce platí jak pro prosté, tak pro vážené průměry, pokud váhy splňují podmínky (2.5) – platnost uvedených nerovností se zachovává i při určitém uvolnění těchto podmínek.

Vztah (2.7) pak vyplývá z obecněji formulovaného tvrzení, že pro jakékoliv dvě střední hodnoty řádů r,s pro které platí nerovnost řádů, tj. např. r < s, vždy platí nerovnosti

---

[3] Hvězdičky v závorkách výrazů (2.6 a-c) zastupují označení období, tedy „0“ pro základní, „1“ pro běžné, vždy však shodně.

[4] Viz např. Anděl, J. : Statistické metody . Praha, Matfyzpress Praha 1993.
Podrobně pak o vztazích mezi průměry pojednává např. monografie Hardy, Littlewood, Pólya : Inequalities [1934].

(2.10) $$P_{01}^{\ r} < P_{01}^{\ s} \qquad \text{resp.} \qquad {}_{\alpha}P_{01}^{\ r} < {}_{\alpha}P_{01}^{\ s}$$

2.2 Klasická (statistická) indexní čísla

Přistupme nyní k prezentaci nejdůležitějších a nejčastěji používaných indexních čísel, která - též s ohledem na svůj (a to nejen historický) širší význam - obdržela konkrétní pojmenování, a to zpravidla po osobách, které je poprvé prezentovaly v literatuře (byť to není ve všech případech plně pravda), popř. které je aktivně uplatnily v důležitých ekonomických analýzách.

Vůbec nejjednodušší případ "rozumného indexního čísla" představuje

1. CARLIHO/SAUERBECKovo indexní číslo [Carli 1764, Sauerbeck *kolem* 1886]

(2.11) $$P^{S}{}_{01} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)} ,$$

které je prostým aritmetickým průměrem podílových cenových změn.[5] Je patrné, že jde o nejjednodušší možný přístup k agregaci podílových změn $p_i(1)/p_i(0)$ bez možnosti (průměr je nevážený) uplatnit jakákoliv hlediska k vyjádření rozdílné významnosti jednotlivých komodit v celkovém agregátním vyjádření. Teoretické vlastnosti tohoto indexního čísla popíšeme níže.

Nahradíme-li aritmetické průměrování geometrickým, lze formulovat jednoduchý výraz nazývaný

2. JEVONSovo indexní číslo [Jevons 1865]

(2.12) $$P_{01}^{J} = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{\frac{1}{N}}$$

Tento indexní konstrukt je pojmenován po anglickém ekonomu 2.poloviny 19. století Williamu Stanley Jevonsovi. Tvoří ho prostý geometrický průměr podílových cenových změn. Jak vyplývá z již zmíněných obecných zákonitostí pro jednotlivé typy průměrů operujících s nezápornými veličinami, poskytuje Jevonsův index vždy nižší v hodnotu než Carliho/Sauerbeckův index – rovnost nastává jen pro netypický případ, kdy by všechny podílové cenové změny $p_i(1)/p_i(0)$ nabývaly stejnou hodnotu. Jinými slovy řečeno to znamená, že geometrický průměr "střední hodnotu" těchto cenových změn spíše podhodnocuje, zatímco aritmetický ji mírně nadhodnocuje.

Jak Carliho/Sauerbeckovo tak Jevonsovo indexní číslo vykazují určité slabiny, které je znehodnocují vzhledem k možnosti praktického použití (o jejich teoretických vlastnostech se zmíníme níže) :

Jednak se předpokládá, že se v základním i běžném období vyskytují vždy shodné komodity zařazené do příslušných spotřebních košů (což může činit problém v situacích, kdy jsou obě období časově značně vzdálená), jednak musíme z úvah vyloučit přítomnost volných statků (komodit s nulovými cenami) v základním období, u Jevonsova indexu pak – nemá-li být index identicky nulový – navíc i v běžném období. Dalším, podstatně vážnějším nedostatkem je však

[5] Toto indexní číslo poprvé užil v roce 1764 italský všestranný učenec Gian-Ricardo Carli, který pomocí něj zkoumal pokles kupní síly peněz v Itálii před a po objevení Indie. Carli, G.R.: Del valore e della proporzione de'metalli monetati con i generi in Italia prima scoperte dell'Indie colonfronto del valore e della proporzione de'tempi nostri. In: *Opere scelte di Carli*. Vol.I, Milano s.299-366. Ragnar Frisch v [18] nazývá tento konstrukt Sauerbeckovým indexem (podle ekonoma a vydavatele Augusta Sauerbecka).

nemožnost odlišit rozdílnost přínosu cenových podílů různých komodit k hodnotě souhrnného indexu v praktických situacích. (Změna ceny chleba i ceny pepře se v indexu uplatní stejnou vahou navzdory diametrálně odlišné spotřebě těchto komodit u všech spotřebitelů). Stejnou slabinou by ostatně trpěl i (prostý) harmonický či kvadratický průměr.

Přirozeným způsobem, jak zlepšit vlastnosti (prostého) průměrování podílů $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$, je proto použití vážených typů průměrů. Přitom můžeme volit jednak z několika typů průměrování, jednak z více možných výběrů vah α_i, které slouží jako míra ohodnocení významnosti jednotlivé komodity (z hlediska ceny či kvantity) na celkovém agregátním indexním vyjádření.

Jak patrno, kromě dvou základních možností výběru cenového období - základního “0” v případě (2.6.b) a běžného “1” v případě (2.6.c) - lze analogicky specifikovat výběr období rozhodného pro převzetí hodnot kvantit : symbol “$*$” může zde stejně tak označovat období základní jako období běžné. Zřejmě v případě (2.6.a) se ceny na konstrukci vah nepodílí vůbec.

Tyto základní “návody” (6 různých váhových kombinací pro každý typ průměru) jsou vcelku postačujícími pro možnost odvození rozumně se projevujícího indexního čísla. Řada “historických” pokusů o konstrukci takového indexního čísla z nich ostatně také vycházela.

Příkladem indexů “váženého typu” může být zejména známá dvojice indexních čísel, Laspeyresovo a Paascheho, kdy obě využívají aritmetický způsob vážení pomocí kvantit získaných měřením spotřeby komodit v základním (u Laspeyresova) resp. v běžném (u Paascheho) období.

3. LASPEYRESovo indexní číslo [Laspeyres 1871]

(2.13)
$$P_{01}^{L} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}$$

tzn. jde o vážený aritmetický průměr cenových změn, přičemž váhy α_i jsou představovány podíly hodnotového vyjádření i -té komodity na hodnotovém agregátu indexu tvaru :

(2.13A)
$$\alpha_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}$$

Uplatníme-li tyto váhy v aritmetickém průměru, dostaneme

$$_{\alpha}P_{01}^{A} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0)q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)q_j(0)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)} = P_{01}^{L}$$

Literatura uvádí, že index uplatnil poprvé v roce německý ekonom Ernst Louis Etienne Laspeyres v analýze cenových relací při zbožních výměnách v císařském Německu[6]. Laspeyresovo indexní číslo je frekventovaně využíváno v české (ostatně stejně jako dříve v československé) statistické praxi, zejména k měření vývoje inflace (CPI - index

[6] Laspeyres, E. Die Berechnung einer mittleren Warenpreissteigerung. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 16, s.296-314.

spotřebitelských cen a PPI – index cen průmyslových výrobců) a indexů životních nákladů u různých sociálních kategorií. Rovněž v oblasti burzovních indexů upřednostňuje středoevropská oblast Laspeyresův index oproti jiným. Stojí za zmínku, že Laspeyresovo indexní číslo můžeme obdržet také jako vážený harmonický průměr, pokud zvolíme konkretizaci těchto vah jako

(2.13B)
$$\alpha_i = \frac{p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(0)}$$

Dosazením do výrazu (2.3) obdržíme

$$\frac{1}{{}^{\alpha}P_{01}^{H}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)q_j(0)} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(0)} = \frac{1}{P_{01}^{P}}$$

Vezmeme-li místo spotřeb komodit v základním období $q_i(0)$ hodnoty spotřeby z běžného období $q_i(1)$, dostaneme

4.PAASCHEho indexní číslo [Paasche 1874]

(2.14)
$$P_{01}^{P} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}$$

Jak patrno, jde o obdobu předchozího návrhu s tím, že váhy α_i zde představují podíly

(2.14A)
$$\alpha_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(1)}$$

Uplatníme-li tyto váhy ve váženém aritmetickém průměru (2.1), dostaneme

$$P_{01}^{A} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0)q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)q_j(1)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(1)} = P^{P}{}_{01}$$

Index uplatnil poprvé v roce 1874 německý ekonom H. von Paasche při analýze vývoje cenových kursů na hamburgské burze[7]. Toto indexní číslo je (mj. ve Francii, Velké Británii, Kanadě a v Japonsku) často používáno k charakterizaci vývoje burzovních indexů na kapitálových trzích. Paascheho indexní číslo lze ovšem také interpretovat jako vážený harmonický průměr s vahami

[7] Paasche, H. Über der Preisentwicklung der Letzte Jahre nach den Hamburger Börsennotirungen. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 23, s.168-178.

(2.14B)
$$\alpha_i = \frac{p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(1)}$$

Pak totiž platí
$$\frac{1}{{}^{\alpha}P_{01}^{H}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1).q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) q_j(1)} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(1)} = \frac{1}{P_{01}^{P}}$$

Předběhneme další výklad, řekneme-li již na tomto místě, že obě tato indexní čísla tvoří určité rozmezí (s dolní hranicí $P_{01}{}^{P}$ a horní hranicí $P_{01}{}^{L}$), v rámci něhož lze považovat posouzení vývoje poměrů sledovaných veličin (cen, kvantit) za realistické.[8] Hodnoty převyšující $P_{01}{}^{L}$ a hodnoty menší než $P_{01}{}^{P}$ již zpravidla za realistické považovat nelze a případný výsledek (získaný jiným indexním číslem) je třeba posuzovat již jako zřetelné nadhodnocení, resp. podhodnocení skutečného stavu.

Dále uvedeme dvě indexní čísla, obě založená na váženém aritmetickém průměru, která váží cenové podíly $p_i(1)/p_i(0)$ vahami, které řeší "neutrálně" otázku, zda kvantity přebírat ze základního nebo běžného období. Prvním z nich je

5. MARSHALLovo-EDGEWORTHovo indexní číslo [Marshall 1887, Edgeworth 1887]

(2.15)
$$P_{01}^{E} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}$$

v němž jsou jednotlivé cenové poměry váženy aritmetickým průměrem kvantit vzatých ze základního a běžného období. I toto indexní číslo může být interpretováno jako vážený aritmetický průměr s vahami

(2.15A)
$$\alpha^{E}{}_{i} = \frac{p_i(1)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\left[q_j(0)+q_j(1)\right]}$$

Druhým z těchto indexů je

6. WALSHovo indexní číslo [Walsh 1921]

(2.16)
$$P_{01}^{W} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot\sqrt{q_i(0)\cdot q_i(1)}}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot\sqrt{q_i(0)\cdot q_i(1)}}$$

ve kterém jsou kvantity sloužící ke konstrukci vah průměrovány geometricky. Americký ekonom Correa Moylan Walsh [1921] argumentoval pro tento návrh, který je obdobou Edgeworthova indexu (2.15), právě potřebou zacházet „symetricky" s informacemi ze

[8] Údajně vůbec první ekonom, který uvedl a podpořil postup vedoucí k definicím Paascheho a Laspeyresova indexního čísla byl v roce 1871 německý ekonom Wilhelm Moritz Drobisch [1802-1896]. Jeho příspěvek byl však později pozapomenut.

základního a běžného období, nejsou-li jiná vodítka, které z těchto období preferovat.[9]

Také toto indexní číslo je speciálním případem váženého aritmetického průměru, pokud za váhy α_i vezmeme výrazy

(2.16A)
$$\alpha^W{}_i = \frac{p_i(0)\cdot\sqrt{q_i(0)\cdot q_i(1)}}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot\sqrt{q_j(0)\cdot q_j(1)}}$$

Ve snaze dospět k "optimálnímu" indexnímu konstruktu, byl prezentován návrh známý jako

7. FISHERovo (ideální) indexní číslo [Bowley 1899, Pigou 1912, Fisher 1922]

(2.17)
$$P_{01}^F = \sqrt{P_{01}^L \cdot P_{01}^P} ,$$

To je definováno jako (prostý) geometrický průměr Laspeyresova a Paascheova indexního čísla. Index je nazván po Irvingu Fisherovi, ač byl již dříve zmiňován anglickými ekonomy sirem Arthurem Lyonem Bowleym [1899][10] a Arthurem Cecilem Pigouem [1912],[1932][11]. Z konstrukce tohoto indexního čísla je zřejmé, že jeho hodnota se musí nacházet mezi Paascheho a Laspeyresovým indexním číslem. Jak se při praktickém uplatnění ukazuje, jsou hodnoty Fisherova, Edgeworthova a Walshova indexního čísla obvykle velmi blízké a všechna mohou svým způsobem dobře vyjadřovat "neutrální" hodnocení vývoje či územního srovnání stavů posuzovaného komplexu. Zaznamenejme, že oproti Laspeyresovu a Paascheho indexním číslům operují Walshův, Edgeworthův a Fisherův index s úplnou čtveřicí vektorů $\boldsymbol{p}(0)$, $\boldsymbol{p}(1)$, $\boldsymbol{q}(0)$, $\boldsymbol{q}(1)$,

Další indexní číslo, kterému se dostalo značné teoretické pozornosti, uvedl Fin Leo Törnquist

8. TÖRNQUISTovo indexní číslo[12] [Törnquist 1936]

(2.18)
$$P_{01}^T = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{w_i} \quad , \text{ kde}$$

(2.18A)
$$w_i = 0{,}5\cdot\left(\frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}\right) + 0{,}5\cdot\left(\frac{p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(1)}\right) ,$$

---

[9] Walsh,C.M. The Best Form of Index Number: discussion. Quarterly Publication of the American Statistical Association 17 [1921]. Walsh zde píše: Commodities are to be weighted according to their importance., or their full values..... But the weights of the commodities at the second period are apt to be different from their weights at the first period. Which weights, then, are the right ones - those of the first period? Or those of the second? Or should they be a combination of the two sets? There is no reason for preferring either the first or the second. Then the combination of both would seem to be the proper answer. And this combination itself involves an averaging of the weights of the two periods.

[10] Bowley, A.L.: Wages, Nominal and Real. In: Palgrave, R.H.I.: Dictionary of Political Economy, Vol.3. London, Macmillan [1899], s. 640-641.

[11] Pigou, A.C.: Wealth and Welfare [1912] a The Economics of Welfare 4[ed] [1932] obě London, Macmillan. Pigou původně prosazoval prostý součin ${P_{01}}^L$ a ${P_{01}}^P$, od čehož později ustoupil (součin mj. nesplňuje test (F7)) .

[12] Törnquist, L.: The Bank of Finland´s consumption price index. Bank of Finland Monthly Bulletin 10/1936 s.1-8.

což je vážený geometrický průměr cenových poměrů $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$, v němž jsou váhy vytvořeny jako prosté průměry výdajových účastí i-té kvantity (na hodnotovém agregátu) v základním a v běžném období.[13]

Konečně ke klasickým indexním číslům můžeme přiřadit ještě dva návrhy, které lze zapsat jako vážené aritmetické průměry Jedná se o

9. PALGRAVEovo indexní číslo [R.H.Inglis Palgrave *kolem* 1910][14]

(2.19)
$$P_{01}^{PL} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(1)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [p_i(1)]^2 \cdot q_i(1)/p_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}$$

10. Harmonický LASPEYRESův index [Vartia 1978]

(2.20)
$$\frac{1}{P_{01}^{HL}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)} \cdot \frac{p_i(0)}{p_i(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [p_i(0)]^2 \cdot q_i(0)/p_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}$$

Obě tato indexní čísla se vyznačují tím, že se v jejich konstrukci objevují opět váhy v podobě výdajových účastí (*„expenditure shares“*) majících u Palgraveova indexu tvar

(2.19A)
$$\alpha^{PL}{}_i = \frac{p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(1)}$$

u harmonického Laspeyresova indexu pak tvar

(2.20a)
$$\alpha^{HL}{}_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}$$

Indexní čísla (2.19), (2.20), stejně jako třeba Laspeyresovo a Paascheho, lze zařadit do kategorií *indexů tzv. Löweova typu*. Tato indexní čísla lze vyjádřit ve tvaru

LÖWEův (cenový) **index** [Joseph Löwe 1823]

(2.21)
$$P_{01}^{LW} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(*)},$$

kde hvězdičky v závorce vyjadřují situování do nějakého pevného časového období (např. „0“ nebo „1“) nebo jde prostě o nějakým způsobem stanovené kvantity (u Edgeworthova či Walshova čísla se vezmou průměry kvantit ze základního a běžného období). Obecnost Löweovy formulace (2.21) nazývané „přístupem pevného koše“ (*fixed basket approach*)

[14] Sir Robert Harry Inglis Palgrave – anglický bankéř, ekonom a vydavatel [1827-1919]

přináší s sebou na druhé straně stupeň neurčitosti, máme-li rozhodnout o nejvhodnějším naplnění hvězdiček v závorkách.

Ještě jednomu obecnému tvaru, jímž je možno řadu klasických (cenových) indexních čísel zapsat, se dostalo zvláštní pozornosti. Jde o indexy vyjádřitelné jako **obecná střední hodnota řádu *r*** výrazem

(2.22) $$_sP^t_{01}(r) \;= (\sum_{i=1}^{N} s_i(t)\cdot(\frac{p_i(1)}{p_i(0)})^r)^{1/r} \qquad \text{pro } r \neq 0$$

nebo výrazem

(2.23) $$_sP^t_{01}(0) = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{s_i(t)}$$ jako limita (2.22) při

$r \to 0$

přičemž váhy

(2.24) $$s_i(t) = \frac{p_i(t)q_i(t)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(t)q_j(t)}$$

představují ***výdajové účasti*** (*expenditure shares*) i-té komodity na hodnotě celkového spotřebního koše (za všechny komodity). Hodnoty těchto účastí se přebírají zpravidla buď ze základního nebo běžného období. Z dosud uvedených indexních čísel lze za speciální případy ***obecné střední hodnoty s vahami charakteru výdajových účastí*** vyjádřit

Laspeyresovo indexní číslo

(2.25) $$P^L{}_{01} = \sum_{i=1}^{N} s_i(0)\frac{p_i(1)}{p_i(0)} =_s P^0{}_{01}(1)$$

Paascheho indexní číslo

(2.26) $$P^P{}_{01} = (\sum_{i=1}^{N} s_i(1)\frac{p_i(0)}{p_i(1)})^{-1} =_s P^1{}_{01}(-1)$$

Palgraveův index

(2.27) $$P^{PL}{}_{01} = \sum_{i=1}^{N} s_i(1)\frac{p_i(1)}{p_i(0)} =_s P^1{}_{01}(1)$$

Harmonický Laspeyresův index

(2.28) $$P^P{}_{01} = (\sum_{i=1}^{N} s_i(0)\frac{p_i(0)}{p_i(1)})^{-1} =_s P^0{}_{01}(-1)$$

Törnquistův index

(2.29) $$P^T_{01} = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{0,5.s_i(0)+0,5.s_i(1)} =_s P^{0+1}{}_{01}(0)$$

Fisherovo indexní číslo může být vyjádřeno zápisem

(2.30) $$P^F{}_{01} = (P^0{}_{01}(1))^{1/2}(P^1{}_{01}(-1))^{1/2}$$

4 prosté a 8 vážených typů průměrů/indexních čísel, které jsme až dosud uvedli, představuje již dostatečný počet pro to, abychom si položili otázku, která z nich jsou - z určitých hledisek - lepší či horší než jiná. Je i intuitivně zřejmé, že kromě nesporného přínosu průměrů váženého typu oproti průměrům prostým možností odlišit významnost jednotlivých komodit a tedy i

vlivu podílu jejich změn na celkové hodnotě indexu budou existovat další kritéria, na základě kterých bude možno posuzovat preferenci jednoho indexního čísla před jinými.

Podobně bychom mohli nejrůznější volbou vah a průměrů různých typů dospět k mnoha dalším tvarům, které by dohromady vytvořily početný soubor více nebo méně užitečných typů souhrnných indexů. Většina nahodile konstruovaných výrazů ovšem nepřesvědčila z hlediska svých vlastností, popř. i podmínek praktického užití, takže se do širšího povědomí dostaly jen málokteré z nich.

S ohledem na předchozí vzniká přirozeně otázka, jak rozlišit mezi vhodností a použitelností mnoha možných návrhů navzájem, byť je možná již v této chvíli zřejmé, že otázka výběru určitého indexu pro konkrétní použití je více nebo méně arbitrární. Na konci 19. a začátku 20. století bylo iniciováno úsilí při vypracování souboru kritérií, podložených zdůvodněnými teoretickými požadavky, které do určité míry dovolují posoudit "kvalitu" toho-kterého návrhu tvaru konkrétního indexního čísla. Avšak - jak dále uvidíme - na stanovení "všestranně nejlepšího" indexního čísla aspirovat nelze. Zajímavé přitom je, že po odmlce trvající několik desítek let od vypracování prvního okruhu těchto testů/axiomů (cca do konce 20.let 20.století) přibylo v posledních 20 letech několik dalších zhruba stejně oprávněných kritérií/testů (vděčíme za ně zejména německým ekonomům činným v této a v příbuzných oblastech matematické ekonomie).[15] V další části se s nimi postupně seznámíme.

[15] Za jeden z posledních lze pokládat soubor 20 testů/axiomů prezentovaných E.Diewertem v [8] .

2.3 Axiomaticko-testový přístup Irvinga Fishera a následovníků

Axiomatická/testová teorie indexních čísel[16], jejímž iniciátorem byl Irving Fisher ve 20.letech minulého století, sestává z několika logicky odůvodněných předpokladů, jejichž splnění - lze vyžadovat od každého dostatečně "rozumného" indexního čísla. Výčet ani přesné formulace těchto axiomů/testů nejsou však všemi problémem se zabývajícími autory přijímány jednotně. Zde se přidržíme původních formulací, kategorizace a uspořádání testů zastávaných Irvingem Fisherem a jeho současníky. Ve druhé polovině 20.století byly totiž formulovány další testy, které původní Fisherovu soustavu svým způsobem „zúplňují". Z nich zde uvádíme jen část, konkrétně ty, které jsou četněji komentovány v literatuře a které mohou být vcelku elegantně interpretovány. S ohledem na některá problematiku téměř vyčerpávající pojednání z nedávné doby lze do budoucna již sotva očekávat, že se na této „sestavě" něco ještě podstatněji změní. Zde uvedené axiomy/testy budeme značit **(F1) - (F12)**, přičemž jako prvních 8 axiomů uvádíme ty, které pocházejí z Fisherova, Walshova, Bowleyho či Frischova období.

Dobře zkonstruované indexní číslo by mělo vyhovovat co největšímu počtu z těchto požadavků. Jak však dále zmíníme, optimální (tj. všem níže uvedeným axiomům vyhovující) konstrukci indexního čísla vytvořit nelze.

(F1w**) test** (*slabé*) **identity** [weak identity test]**:**

Jestliže platí $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}(1)$ ***a současně*** $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}(1)$***, pak*** $\widetilde{P}_{01} = 1$ ***,*** *což lze psát* $P_{00} = 1$ **.**

(F1s**) test** (*silné*) **identity** [strong identity test]**:**

Jestliže platí $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}(1)$ ***pak*** $\widetilde{P}_{01} = 1$

konstatuje, že "neutrální" hodnota indexního čísla (vzatého jako podílový ukazatel) je rovna jedné. Shodu cen (příp. i kvantit) v obou obdobích lze pokládat též za "nedostatek času" ke změně komplexu. Uveďme, že axiom **(F1w)** je splněn všemi výše uvedenými indexními čísly.

(F2w**) test záměny faktorů** [factor reversal test]**:**

$$P_{01} \cdot \widetilde{P}_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}$$ resp.

(F2s**) „součinový" test**[17] [product test]**:**

$$P_{01} \cdot Q_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}$$

požadují, aby hodnota součinu P_{01} a indexního čísla $\widetilde{P}_{01}$ téže konstrukce získaného záměnou cen za kvantity a obráceně (interpretovatelného obvykle jako kvantový index) dávala podíl peněžních agregátů, tj. vynaložených výdajů na komodity v běžném a základním období"[18].

---

[16] Není až tak podstatné, zda používáme pojem test či axiom. Jde tak či onak o podmínku, kterou určitý konstrukt
tj. indexní číslo testujeme z toho hlediska, zda jej splňuje nebo ne, či se na ni díváme jako na postulát vyvozený z elementární ekonomicko-matematické podstaty věci.

[17] Možná ne zcela zřetelně postřehnutelný rozdíl mezi tímto a předchozím testem (F2w) spočívá v tom, že ne vždy je kvantové indexní číslo vytvořeno mechanickou záměnou cen a kvantit z cenového. Jako příklad mohou sloužit např. mikroekonomická indexní čísla, která jsou předmětem výkladu 5.části.

[18] Výraz na pravé straně **(F2)** by mohl být považován také za určitý typ indexního čísla, avšak při bližším

(F3) test záměny období (míst) [time reversal test]: $P_{01} \cdot P_{10} = 1$

znamená požadavek, aby při "inverzním" pohledu na změnu komplexu v čase (návrat do výchozího období) bylo "časově převrácené" indexní číslo reciprokou hodnotou původního. Tentýž požadavek lze analogicky vyslovit při prostorovém srovnání, kde ovšem zpravidla máme libovůli při přiřazení "0" a "1" srovnávaným územním celkům.

(F4s) test okružnosti (též **cirkularity** či **tranzitivity)** [circularity test]: $P_{02} = P_{01}.P_{12}$

požaduje, aby se přechod ze základního období "0" do běžného období "2" (přes meziobdobí "1") odehrál bez tranzitivního zkreslení (a to při libovolném meziobdobí). Při územním srovnání půjde o analogický požadavek, ať volíme "přestupný" územní celek jakkoliv.

Slabší vyjádření předchozího testu představuje

(F4w) bazický test [base test]:

výraz $P_{01} = \dfrac{P_{02}}{P_{12}}$ ***je nezávislý na volbě období „2".***

Ten (pouze) požaduje, aby podíl P_{02} / P_{12} byl nezávislý na hodnotách $\mathbf{p}(2), \mathbf{q}(2)$ neboli, aby srovnání vývoje spotřeb a cen základního období vůči spotřebám a cenám běžného období prováděné přes třetí časový bod nebylo závislé na hodnotách výchozího období.

(F5) test určenosti [determinateness test]:

P_{01} je vždy určité, konečné a ne identicky nulové reálné číslo.

představuje požadavek, aby indexní číslo bylo vždy definováno a mělo konečnou, ne identicky nulovou hodnotu v jakékoliv situaci (např. při nepřítomnosti některé z komodit v základním nebo v běžném období). Zesílenou verzí tohoto testu je níže uvedený axiom **(F12)**.

Další dvojici představují

(F6w) test (*slabé*) **souměřitelnosti** [commensurability test] konstatující toto

Jestliže provedeme *stejnou* proporční změnu měrových jednotek kvantit, tj. $q_1^*(1) = d \cdot q_i(1)$, $q_i^*(0) = d \cdot q_i(0)$ pro nějaké reálné $d > 0$ a adekvátní změnu cen $p_i^*(1) = d^{-1} \cdot p_i(1)$, $p_i^*(0) = d^{-1} . p_i(0)$, potom musí vždy platit $\widetilde{\boldsymbol{P}}_{01} = \boldsymbol{P}_{01}$, neboli

P_{01} nezávisí na měrové jednotce komodit ,

popř.

(F6s) test (*silné*) **souměřitelnosti** konstatující totéž , ovšem za volnější podmínky

pokud ceny i kvantity změníme vzájemně konformně (*každou však v obecně jiném poměru*)

Jestliže platí $q_1^*(1) = d_i . q_i(1)$, $q_i^*(0) = d_i \cdot q_i(0)$ pro nějaký vektor d *s kladnými složkami* a podobně $p_i^*(1) = d_i^{-1} \cdot p_i(1)$, $p_i^*(0) = d_i^{-1} \cdot p_i(0)$, potom musí vždy platit $\widetilde{\boldsymbol{P}}_{01} = \boldsymbol{P}_{01}$.

Slabá i silná verze testu vyjadřují očekávání, že indexní číslo nesmí být ovlivněno změnou velikosti měrových jednotek komodit analyzovaného souboru: např. v situaci, kdy se mění měrové jednotky, ve kterých uvádíme množství komodit, musí být zachována hodnota indexního čísla vyčíslená před touto změnou a po ní. Jako příklad vezměme situaci, kdy

zkoumání zjistíme, že jeho konstrukce není vhodná - viz dále komentář k **(F11)**.

přecházíme z kg na tuny: jednotková cena komodity se 1000-násobně zvětší, avšak současně se také 1000-násobně zmenší původní množství komodity vyjádřené v nové jednotce (kg = 0,001t). Konstrukce indexního čísla musí být vůči těmto změnám invariantní.

(F7w) test (slabé) **úměrnosti** [weak proportionality test]**:**

Jestliže platí $p_i(1) = c \cdot p_i(0)$ ***a též*** $q_i(1) = q_i(0)$ ***pro všechna i***

a pro nějakou konstantu $c > 0$, ***pak musí platit*** $\widetilde{P}_{01} = c$ **.**

Upuštěním od druhé podmínky získáme

(F7s) test (silné) **úměrnosti** [strong proportionality test]**:**

Jestliže platí $p_i(1) = c \cdot p_i(0)$ ***pro všechna i*** *(nezávisle na hodnotách kvantit)*

a pro nějakou kladnou konstantu c ***, pak musí platit*** $\widetilde{P}_{01} = c$ **.**

Axiom **(F7s)** vyžaduje, aby v "ideálním" případě, kdy by ceny všech komodit vzrostly ve stejném poměru (např. c-násobně), bylo cenové indexní číslo rovno příslušné konstantě úměrnosti c. Jiná hodnota by zřejmě signalizovala nekorektnost konstruktu. K platnosti slabé verze tohoto testu postačuje, platí-li tento závěr tehdy, nedojde-li mezi základním a běžným obdobím k žádným změnám v kvantitách..

Konečně máme

(F8) test symetrie [symmetry test] vyslovuje požadavek, že

Indexní číslo musí být invariantní vůči jakékoliv permutaci *(záměně)* ***pořadí*** *cen* ***komodit*** (při analogické záměně pořadí příslušných kvantit).[19]

Je zřejmé, že závislost hodnoty indexního čísla na pořadí komodit nelze připustit, neboť bychom nemohli přistupovat ke všem statkům v příslušném konstruktu rovnocenně.

Axiom **(F8)** splňují zřejmě všechny v části [2.1] uvedené návrhy "inteligentních" indexních čísel. Protože však komutativita platí jak pro aditivní, tak pro multiplikativní operace (jinými slovy jak při aritmetickém, tak geometrickém způsobu průměrování), nemá tento test z hlediska uplatnění jako diferenciační kritérium mezi různými indexními čísly valný význam.

Samotný počet splněných testů však nemůže být jediným vodítkem při komparaci vhodnosti návrhů jednotlivých indexních čísel. Důležitou roli hraje rovněž otázka, do jaké míry umožňuje zvolená váhová struktura vyhovět odlišnostem v poměřování vlivu komodit u jednotlivých agregátních výrazů. V tomto smyslu jsou obecně průměry "váženého typu" nadřazeny indexním číslům založeným na prostém průměrování (Carli, Jevons), neboť přinejmenším v určité míře dovedou stupeň významové odlišnosti komodit postihnout. Rovněž záměr objektivizovat či neutralizovat vliv volby období, která se objevuje v konstrukci Fisherova, Edgeworthova, Walshova a Törnquistova indexu (nehledě na určitou nevýhodu související s potřebou opatřit větší množství empirických dat) staví tato indexní čísla nad "nesymetricky formulovanými" indexy Paascheho či Laspeyresova typu.

[19] Z uvedených 8 testů je I.Fisherovi [1911], [1922] přímo přisuzováno autorství axiomů **(F1)**, **(F3)**, **(F6)**, **(F8)** a spolu s Walshem [1901] test **(F7)**, zatímco axiom okružnosti **(F4)** formuloval již Westergaard [1890]. Důraz na význam axiomu záměny faktorů **(F2)** kladl zejména R. Frisch [1930]. Test **(F6)** údajně poprvé navrhl již holandský ekonom Pierson [1896] pod názvem *test invariance vůči změnám v jednotkách měření* . Tentýž autor vyslovil poprvé podnět pro test **(F3)**. Laspeyres {1871] se mj. zasloužil o uvedení testu **(F1s)** představované požadavkem, aby hodnota cenového indexního čísla byla rovna 1, kdykoliv za $p(0)$ a $p(1)$ dosadíme shodné vektory.

Uvedených 8 testů základní soustavy (ať už vzatých v silných či slabých verzích) nicméně není vzájemné nezávislých. Kromě toho, že ze silných verzí testů vyplývají slabé verze, lze dále snadno vyvodit platnost např. těchto tvrzení:

TVRZENÍ 1

***(a) z testu úměrnosti* (F7) *vyplývá test identity* (F1).**
***(b) z testu identity* (F1) *a z testu okružnosti* (F4) *vyplývá test záměny období* (F3).**
***(c) z testů okružnosti*(F4s) *a z testu záměny období* (F3) *vyplývá vztah* $P_{01}.P_{12}.P_{20} = 1$.**
(d) z testu okružnosti*(F4s) *vyplývá bazický test* (F4w), *tj. nezávislost podílu* P_{02} / P_{12} *na volbě období „2“.

ověření

(a) Stačí zvolit $c = 1$; pak $\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{1}) = \boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{0})$. Analogicky je tomu u slabých verzí obou testů.

(b) Ztotožníme-li období „2“ se základním obdobím „0“, dostaneme $P_{01} \cdot P_{10} = P_{00}$ a protože $P_{00} = 1$ dle **(F1)**, dostáváme při $P_{01} \neq 0$ ihned dokazovaný vztah.

(c) Platí-li současně $P_{01} \cdot P_{12} = P_{02}$ a $P_{02} \cdot P_{20} = 1$, což je při $P_{20} \neq 0$ totéž, co $P_{02} = P_{20}^{-1}$, dostaneme ihned dokazované tvrzení.

(d) Podíl P_{02} / P_{12}, jenž je – platí-li **(F4s)** - roven P_{01}, zřejmě nezávisí na období „2“. □.

Odtud mj. dále plyne, že při vyšetřování vzájemné konzistence testů lze ignorovat (F1), (F3) a stačí se zaměřit na pětici (F2), (F4), (F5), (F6) a (F7). Test symetrie (F8) je odlišného charakteru a nemá přímý vztah k ostatním.

Otázka vzájemné konzistence uvedené soustavy testů vyvstala v podstatě ve stejné době, kdy byla tato soustava sestavena. První užitečný příspěvek přinesl Ragnar Frisch[20] argumentující proti možnosti současného splnění testů bazického testu (F4w), testů souměřitelnosti (F6w) a testu určenosti (F5). O něco později se obdobným problémem zabýval Abraham Wald[21] [1937], který nalezl vzájemný rozpor v trojici testů (F7s), (F4s) a (F2w). Oba autoři přitom předpokládali, že indexní čísla (cenová i kvantová) jsou derivovatelná podle cen p_i i kvantit. q_i. Jimi podané důkazy však nebyly později shledány za plně korektní.

První exaktní důkazy o rozpornosti některých testů podali Subramanian Swamy v [26] a K. Mizutani[22]. Uplatnili přitom poznatky z teorie funkcionálních a parciálních diferenciálních rovnic. O něco později (za slabších předpokladů položených na indexní číslo a bez potřeby diferencovatelnosti indexního konstruktu podle argumentů) provedl zevrubnou analýzu problému Wolfgang Eichhorn v [13]. Důkazy jím podané jsou ryze analytické a nevyžadují žádné předpoklady ve vztahu k diferencovatelnosti indexního čísla (dle cen resp. kvantit)
Na další nekonzistence (případně zahrnující i některé níže uvedené testy) upozornili a příslušné věty vyslovili P.Samuelson [1974] W.Eichhorn [1976] a Eichhorn a Voeller [1976] .

Eichhorn v [13] mj. ukázal, že indexní číslo splňující současně bazický test **(F4w),** test souměřitelnosti **(F6w)**, popř. ještě test záměny faktorů **(F2w)** musí mít určitý speciální tvar.

Přesněji o tom vypovídají

20 Frisch, R.: Necessary and Sufficient Conditions Regarding the Form of an Index Number Which Shall Meet Certain of Fisher's Tests.
21 Wald, A.: Zur Theorie der Preisindexciffern. Zeitschrift für Nationalökonomie 8/1937 s. 179-219.
22 Mizutani, K.: New Formulae for Making Price Index Numbers. Bulletin de L'Institut International de Statistique. 32nd Session, Tokyo.

TVRZENÍ 2

Máme-li indexní číslo P_{01} splňující bazický test **(F4w)** a test souměřitelnosti **(F6w)**, pak existují funkce G, H a Φ takové, že pro P_{01} existuje rozklad

(2.31A) $$P_{01} = \frac{G\left(p_1(1).q_1(1), p_2(1).q_2(1),\ldots, p_N(1).q_N(1)\right)}{H\left(p_1(0).q_1(0), p_2(0).q_2(0),\ldots, p_N(0).q_N(0)\right)}.\ \Phi\left(\frac{p_1(1)}{p_1(0)}, \frac{p_2(1)}{p_2(0)},\ldots, \frac{p_N(1)}{p_N(0)}\right),$$

přičemž funkce Φ může být multiplikativně rozložena jako

(2.31B) $$\Phi\left(\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2,\ldots, \lambda_N\mu_N\right) = \Phi\left(\mu_1, \mu_2,\ldots, \mu_N\right).\Phi\left(\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_N\right)$$

Opačně také platí, že každá funkce zapsaná pomocí (2.31A-B) splňuje testy **(F4w)** a **(F6w)**,

Důkaz lze nalézt v [13], str.250 resp.

TVRZENÍ 3

Máme-li indexní číslo P_{01} splňující současně bazický test **(F4w)**, test souměřitelnosti **(F6w)** a test záměny faktorů **(F2w)**, pak lze toto indexní číslo zapsat ve tvaru

(2.32) $$P_{01} = \left[\Phi\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_1(1).q_1(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_1(0).q_1(1)},\ldots,\frac{\sum_{i=1}^{N} p_N(1).q_N(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_N(0).q_N(1)}\right).\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)}\right]^{1/2},$$

Funkce $\Phi(z_1, z_{2,\ldots,} z_N)$ má vlastnost multiplikativního rozkladu vyjádřeného v (2.31B). Tato funkce splňuje testy **(F4s)**, **(F6w)** a **(F2w).**.

Důkaz lze nalézt v [13], str.252

Poznámka 1 Jestliže je funkce $\Phi(z_1, z_{2,\ldots,} z_N)$ z (2.31B) spojitá, pak ji lze psát ve tvaru

(2.33) $$\Phi(z_1, z_{2,\ldots,} z_N) = z_1^{c_1}.z_2^{c_1}\ldots z_N^{c_N}$$, kde $c_1, c_2,\ldots, c_N$ jsou reálné konstanty

Poznámka 2 Takové indexní číslo P_{01} však nesplňuje test proporčnosti (F7)

Velmi důležitým příspěvkem k hledání odpovědi na otázku vzájemné konzistence testů je

TVRZENÍ 4

Testy **(F7s), (F4w), (F5), (F6) a (F2s)** jsou nezávislé v tom smyslu, že kterákoliv čtveřice z nich může být splněna některým konkrétním indexním číslem. Taková indexní čísla však nesplňují zbývající pátý test.

Důkaz je konstruktivního charakteru:

(a) Indexní číslo tvaru

(2.34) $$P_{01} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)}.\frac{\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot p_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot p_i(0)}.\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i .q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} d_i .q_i(1)}\right)^{1/2},$$

kde $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2,\ldots, c_N)$ a $\boldsymbol{d} = (c_1, c_2,\ldots, c_N)$ jsou vektory libovolných kladných konstant, splňuje **(F7s), (F4w), (F5)** a **(F2s)** ale nikoliv **(F6w)**

(b) Fisherovo indexní číslo (2.17) splňuje **(F7s), (F6w),** dokonce i **(F6s), (F2s), (F5)** ale nevyhovuje ani testu okružnosti, ani jeho slabší verzi **(F4w)**.

(c) Index tvaru $P_{01} = \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(1) q_i(1)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(0) q_i(0)} \right)^{1/2}$ splňuje testy **(F2s), (F5), (F6w) ,(F4w)** jakož i **(F4s),**

ale nesplňuje test **(F7w).**

$$P_{01} = \left[\Phi \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_1(1).q_1(0)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_1(0).q_1(1)}, \ldots, \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_N(1).q_N(0)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_N(0).q_N(1)} \right) . \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(1) q_i(1)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(0) q_i(0)} \right]^{1/2},$$

(d) Index tvaru (viz výše)

s dodatečnou podmínkou (2.33), v niž , $\sum c_i = 1$ splňuje **(F7w), (F4w)** i **(F4s), (F6w), (F2s),** ale nesplňuje **(F5).** □.

Přestože uvedená pětice testů není vzájemně konzistentní, lze určitým jejím zeslabením již vzájemně konzistentních „testových podmnožin“ dosáhnout. Za jednu z nich lze vzít např. pětičlennou skupinu **(F7), (T2**), (F5), (F6w)** a **(F3s)**, za jinou pak čtveřici testů **(F4s), (F5), (F6w)** a **(F2)** doplněnou o podmínku jistým způsobem se vztahující se k testu proporčnosti

(F7*) ***Jestliže platí*** $p_i(1) = c \cdot p_i(0)$ ***a též*** $q_i(1) = c.q_i(0)$ ***pro všechna i a pro nějakou konstantu*** $c > 0$***, pak musí platit*** $\widetilde{P}_{01} = c$.

kterou lze považovat za další zeslabení původní podmínky obsažené v testu proporčnosti.

Tím jsme na jedné straně ukázali, že neexistuje “ideální” číslo, které by splňovalo všech 8 Fisherových testů zároveň, na druhé straně že však „konzistentních testových“ podskupin může být více. Zbývá ještě dodat, že výběr žádné takové podskupiny nevede k jednoznačnému určení indexního čísla (ať už cenového či kvantového); jinými slovy řečeno: nelze zajistit, aby kterékoliv podskupině testů vyhovovalo pouze jediné indexní číslo.

Uvedené skutečnosti však nijak neznehodnocují úsilí Fishera, Walshe, Bowleyho a dalších o exaktnost konstrukce indexních čísel . Počet splněných axiomů (maximálně tedy 7 s vědomím určité jejich vzájemné provázanosti) vždy bude určitým (jakkoliv ne jediným) indikátorem kvality indexního čísla, s nímž pracujeme nebo jímž máme v úmyslu se teoreticky zabývat.

Pouhý počet splněných testů však nemůže být jediným vodítkem při komparaci vhodnosti návrhů jednotlivých indexních čísel. Důležitou roli hraje rovněž otázka, do jaké míry umožňuje zvolená váhová struktura vyhovět odlišnostem v poměřování vlivu komodit u jednotlivých agregátních výrazů. V tomto smyslu jsou obecně průměry "váženého typu" nadřazeny indexním číslům založeným na prostém průměrování (Carli, Jevons), neboť přinejmenším v určité míře dovedou stupeň významové odlišnosti komodit postihnout. Rovněž snaha pro objektivizaci či neutralizaci vlivu volby období, která se objevuje v konstrukci Fisherova, Edgeworthova, Walshova a Törnquistova indexu (nehledě na určitou nevýhodu související spotřebou opatřit větší množství empirických dat) staví tato indexní čísla nad "jednostranně formulovanými" indexy Paascheho či Laspeyresova typu.

Poválečnί autoři doplnili výše uvedený axiomatický soubor o některé další testy. Čtyři z nich zde uvádíme, přirozeně bez nároku na závaznost jejich pořadí:

(F9) axiom monotónnosti:

Jestliže platí $p_i(1) \leq p_i^*(1)$ **pro všechna i** při nezměněných $p(0), q(0), q(1)$, **potom vždy platí**

$$P_{01} \leq P_{01}^*.$$

Axiom říká, že taková změna cen všech komodit mezi základním a běžným obdobím, při které jsou alternativně vzaté hodnoty cen $p_i*(1)$ u všech komodit nejméně rovné původním cenám $p_i(1)$ běžného období, musí vést k indexnímu číslu, které je hodnotou aspoň stejně velké jako původní indexní číslo.

(F10) axiom střední hodnoty (W.Eichhorn – J.Voeller [1976])

$$\underset{I=1,\dots,N}{Min} \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \leq P_{01} \leq \underset{I=1,\dots,N}{Max} \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

požaduje, aby se velikost (cenového) indexního čísla nacházela mezi hodnotami nejmenší a největší individuální poměrové cenové změny.

(F11) axiom invariance vůči změnám v měřítkách (Y.Vartia [1985]).

Jestliže změníme měnovou jednotku u všech cen v obou obdobích "0" a "1", tzn. položíme-li $\boldsymbol{p}*(0) = d.\boldsymbol{p}(0)$ a $\boldsymbol{p}*(1) = d.\boldsymbol{p}(1)$, pak při libovolných proporčních změnách měrových jednotek kvantit v základním i běžném období, přičemž v každém období může jít o jinou proporční změnu v jednotkách měření kvantit, tzn. $\boldsymbol{q}*(0) = b.\boldsymbol{q}*(0)$ a $\boldsymbol{q}*(1) = c.\boldsymbol{q}*(1)$, musíme dospět k původní hodnotě indexního čísla. Jestliže tedy změněné indexní číslo (s ohvězdičkovanými veličinami) označíme $P_{01}*$, musí platit $P_{01}* = P_{01}$

Smyslem tohoto testu mj. je, aby "vážení" spotřebami probíhalo vždy srovnatelným způsobem (tedy buď spotřebami vždy ze základního nebo vždy z běžného období). Všimněme si, že tomuto testu nevyhovuje např. konstrukt objevující se na pravé straně axiomu záměny faktorů **(F2)**, pokud bychom uvažovali o jeho použití též jako jistého "indexního čísla".

(F12) axiom konzistence při mizející komoditě (E.Diewert [1992]),

vyjádřený následovně

$$\lim_{q_N(0) \to 0,\, q_N(1) \to 0} P_{01}^{(N)} = P_{01}^{(N-1)},$$

kde výrazy $P_{01}^{(N)}, P_{01}^{(N-1)}$ označují totéž indexní číslo, jednou spočtené včetně, podruhé bez určité (pro jednoduchost zápisu řekněme N-té) komodity: pokud se množství této komodity neomezeně zmenšuje, musí být limitním výrazem indexní číslo vytvořené pouze ze zbývajících

$N-1$ komodit.

Účelem tohoto axiomu je, podobně jako u **(F5)**, ošetřit situace, kdy není přítomna některá komodita a zabránit, aby při její nepřítomnosti došlo ke zhroucení hodnoty indexního čísla. Lze ho považovat za určité zpřesnění axiomu určenosti; ten sám o sobě nespecifikuje, jak má vypadat výraz při výpadku jedné nebo více komodit. Požadavku vyžadovanému testem **(F12)** zpravidla nevyhovují indexní čísla založená na geometrickém průměrování.

Naproti tomu testu okružnosti **(F4)** vyhovuje jen relativně malý počet indexních čísel. Stojí za zmínku, že v r.1979 dokázali Funke, Hacker a Voeller, že indexní číslo, které má tento axiom splňovat a současně vyhovuje určitým podmínkám regularity zaručujícím, že i z jiných hledisek půjde o „rozumné“ indexní číslo, musí mít tvar vyjádřitelný obecným (váženým) geometrickým průměrem (2.2), u kterého budou váhy – konstanty α_i splňovat podmínky $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$ a $\alpha_i > 0$ pro $i = 1,2,...,N$.

Z uvedených tedy tento axiom splňují pouze Jevonsův a Törnquistův index.

Pokud jde o axiom **(F4)**, ukázalo se, že jeho přesnou platnost lze oželet, pokud zkoumané indexní číslo vyhovuje tomuto testu aspoň s určitou přibližností. Již Irving Fisher v tomto směru shledal, že v praktických situacích, kdy pracujeme s reálnými ekonomickými daty, jsou odchylky u $P_{02}^{\ F}$ od součinu $P_{01}^{\ F}.P_{12}^{\ F}$ obvykle velmi malé. Podobná zkušenost byla získána i u dalších indexních čísel, které zacházejí symetricky v vahami, jako je Walshovo indexní číslo $P_{01}^{\ W}$, případně i jiná.

Stanovit, které z uvedených 12 testů jsou více "fundamentální" než jiné, není dost dobře možné a názory jednotlivých autorů se v hodnocení dosti liší. Přece jen však můžeme vyslovit názor, že axiomy záměny faktorů **(F2)** okružnosti **(F4)** a snad i **(F11)** bychom mohli považovat za ty, jejichž nesplnění lze bez větší újmy tolerovat. Pokud jde o „samozřejmý“ požadavek vyjádřený testem **(F8)**, lze říci, že jeho splnění je nutné ; protože však komutativita platí jak pro aditivní, tak pro multiplikativní operace (jinými slovy při aritmetickém i při geometrickém způsobu průměrování), nemá tento test z hlediska uplatnění jako diferenciační kritérium mezi různými indexními čísly valný význam.

Samotný počet splněných testů však nemůže být jediným vodítkem při komparaci vhodnosti návrhů různých indexních čísel. Důležitou roli hraje rovněž otázka, do jaké míry umožňuje zvolená váhová struktura vyhovět odlišnostem v poměřování vlivu komodit u jednotlivých agregátních výrazů. V tomto smyslu jsou obecně průměry váženého typu nadřazeny indexním číslům založeným na prostém průměrování (Carli, Jevons), neboť přinejmenším v určité míře dovedou stupeň významové odlišnosti komodit postihnout. Rovněž snaha pro objektivizaci či neutralizaci vlivu volby období, která se objevuje v konstrukci Fisherova, Edgeworthova, Walshova a Törnquistova indexu (nehledě na určitou nevýhodu související s potřebou opatřit větší množství empirických dat) staví tato indexní čísla nad "jednostranně formulované" indexy Paascheho či Laspeyresova typu.

Patrně nejpodrobnější rozvedení axiomaticko-testového přístupu lze nalézt v nedávné Diewertově práci [8], kde autor dospívá k systému celkem 20 axiomů, které člení do 5 následujících skupin :

- 4 „samozřejmé“ testy, mezi něž patří *spojitost* a *nezápornost* kteréhokoliv indexního čísla ve všech prvcích vektorů $\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{p}(1), \boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{q}(1)$, dále *test silné identity* požadující, aby

$P_{01} = 1$ vždy, když platí $\boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{p}(0)$ [23], a též symetrický požadavek ve vztahu k neměnícím se kvantitám, kde je vyžadováno, aby $P_{01} = \sum p_i(1)q_i / \sum p_i(0)q_i$ vždy, když platí $\boldsymbol{q}(1) = \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}$.

- 4 testy „homogenity“, mezi které náleží mj. *silnější verze testu úměrnosti* (F7) požadující, aby platilo $P_{01}{*} = \lambda.P_{01}$, jestliže v indexním čísle $P_{01}{*}$ operujeme s $\lambda -$násobkem cenového vektoru $\boldsymbol{p}(1)$, dále obdobný *test inverzní úměrnosti v cenách základního období* a dva *testy invariance vůči proporčním změnám v kvantitách základního a běžného období* požadující, aby se cenové indexní číslo nezměnilo, jestliže se proporčně změní kvantity v základním resp. v běžném období.
- 5 testů invariance a symetrie ; Je sem řazen *test symetrie při záměně pořadí komodit* (F8), dále *test souměřitelnosti* (F6) - zde nazýván *testem invariance vůči změnám měrových jednotek*, dále *test záměny období* (F3) a dvojice testů nazvaných *testy záměny cen*, resp. *kvantit* vyjadřující požadavky na neměnnost cenového indexního čísla při prohození kvantit základního a běžného období a stejně tak *vice versa* ve vztahu ke kvantovému indexnímu číslu.
- 3 testy střední hodnoty ; Kromě (F10) sem patří též analogický test střední hodnoty formulovaný pro Q_{01} a dále striktní požadavek na to, aby indexní číslo vždy leželo mezi Paascheho a Laspeyresovým indexním číslem, tzn. aby pro cenové platila nerovnost $P_{01}^{P} \le P_{01} \le P_{01}^{L}$.
- 4 testy monotónnosti, z nichž jedním je právě test (F9). Další 3 požadavky na monotónnost jsou zde vysloveny nejen ve vztahu ke změně cen v $\boldsymbol{p}(1)$, ale též vůči změnám v $\boldsymbol{p}(0)$, $\boldsymbol{q}(1)$, $\boldsymbol{q}(0)$.

V uvedeném Diewertově souhrnu 20 testů nejsou tedy zahrnuty zde formulované testy určenosti (F5), dále test (F12), který je jeho zesílením, ani axiom okružnosti (F4), který autor posuzuje mimo kontext bilaterálních indexů. Samostatně, jako poněkud stranou stojící 21.test je uvažován (F2).

2.4 Příklady verifikace u vybraných indexních čísel

V této části se zmíníme o přednostech a nedostatcích výše uvedených indexních čísel, přičemž za základ tohoto hodnocení vezmeme okolnost, v jakém počtu splňuje to-které indexní číslo testy uvedené v předchozí části. Za účelem úplné demonstrace verifikace jednotlivých testů si vezmeme dva příklady : Marshallovo-Edgeworthovo indexní číslo (2.15) jako příklad váženého aritmetického průměru a Törnquistovo indexní číslo (2.18) jako příklad váženého geometrického průměru.

U jiných indexních čísel se omezíme na výčet testů, která tato indexní čísla splňují. Čtenář může formou samostatného cvičení vyšetřit u kteréhokoliv indexního čísla splnění kteréhokoliv z testů, stejně tak může postupovat u indexních čísel, která si třeba sám vytvoří. Doporučujeme přitom, aby se u některých testů zamyslel rovněž nad věcným smyslem axiomu a k ověřování nepřistupoval toliko zcela mechanicky. U některých dalších typů indexních čísel (např. u mikroekonomických/funkcionálních) totiž ryze „mechanický“ postup k verifikaci jednotlivými testy uplatnit nelze. Nejprve však zmiňme několik obecnějších zásad posuzování kvality

[23] Za zmínku stojí, že z testu silné identity plyne (F1) , přičemž tato vlastnost plyne též z (F7), což ukázal již Walsh [1901].

jednotlivých indexů, které nemusí přímo souviset s počtem splněných testů.

Jednou z ústředních je obecná preference indexů váženého typu nad neváženými typy průměrů. Již jsme zmínili, že absence vah neumožňuje posuzovat věcnou významnost jednotlivých komodit v celkovém spotřebním koši a že tedy nelze brát v úvahu často velkou rozdílnost v dopadu vlivu cenových změn komodit s velmi rozdílným objemem spotřeby na peněžní výdaje spotřebitelů. Pokud jde např. o cenové indexy potravin, i případné velké cenové změny u statků s minimální spotřebou (různá koření, pochutiny apod.) budou mít zpravidla jen zanedbatelný dopad na změny ve výdajovém zatížení domácnosti. To je ovlivněno rozhodující měrou vývojem cen jiných skupin potravin : chlebem a pečivem, masem a masnými výrobky, mlékem a mléčnými výrobky, zeleninou, ovocem, obilovinami, alko- i nealkoholickými nápoji aj. Někdy sice může značná fluktuace cen u zřídkakdy konzumovaných komodit (značková vína či lihoviny) výdaje v domácnosti ovlivnit znatelněji, zpravidla však se to týká jen omezeného okruhu domácností, navíc spíše jen v určitých příležitostných obdobích (vánoce). Ani z dalších důvodů není důvod tyto ojedinělosti přeceňovat : jednak se na vyšších úrovních agregace tyto fluktuace vyrovnávají, jednak ceny v tržním prostředí málokdy zaznamenávají až tak podstatné výkyvy.

Vývoj změny celkové cenové hladiny, pokud ji vyjádříme indexními čísly představovanými neváženými průměry, bude v případech rovnocenného zahrnutí všech statků silně přeceňovat skutečný (nízký) vliv byť i výrazného cenového kolísání uvedených, v minimálním množství konzumovaných statků, tak jak ho pocítí běžná domácnost. Hlavně v tomto lze proto spatřovat slabinu Carliho/Sauerbeckova a Jevonsova indexního čísla, když už, jak dále ukážeme, ve vztahu k okruhu formulovaných testů vykazují tato (Jevonsovo zejména) vcelku příznivé vlastnosti.

Dále se všeobecně vyjádříme k **axiomu symetrie (F8)**, který zajišťuje nezávislost hodnoty indexního čísla na pořadí, v jakém zařazujeme komodity do spotřebního koše. Tento axiom je splněn všemi uvedenými indexními čísly, což je dáno platností komutativity u sčítání (v indexech aritmetického a harmonického typu) a násobení (v indexech založených na geometrickém průměru). Případné nesplnění tohoto testu by bylo velkou slabinou a těžko bychom mohli o takovém indexním čísle mluvit jako o smysluplném návrhu. Prakticky nikdy se navíc nenacházíme v situaci, kdy by byla předem stanovena nějaká závaznost pořadí (ať už odpovídající významu komodity či jiná), v němž statky do spotřebního koše zařazujeme.

2.4.1 Vyšetření vlastností Marshallova - Edgeworthova indexního čísla :

Splnění axiomu identity **(F1)** snadno prověříme ztotožněním základního a běžného období. Do (2.15) dosadíme tedy do míst, kde se nachází „1“ pro označení běžného období „0“ jako symbol základního období. Po tomto dosazení máme

$$P_{00}^{E} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(0)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(0)]} = 1 \quad , \text{ což prokazuje splnění testu identity.}$$

Pro vyšetření axiomu záměny faktorů **(F2)** musíme k danému cenovému indexnímu číslu sestrojit příslušné kvantové. To provedeme snadno záměnou cen za kvantity a *vice versa*.

(2.35) $$P^E{}_{01} \cdot Q^E{}_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i(1)\cdot[p_i(0)+p_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} q_i(0)\cdot[p_i(0)+p_i(1)]} \neq \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)} .$$

Protože požadovaná nerovnost nemá obecnou platnost, axiom **(F2)** není Edgeworthovým indexním číslem splněn.

Platnost testu záměny období **(F3)** budeme ověřovat záměnou symbolů základního a běžného období, formálně tedy záměnou „0“ za „1“ a naopak. Dostaneme

(2.36) $$P^E{}_{01} \cdot P^E{}_{10} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0).[q_i(1)+q_i(0)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot[q_i(1)+q_i(0)]} = 1$$

protože čitatel prvního zlomku je shodný se jmenovatelem druhého a opačně. Axiom **(F3)** tedy platí.

Prověření axiomu okružnosti **(F4)** vyžaduje prozkoumat platnost „řetězového“ pravidla $P^E{}_{01} \cdot P^E{}_{12} = P^E{}_{02}$. Pro Edgeworthovo indexní číslo dostáváme

$$P^E{}_{01}.P^E{}_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(2).[q_i(1)+q_i(2)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot[q_i(1)+q_i(2)]} \neq \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(2).[q_i(0)+q_i(2)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(2)]} = P^E{}_{02}$$

Ukázalo se tedy, že testu **(F4)** Edgeworthovo indexní číslo nevyhovuje. Nutnou podmínku kladenou na tvar indexních čísel, která tomuto testu vyhovují, uvedeme níže.

Posouzení platnosti axiomu určenosti **(F5)** provedeme přímo z jeho definičního tvaru (2.15) : Je patrné, že při kladných cenách a nezáporných množstvích komodit je výraz (2.15) vždy definován, má konečnou hodnotu (jeho jmenovatel nemůže být roven nule) a nemůže být identicky nulový. Zdůrazněme, že axiom posuzujeme vždy ve světle reálné situace, že alespoň některé komodity se vyskytují v základním a běžném období, tzn. že $q_i(0) > 0$ resp. $q_j(1) > 0$ pro nějaké indexy $i, j \in \{1,...,N\}$.

Přejdeme–li k ověření axiomu souměřitelnosti **(F6)**, musíme prozkoumat dopady změn měrových jednotek, ve kterých vyjadřujeme komodity (obecně každou komoditu v jiné měrové jednotce) při současně vyvolané změně jednotkových cen. U Edgeworthova čísla dostaneme:

(2.37) $$P_{01}^{E}* = \frac{\sum_{i=1}^{N} d^{-1} p_i(1)\cdot[dq_i(1)+dq_i(0)]}{\sum_{i=1}^{N} d^{-1} p_i(0)\cdot[dq_i(1)+dq_i(0)]} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot[q_i(1)+q_i(0)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(1)+q_i(0)]} = P_{01}^{E} ,$$

neboť zjednodušení násobením hodnotou d^{-1} vůči d se vesměs odehraje uvnitř jednotlivých sumací. Indexní číslo tedy po uvedené změně měrových jednotek nedozná číselné změny.

Axiom tedy platí.

Proporcionalita představovaná testem **(F7)** je u Edgeworthova indexního čísla rovněž splněna:

(2.38) $$P_{01}^{E}* = \frac{\sum_{i=1}^{N} cp_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]} = \frac{c.\sum_{i=1}^{N} p_i(0).[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]} = c ,$$

takže v případě proporční změny všech cen je výsledná hodnota indexního čísla též rovna konstantě c.

Výchozí podmínkou pro vyšetření platnosti axiomu monotónnosti **(F9)** je N-tice nerovností $p_i(1) \le p_i^*(1)$ pro všechna i při nezměněných $p(0), q(0), q(1)$. Pokud tato platí, pak též platí

(2.39) $$P_{01}^{E} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]} \le \frac{\sum_{i=1}^{N} p*_i(1).[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]} = P_{01}^{E}* ,$$

neboť v čitatelích porovnávaných výrazů vystupují v sumacích jen nezáporná čísla. Tudíž (F9) platí.

Prověření **(F10) -** axiomu střední hodnoty – nemusí být vždy jednoduché. Vyšetření u Edgeworthova indexního čísla je však snadné . Jak jsme uvedli, lze $P^{E}{}_{01}$ zapsat jako vážený aritmetický průměr

$$P^{E}{}_{01} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \qquad \text{s vahami } \alpha_i = \frac{p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot[q_j(0)+q_j(1)]}$$

, Váhy jsou nezáporné s jedničkovým součtem ; je tedy zřejmé, že – pokud podíly cenových změn nejsou všechny stejné – musí $P^{E}{}_{01}$ ležet mezi nejmenší - řekněme $p_r(1)/p_r(0)$ - a největší -řekněme $p_s(1)/p_s(0)$ - cenovou změnou Skutečně tedy platí

(2.40) $$\underset{I=1,\dots,N}{Min} \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \le P_{01}{}^{E} \le \underset{I=1,\dots,N}{Max} \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

Podobně test **(F11) -** axiom invariance vůči změnám v měřítkách kvantit - lze vyšetřit snadno:

$$P_{01}^{E}* = \frac{\sum_{i=1}^{N} dp_i(1)\cdot[bq_i(0)+cq_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} dp_i(0)\cdot[bq_i(0)+cq_i(1)]} = \frac{\left[b.\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(0) + c.\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1)\right]}{\left[b.\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0) + c.\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(1)\right]} \neq \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]} \mathrm{T}$$

Test tedy není obecně splněn (zachovává platnost toliko ve zvláštním případě $b = c$)

Konečně ukážeme, že Edgeworthovým indexním číslem je splněn test **(F12)** : Pokud se neomezeně zmenšuje některá (např. $N-tá$) komodita v základním a běžném období, pak výrazy $p_N(1)[q_N(0)+q_N(1)] \to 0$ a $p_N(0)[q_N(0)+q_N(1)] \to 0$, pokud $q_n(0) \to 0$ a

$q_n(1) \to 0$ se bez omezení blíží k nule. Limitou tohoto procesu se stane výraz představující opět Edgeworthův index spočtený však tentokrát pouze z $N-1$ komodit.

2.4.2 Vyšetření vlastností Törnquistova indexního čísla :

Připomeňme příslušný definiční výraz

$$P_{01}^{T} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{w_i} \tag{2.18}$$

$$\text{kde} \quad w_i = 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \right) + 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) \cdot q_j(1)} \right) \quad , \tag{2.18a}$$

Test identity **(F1)** je Törnquistovým indexem zřejmě splněn. Dosadíme-li totiž $p_i(0) = p_i(1)$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, N$, bude bez ohledu na volbu vah w_i vždy platit

$$P_{01}^{T} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(0)}{p_i(0)} \right)^{w_i} = 1$$

Naproti tomu test záměny faktorů **(F2)** splněn není, což je zřetelně patrné z následujícího :

$$P_{01}^{T} . Q_{01}^{T} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{w_i} \cdot \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)} \right)^{w_i} \neq \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) q_i(0)} \tag{2.41}$$

Axiom **(F3)** zřejmě platí, neboť

$$P_{01}^{T} . P_{10}^{T} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{w_i} \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(0)}{p_i(1)} \right)^{w_i} = \frac{\prod_{i=1}^{N} (p_i(1))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{N} (p_i(0))^{w_i}} . \frac{\prod_{i=1}^{N} (p_i(0))^{w_i}}{\prod_{i=1}^{N} (p_i(1))^{w_i}} = 1 \tag{2.42}$$

Všimněme si, že ověřování testů (F2) a (F3) nevyžadovalo detailní rozepsání vah w_i, protože tyto jsou u Törnquistova indexu symetrické jak v obdobích „0“ – „1“, tak při záměně cen za kvantity a naopak, tj. váhy jsou symetrické v p a q.

Test tranzitivity **(F4)** vyšetříme obvyklým postupem (zde již musíme váhy detailně rozepsat) :

$$P_{01}^T.P_{12}^T = \prod_{i=1}^N \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{\frac{p_i(0)q_i(0)}{2.\sum p_j(0)q_j(0)}+\frac{p_i(1)q_i(1)}{2.\sum p_j(1)q_j(1)}} \prod_{i=1}^N \left(\frac{p_i(2)}{p_i(1)}\right)^{\frac{p_i(1)q_i(1)}{2.\Sigma p_j(1)q_j(1)}+\frac{p_i(2)q_i(2)}{2.\Sigma p_j(2)q_j(2)}} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^N (p_i(1))^{\frac{p_i(0)q_i(0)}{2.\sum p_j(0)q_j(0)}+\frac{p_i(1)q_i(1)}{2.\sum p_j(1)q_j(1)}}}{\prod_{i=1}^N (p_i(0))^{\frac{p_i(0)q_i(0)}{2.\Sigma p_j(0)q_j(0)}+\frac{p_i(1)q_i(1)}{2.\Sigma p_j(1)q_j(1)}}} . \frac{\prod_{i=1}^N (p_i(2))^{\frac{p_i(1)q_i(1)}{2.\sum p_j(1)q_j(1)}+\frac{p_i(2)q_i(2)}{2.\sum p_j(2)q_j(2)}}}{\prod_{i=1}^N (p_i(1))^{\frac{p_i(1)q_i(1)}{2.\sum p_j(1)q_j(1)}+\frac{p_i(2)q_i(2)}{2.\sum p_j(2)q_j(2)}}} =$$

$$\neq \frac{\prod_{i=1}^N (p_i(2))^{\frac{p_i(0)q_i(0)}{2.\sum p_j(0)q_j(0)}} \prod_{i=1}^N (p_i(2))^{\frac{p_i(2)q_i(2)}{2.\Sigma p_j(2)q_j(2)}}}{\prod_{i=1}^N (p_i(0))^{\frac{p_i(0)q_i(0)}{2.\Sigma p_j(0)q_j(0)}} \prod_{i=1}^N (p_i(0))^{\frac{p_i(2)q_i(2)}{2.\Sigma p_j(2)q_j(2)}}} = P^T{}_{02}$$

Vyšetření axiomu určenosti **(F5)** znamená toliko provést úvahu o povaze definičních výrazů (2.18), (2.18a) : Je zřejmé, že při kladných cenách v obou obdobích a při přítomnosti aspoň jedné komodity v základním a běžném období jsou definovány jak váhy w_i, tak i Törnquistův index sám.

Test souměřitelnosti **(F6)** vyžaduje provést vyšetření

$$P_{01}^T{*} = \prod_{i=1}^N \left(\frac{d^{-1}p_i(1)}{d^{-1}p_i(0)}\right)^{\frac{d^{-1}p_i(0).d.q_i(0)}{2\sum d^{-1}p_j(0).dq_j(0)}+\frac{d^{-1}p_i(1).d.q_i(1)}{2\sum d^{-1}p_j(1)d.q_j(1)}} = \prod_{i=1}^N \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{\frac{p_i(0).q_i(0)}{2\sum p_j(0).q_j(0)}+\frac{p_i(1).q_i(1)}{2\sum p_j(1).q_j(1)}} = P_{01}^T$$

I souměřitelnosti je tedy vyhověno.

Axiom proporčnosti **(F7)** je Törnquistovým indexem rovněž splněn, neboť

$$P_{01}^{T*} = \prod_{i=1}^N \left(\frac{cp_i(0)}{p_i(0)}\right)^{\frac{p_i(0)q_i(0)}{2.\sum p_j(0)q_j(0)}+\frac{c.p_i(0)q_i(1)}{2.\sum cp_j(0)q_j(1)}} = c.^{\sum_{i=1}^N \frac{p_i(0)q_i(0)}{2.\Sigma p_j(0)q_j(0)}+\frac{c.p_i(0)q_i(1)}{2.\Sigma cp_j(0)q_j(1)}} \prod_{i=1}^N 1^{\frac{p_i(0)q_i(0)}{2.\sum p_j(0)q_j(0)}+\frac{c.p_i(0)q_i(1)}{2.\sum cp_j(0)q_j(1)}}$$

(2.43)

$$= \quad c.^{\sum_{i=1}^N \frac{p_i(0)q_i(0)}{2.\Sigma p_j(0)q_j(0)}+\frac{c.p_i(0)q_i(1)}{2.\Sigma cp_j(0)q_j(1)}} = c^{1/2+1/2} = c.$$

Dále podrobíme Törnquistův index vyšetření axiomu střední hodnoty (F10). Připomeneme-li jeho tvar (2.18), (2.18a) je patrné, že logaritmováním dostaneme

$$\log(\frac{p_r(1)}{p_r(0)}) \leq \log(P_{01}^T) = \sum_{i=1}^N w_i.\log(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}) \leq \log(\frac{p_s(1)}{p_s(0)})$$

a protože nezáporné váhy w_i v (2.18a) jsou normovány na jedničkový součet, je zřejmé, že Törnquistův index musí ležet mezi nejmenší a největší podílovou cenovou změnou:

(2.44) $$\frac{p_r(1)}{p_r(0)} = Min\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \qquad \frac{p_s(1)}{p_s(0)} = Max\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

Logaritmická transformace (spojitá, rostoucí) zřejmě nemění nic na platnosti původních relací.

Slabinou Törnquistova indexního čísla je však obecné nesplnění axiomu monotónnosti **(F9)**. Protože to nemusí být z pohledu na výraz (2.18) bezprostředně patrné, popíšeme situaci, která to blíže osvětlí. Uvažujme protipříklad tvořený spotřebním košem sestávajícím pouze ze 2 komodit. V tomto případě se index redukuje na tvar

$$P_{01}^{T} = \left(\frac{p_1(1)}{p_1(0)}\right)^{w_1} \cdot \left(\frac{p_2(1)}{p_2(0)}\right)^{w_2}$$

Budeme tedy hledat takový dvoukomoditní případ, kdy platí :

$$\left(\frac{p_1(1)}{p_1(0)}\right)^{w_1}\left(\frac{p_2(1)}{p_2(0)}\right)^{w_2} > \left(\frac{p^*{}_1(1)}{p_1(0)}\right)^{w_1*}\left(\frac{p^*{}_2(1)}{p_2(0)}\right)^{w_2*} \qquad (2.45)$$

přestože v něm pro váhy platí $p_i(1) \leq p^*{}_i(1); i = 1,2.$.

Příklad 1 Nesplnění axiomu **(F9)** Törnquistovým indexním číslem:

Vezměme případ dvou komodit a zvolme pro základní období tyto hodnoty cen a kvantit :

$$p_1(0) = 1 \qquad p_2(0) = 100 \qquad q_1(0) = 100 \qquad q_2(0) = 1$$

Pro běžné období uvažujme alternativně následující hodnoty :

$$p_1(1) = 1000 \qquad p_2(1) = 1 \qquad q_1(1) = 1 \qquad q_2(1) = 100$$
$$p_1{}^*(1) = 1000 \qquad p_2{}^*(1) = 10 \qquad q_1{}^*(1) = q_1(1) \qquad q_2{}^*(1) = q_2(1)$$

Zřejmě je splněna premisa $p_i(1) \leq p^*{}_i(1)$, přičemž v první podílové složce platí neostrá, ve druhé ostrá nerovnost. Podílové cenové změny budou zřejmě :

$$\frac{p_1(1)}{p_1(0)} = 1000 \qquad \frac{p_2(1)}{p_2(0)} = 0{,}01 \qquad \frac{p_1{}^*(1)}{p_1(0)} = 1000 \qquad \frac{p_2{}^*(1)}{p_2(0)} = 0{,}1$$

Váhy v geometrických průměrech budou nyní

$$w_1 = 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_1(0)\cdot q_1(0)}{p_1(0)\cdot q_1(0) + p_2(0)\cdot q_2(0)}\right) + 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_1(1)\cdot q_1(1)}{p_1(1)\cdot q_1(1) + p_2(1)\cdot q_2(1)}\right) = 0{,}5.\frac{100}{200} + 0{,}5.\frac{1000}{1100}$$

$$w_2 = 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_2(0)\cdot q_2(0)}{p_1(0)\cdot q_1(0) + p_2(0)\cdot q_2(0)}\right) + 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_2(1)\cdot q_2(1)}{p_1(1)\cdot q_1(1) + p_2(1)\cdot q_2(1)}\right) = 0{,}5.\frac{100}{200} + 0{,}5.\frac{100}{1100}$$

$$w_1^* = 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_1(0)\cdot q_1(0)}{p_1(0)\cdot q_1(0) + p_2(0)\cdot q_2(0)}\right) + 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_1{}^*(1)\cdot q_1{}^*(1)}{p_1(1)^*\cdot q_1{}^*(1) + p_2{}^*(1)\cdot q_2{}^*(1)}\right) = 0{,}5.\frac{100}{200} + 0{,}5.\frac{1000}{2000}$$

$$w_2^* = 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_2(0)\cdot q_2(0)}{p_1(0)\cdot q_1(0) + p_2(0)\cdot q_2(0)}\right) + 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_2{}^*(1)\cdot q_2{}^*(1)}{p_1{}^*(1)\cdot q_1{}^*(1) + p_2{}^*(1)\cdot q_2{}^*(1)}\right) = 0{,}5.\frac{100}{200} + 0{,}5.\frac{1000}{2000}$$

Odtud máme

$$w_1 = 0{,}70455 \qquad w_2 = 0{,}29555 \qquad w_1{*} = 0{,}500 \qquad w_2{*} = 0{,}500$$

Dosadíme nyní spočtené váhy do obou výrazů

$$(2.46) \qquad \prod_{i=1}^{2}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{w_i} = 1000^{0,7045}.0{,}01^{0,2955} \text{ resp. } \prod_{i=1}^{2}\left(\frac{p{*}_i(1)}{p_i(0)}\right)^{w_i{*}} = 1000^{0,5}.0{,}1^{0,5}$$

Vyčíslením snadno zjistíme, že platí :

$$1000^{0,7045}.0{,}01^{0,2955} \cong 33{,}32 > 10 = 1000^{0,5}.0{,}1^{0,5} \qquad \square$$

.

Podílové cenové změny jsme u 1.komodity v jednotlivých případech volili tak, aby došlo k 1000-násobnému zvýšení, naopak u 2. komodity pak v prvém případě činil cenový pokles 100-násobné snížení, ve druhém pak „jen“ 10-násobné snížení. Změny v množstvích komodit vykazují, jak patrno, protichůdnou tendenci : u první komodity dochází ke 100-násobnému snížení, u druhé ke 100-násobnému zvýšení.

Z příkladu lze vypozorovat toto : K porušení podmínky monotónnosti může dojít tehdy, když váha přisouzená k té podílové cenové změně, jejíž hodnota se pro oba případy nezmění (zde $p_1(1)/p_1(0) = p_1^*(1)/p_1(0) = 1000$), příp. změní velmi málo, dozná výrazné snížení (0,500 oproti 0,7045), se vztahuje k vysokému základu (zde 1000), který je touto změnou silně ovlivněn, zatímco protisměrná změna vah (zde u 2. komodity, u níž váha klesne z 0,500 na 0,2955 – *má-li se zachovat jedničkový součet vah v exponentech výrazů na obou stranách*) – se projeví podstatně slabší měrou vlivu. U druhé komodity jsou totiž základy tvořené podílovými cenovými změnami podstatně menší : $p_2(1)/p_2(0) = 0{,}01$ a $p_2^*(1)/p_2(0) = 0{,}1$.

Volbou ještě extrémnějších tendencí ve vývoji cenových a množstevních poměrů lze dosáhnout ještě výraznějších disproporcí mezi oběma stranami výrazu (2.41) ve prospěch jeho levé strany. Čtenář se o tom může ostatně přesvědčit vlastním experimentováním.

Přejdeme-li k testu **(F11)**, vidíme, že násobení cen konstantou c neovlivní ani výrazy v součinu

$$P_{01}^{T} = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{w_i}$$

přičemž násobení kvantit konstantami b, d , kde příslušný výraz lze zapsat jako

$$w_i = 0{,}5\cdot\left(\frac{p_i(0)\cdot b.q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot b.q_j(0)}\right) + 0{,}5\cdot\left(\frac{p_i(1)\cdot d.q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot d.q_j(1)}\right) ,$$

vede po zkrácení opět k výrazu (2.18.a). Axiom tudíž platí.

Konečně verifikace testem **(F12)** znamená vyšetření platnosti podmínek

$$\lim \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{w_i} = \lim(\frac{P_N(1)}{P_N(0)})^{w_N} . \prod_{i=1}^{N-1}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{w_i} = Q . \lim(\frac{P_N(1)}{P_N(0)})^{w_N} \quad \text{, kde}$$

$$q_N(0), q_N(1) \to 0 \qquad q_N(0), q_N(1) \to 0 \qquad\qquad q_N(0), q_N(1) \to 0$$

(2.47) $$w_N = 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_N(0) \cdot .q_N(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot b.q_j(0)} \right) + 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_N(1) \cdot .q_N(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_N(1) \cdot .q_N(1)} \right) \quad , \quad Q = .\prod_{i=1}^{N-1} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{w_i}$$

Je zřejmé, že při uvažovaném limitním přechodu budou obě mít složky výrazu váhy nulové (jmenovatele přitom zůstanou nenulové), takže podíl

(2.48) $$\left(\frac{P_N(1)}{P_N(0)}\right)^{w_N} = \left(\frac{P_N(1)}{P_N(0)}\right)^{0} = 1$$

a celý výchozí výraz nabude po limitním přechodu hodnotu Q, která představuje Törnquistův index spočtený jen z $N-1$ komodit. Postup je nicméně oprávněný jen potud, pokud připustíme existenci $N-té$ ceny – v základním a běžném období – i tehdy, pokud v těchto obdobích neexistuje $N-tý$ statek. Jinak by výraz $\left(\frac{p_N(1)}{p_N(0)}\right)^{w_N}$ definován nebyl.

Mimochodem, axiomu **(F12)** vyhovují i všechny výše uvedené indexy aritmetického typu. Ubrání $N-té$ komodity znamená zkrácení výrazů v sumacích vždy jen o poslední člen $p_N(*)q_N(*)$, Také posuzování platnosti testu ve vztahu k Jevonsovu (cenovému) indexu, v němž se neuplatňují kvantity, záleží na posouzení, zda přiznáme oprávněnost existence „ceny bez statku“. Kladná odpověď na tuto otázku vede k akceptování testu, záporná nikoliv.

2.4.3 Poznámky k verifikaci některými testy

Obecněji zkoumáno, platnost axiomu monotónnosti **(P9)** je splněna u všech indexních čísel, která lze zapsat jako (prosté nebo vážené) aritmetické. Pokud lze indexní číslo zapsat jako

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \text{ s vhodnou volbou vah } \alpha_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \qquad ,$$

a zvolíme-li dva vektory $p_i(1), p_i*(1)$, pro které platí $p_i(1) \leq p_i*(1)$, pak je zřejmé, že vždy bude platit podmínka

(2.49) $$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{p*_i(1)}{p_i(0)} \qquad .$$

Odtud a z předchozího textu je zřejmé např. že indexní čísla Paascheho, Laspeyresovo, Edgeworthovo, Walshovo splňují test **(P9)**, neboť je lze zapsat jako příslušné aritmetické průměry. Zřejmě je axiom splněn i Fisherovým indexním číslem.

Stejná podmínka však už plně neplatí u geometrického způsobu průměrování: Zatímco např. u Jevonsova indexního čísla je podmínka

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p*_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\alpha_i}$$

očividně při $p_i(1) \leq p_i*(1)$ splněna pro libovolnou přípustnou volbu vah α_i, neplatí totéž, jak bylo již dokázáno, u Törnquistova indexu.

Axiom střední hodnoty **(F10)** rovněž obecně platí u indexních čísel, která lze zapsat jako vážené aritmetické či geometrické průměry. Pokud lze totiž indexní číslo zapsat ve tvaru

(2.50) $$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \text{ s vhodnou volbou vah } \alpha_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \quad ,$$

pak je zřejmé, že bude automaticky splněn požadavek

(2.51) $$\underset{I=1,\dots,N}{Min} \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \leq P_{01}^{E} \leq \underset{I=1,\dots,N}{Max} \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

a že rovnost nastane (pokud aspoň pro jeden statek platí, že $p_i(1)/p_i(0) \neq c$, takže nerovnosti nejsou splněny jako rovnosti) při volbě vah

$$\alpha_r = (0,0,\dots 0,1,0,\dots,0), \text{ resp. } \alpha_s = (0,0,\dots,0,1,0,\dots,0), \qquad \text{kde}$$

se jedničky jako jediné nenulové prvky nacházejí na r-tém, resp. s-tém místě. V ostatních případech leží P_{01}^{*} mezi hodnotami největšího a nejmenšího poměru. Uvedené konstatování platí ve vztahu k P_{01}^{S}, P_{01}^{L}, P_{01}^{P} ,P_{01}^{W}, P_{01}^{E}, která lze všechna vyjádřit ve tvaru (2.46).

V podstatě stejná situace nastane u geometrických průměrů tvaru $\prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\alpha_i}$, které - za shodných podmínek pro váhy α_i - rovněž musí hodnotou ležet mezi nejmenším a největším poměrem $p_i(1)/p_i(0)$. Tím je řečeno, že Jevonsovo i Törnquistovo indexní číslo splňují axiom **(F10)** .

Vartiovu požadavku **(F11)** vyhovují zřejmě indexy Paascheho, Laspeyresův (tedy i Fisherův), Walshův a – jak bylo výše ilustrováno – též Törnquistův.

Test silné identity **(F1s)** znamená ve srovnání s testem formulovaným jako **(F1)** požadavek, aby neutrální hodnoty 1 bylo dosaženo vždy, když dojde ke shodě vektorů $p(1)$ a $p(0)$ bez ohledu na hodnoty množstevních vektorů $q(0), q(1)$. Přijatá formulace „slabšího" testu **(F1)** implicitně předpokládá navíc shodu $q(0) = q(1)$.

Povšimněme si, že test silné identity **(F1s)** je splněn vždy, když indexní číslo vyhovuje testu úměrnosti **(F7)**, neboť je jeho speciálním případem, jestliže konstantu úměrnosti zvolíme jako $c = 1$. Znamená to tedy mj., že i splnění testu **(F1)** je důsledkem platnosti **(F7)**.

Testu invariance vůči změně měřítka **(F11)** vyhovují jak Paascheho, tak Laspeyresův index, ostatně jako všechna indexní čísla zapsatelná pomocí Löweova indexu (2.21). Nesplňuje ho však např. tzv. „index laiků", kterým je výraz stojící na pravé straně testu záměny faktorů **(F2)**, neboť.

$$P_{01}^{LI*} = \frac{\sum_{i=1}^{N} dp_i(1) \cdot bq_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} dp_i(0) \cdot cq_i(0)} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}$$

Porovnáme-li pomocí tohoto testu jinak „kvalitativně“ velmi blízká indexní čísla Edgeworthovo a Walshovo, zaznamenáme přednost druhého z obou jmenovaných, neboť

$$P_{01}^{W}* = \frac{\sum_{i=1}^{N} dp_i(1)\cdot\sqrt{bq_i(0).cq_i(1)}}{\sum_{i=1}^{N} dp_i(0)\sqrt{bq_i(0).cq_i(1)}\cdot} = \frac{d.\sqrt{bc}.\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot\sqrt{q_i(0).q_i(1)}}{d.\sqrt{bc}.\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\sqrt{q_i(0).q_i(1)}\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot\sqrt{q_i(0).q_i(1)}}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\sqrt{q_i(0).q_i(1)}} = P_{01}^{W}$$

zatímco Edgeworthovo testu (F11) nevyhovuje, jak jsme již ukázali výše.

Poznamenejme ještě, že na rozdíl od testu souměřitelnosti **(F5)** se význam testu **(F11)** vztahuje primárně k proporční změně měrových jednotek cen (tzn. např. ke změně měnových jednotek, jakou je přechod z korun na americké dolary, japonské jeny či eura) bez přímé vazby k jednotkám spotřeb komodit - ty se mohou měnit s různými konstantami úměrnosti v základním a běžném období. Test je v porovnání s **(F5)** přísnější.

2.4.4 Vlastnosti některých dalších indexních čísel

Vezmeme-li dvojici (2.13) a (2.14), zjistíme, že Laspeyresovo i Paascheho indexní čísla splňují axiomy **(F1), F(5), (F6), (F7)**, a dále **(F8) - (F12)**. V tomto směru je s nimi srovnatelné též Sauerbeckovo/Carliho indexní číslo, které vyhovuje stejnému okruhu axiomů, ovšem sama možnost použití vah (bez toho, že bychom se striktně omezili jen na hledisko počtu splněných axiomů) staví Laspeyresův i Paascheho index z hlediska výstižnějšího postižení ekonomické reality zřetelně výše.

U Edgeworthova návrhu (2.15) jsme prokázali navíc splnění testu záměny období **(F3).** Ke stejným výsledkům bychom dospěli v případě Walshova indexu (2.16). Naproti tomu Fisherovo ideální indexní číslo (2.17) se může pochlubit navíc dále splněním axiomu záměny faktorů **(F2) -** nesplňuje tedy pouze test okružnosti (F4) .

Jevonsovo indexní číslo splňuje axiomy **(F1), (F3), (F4), (F6) a (F7)**. Platnost **(F5)** je podmíněna přítomností všech komodit (s kladnými jednotkovými cenami) v základním období. Naproti tomu, konstatováno obecněji, indexní čísla vycházející z geometrického průměrování nevyhovují testu **(F2).**

Krátce se ještě zmiňme o jinak primitivním **Dutotově indexu** : Jeho formální tvar

(2.52)
$$P_{01}^{\ D} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)}$$

vychází vlastně z podílu prostých aritmetických průměrů

$$\overline{p}(1) = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)}{N} \qquad \text{a} \qquad \overline{p}(0) = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)}{N}$$

Pokud jde o počet splněných testů, nepůsobí tento index nijak inferiorním dojmem. Na první pohled je zřejmé, že jsou splněny testy **(F1)** , **(F3)** , **(F5)** , **(F7)** , symetrie **F(8)** , monotónnosti **(F9)** a dokonce i test okružnosti **(F4) .** Okamžitě je též patrné, že index nesplňuje axiom záměny faktorů **(F2).** Test souměřitelnosti **(F6)** je sice formálně nevyhodnotitelný (v indexním čísle $P_{01}^{\ D}$ se stejně jako u Sauerbeckova či Jevonsova indexu neoperuje s kvantitami), nicméně z pohledu daného širším smyslem testu jej lze pokládat rovněž za splněný. V podstatě totéž můžeme říci ve vztahu k Vartiově testu invariance **(F11)** a k testu **(F12)**. Pro úplnost vyšetříme ještě test střední hodnoty **(F10)**, jehož platnost nemusí být na první pohled zřejmá. Znamená to prověřit, zda platí

$$(2.53) \qquad \frac{p_r(1)}{p_r(0)} = Min\,[\frac{p_i\{1\}}{p_i\{\}}] \;\leq\; \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i())} \leq Max\,[\frac{p_i\{1\}}{p_i\{\}}] \;=\; \frac{p_s(1)}{p_s(0)} \qquad , \quad \text{kde}$$

jsme indexem r označili nejmenší a indexem s největší podílovou cenovou změnu. Ukážeme, že nerovnosti skutečně platí: vezměme vztah nerovnosti vůči minimu.
Z předpokladu

$$\frac{p_r(1)}{p_r(0)} \leq \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \qquad \text{platného pro všechna } i = 1{,}2...,N$$

plyne, že vždy platí $p_r(1).p_r(0) \leq p_r(0).p_r(1)$ pro všechna $i = 1{,}2...,N$. Proto také musí platit

$$.\sum_{i=1}^{N} p_r(1)p_i(0) \leq .\sum_{i=1}^{N} p_r(0)p_i(1)$$

Protože jak $p_r(0)$, tak $p_r(1)$ jsou nezávislé na indexní proměnné i, je tato nerovnost identická s

$$p_r(1).\sum_{i=1}^{N} p_i()) \leq p_r(0).\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \qquad .$$

Vydělením relace součinem $p_r(0).\sum_{i=1}^{N} p_i())$ dostáváme levou nerovnost v (2.48). Analogicky bychom získali i druhou nerovnost v (2.48) . Až potud by měl Dutotův index zcela uspokojivé vlastnosti.

Co však rozhodující měrou degraduje Dutotův index a odkazuje ho do sféry praktické nepoužitelnosti, je okolnost, že index $P_{01}^{\ D}$ - jako jediný z dosud uváděných - není založen na průměrování cenových změn $p_i(1)/p_i(0)$, nýbrž ceny komodit samotné se v každém období aditivně sčítají a až následně je index vyjádřen jako jejich podíl. Z tohoto hlediska nelze mluvit o srovnatelném měřítku cen, neboť tyto nemají povahu jednotkových cen (není vůbec zřejmé, k jakému množství komodity se cena vztahuje). I kdybychom však v myslitelných případech jednotné množstevní měřítko přijali (např. kg), zůstal by fundamentální problém srovnatelnosti cen, neboť např. v potravinovém spotřebním koši bychom sčítali ceny chleba, pečiva, brambor a rýže (se spotřebou v domácnosti v desítkách kg za rok) s cenami pochutin, koření a dalších, v pouze nepatrných množstvích zužitkovávaných potravin. Při přechodu na vyšší stupeň agregace (např. spotřební koš pro CPI), kde statky vůbec nemusí mít společné měrové jednotky, bychom se dostali již do zcela neřešitelné situace.

O tom, že „na způsobu průměrování záleží“ se lze přesvědčit i tak, že místo Fisherova indexu (2.17) budeme uvažovat příbuzný index, kterým se zabývali Drobisch, H.Sidgwick a

A.L.Bowley[24] a který Laspeyresovo a Paascheho indexní číslo průměruje aritmeticky. Přijměme zde označení písmenem „B“ (ve vztahu ke třetímu z autorů, neboť „D“ jsme již výše vyhradili pro Dutotův index)

(2.54) $$P_{01}{}^{B} = 1/2.(P_{01}{}^{L} + P_{01}{}^{P})$$

Toto indexní číslo – ve srovnání s Fisherovým indexem – nevyhovuje ani testu záměny faktorů **(F3)** ani testu záměny období **(F2)**, jak se lze přesvědčit jednoduchým průzkumem :

$$P_{10}{}^{B} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(1)q_i(1)} + \frac{\sum p_i(0)q_i(0)}{\sum p_i(1)q_i(0)}\right) = 1/2.\left(\frac{1}{P_{01}{}^{P}} + \frac{1}{P_{01}{}^{L}}\right) = (P_{01}{}^{L} + P_{01}{}^{P})/(2.P_{01}{}^{L}P_{01}{}^{P}) \neq \frac{1}{P_{01}{}^{B}}$$

Podobně také

$$P_{01}{}^{B}.Q_{01}{}^{B} = 1/4.\left(\left(\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} + \frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(1)}\right).\left(\frac{\sum q_i(0)p_i(1)}{\sum q_i(0)p_i(0)} + \frac{\sum q_i(1)p_i(1)}{\sum q_i(0)p_i(1)}\right)\right) \neq \frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)}$$

Pro úplnost dodejme, že toto indexní číslo nesplňuje stejně jako Fisherův index test **(F4)**.

2.5 Walshův postup

Se jménem C.M. Walshe se setkáváme ještě v jedné souvislosti. Právě on totiž navrhl postup, kterým lze jakékoliv “klasické” indexní číslo převést na konstrukt, který bude zaručeně splňovat axiom záměny faktorů **(F2)**. Stačí k tomu, abychom k libovolné dvojici cenového a kvantového indexního čísla P_{01}^{*}, Q_{01}^{*} zavedli příslušné “Walshovy modifikace” P_{01}^{*W}, Q_{01}^{*W} tímto způsobem :

(2.55) $$P_{01}^{*W} = \sqrt{\frac{P_{01}^{*}}{Q_{01}^{*}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}}$$

(2.56) $$Q_{01}^{*W} = \sqrt{\frac{Q_{01}^{*}}{P_{01}^{*}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}}$$

Pro ilustraci tohoto postupu vyjděme např. z Laspeyresova indexního čísla (nevyhovujícího, jak uvedeno, testu záměny faktorů). Vytvořme nyní pro obě čísla z dvojice P_{01}^{L}, Q_{01}^{L} příslušné Walshovy modifikace P_{01}^{LW} a Q_{01}^{LW} výše zmíněnou úpravou. Po dosazení a následném vykrácení dvou ze tří přítomných výrazů $\sum p_i(0)\cdot q_i(0)$ dostaneme pro cenové P_{01}^{LW}

24 Bowley, A.L.: Wages, Nominal and Real. In: Palgrave, R.H.I.: Dictionary of Political Economy, Vol.3. London, Macmillan [1899]., s. 640-641.

Též Sidgwick, H. „The Principles of Political Economy. London, Macmillan [1883].

$$P_{01}^{LW} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}} = \sqrt{P_{01}^{L}\cdot P_{01}^{P}} = P_{01}^{F}$$

a podobně pro kvantové Q_{01}^{LW}

$$Q_{01}^{LW} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}} = \sqrt{Q_{01}^{L}\cdot Q_{01}^{P}} = Q_{01}^{F}$$

Jak patrno, uvedeným postupem dospějeme k dvojici Fisherových cenových a kvantových indexních čísel P_{01}^{F}, Q_{01}^{F}. Lze se snadno přesvědčit (ponecháváme na čtenáři), že k témuž výsledku dospějeme, pokud místo Laspeyresových vezmeme za výchozí dvojici Paascheho indexní čísla P_{01}^{P}, Q_{01}^{P} .

Poznámka 1 Čtenář si možná povšiml, že k zajištění platnosti testu **(F2)** bychom v (2.55) nemuseli nutně operovat s podílem $P_{01}*/Q_{01}*$, resp. v (2.56) s jeho reciprokou hodnotou, nýbrž by stačilo vzít podíl jakýchkoliv dvou výrazů, které by byly rozumně interpretovatelné jako cenové a kvantové indexní číslo. Problém ovšem nastává v tom, že obecná volba

$$P_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}}\cdot\frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)}} \qquad Q_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{B_{01}}{A_{01}}\cdot\frac{\sum p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum p_i(0)\cdot q_i(0)}}$$

zaručující splnění **(F2)** se obvykle ukáže jako nevhodná ve světle potřeby splnění dalších testů. Jako příklad lze uvést test proporčnosti **(F7)**, kde požadujeme, aby platilo

$$P_{01}^{cAB} = c, \quad \text{avšak obecně} \quad .P_{01}^{cAB} = \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}}\cdot\frac{\sum c.p_i(0)\,q_i(1)}{\sum .p_i(0)\,q_i(0)}} = \sqrt{c}.\sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}}\cdot\frac{\sum .p_i(0)\,q_i(1)}{\sum .p_i(0)\,q_i(0)}}$$

a ničím není zaručeno, že výraz v poslední odmocnině je aspoň blízký hodnotě $\sqrt{c}$.

U Walshem navrženého postupu naproti tomu dostáváme

$$P_{01}^{cW} = \sqrt{\frac{c.}{Q_{01}^{*}}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N} c.p_i(0)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}} = c.\sqrt{\frac{1}{Q_{01}^{*}}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N} .p_i(0)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}}$$

pokud $P*_{01}$ vyhovuje testu **(F7)**, což např. platí pro $P^{L}{}_{01}$ nebo $P^{P}{}_{01}$, přičemž pravděpodobnost (aspoň přibližného) splnění toho, že výraz v odmocnině je roven 1, může být poměrně vysoká. Pokud za $Q*_{01}$ vezmeme $Q^{L}{}_{01}$, pak rovnost platí přesně.

2.6 von Bortkiewiczova relace

I když je konstrukce většiny výše uvedených "klasických indexních čísel" vcelku jednoduchá, přesto lze v některých případech zkoumat hlubší "strukturální" vlastnosti jejich vzájemných vztahů. Případná vyvozená zjištění mohou vysvětlit např. podmínky, za jakých je hodnota jednoho indexního čísla zpravidla či systematicky větší než jiného. Ne vždy je totiž vzájemný vztah tak očividný jako např. u Fisherova čísla, jehož hodnota v důsledku konstrukce musí vždy ležet mezi Laspeyresovým a Paascheho indexním číslem.

Pruský matematik a ekonom Ladislaus Josefovič von Bortkiewicz odvodil užitečnou strukturální relaci mezi Laspeyresovým a Paascheho indexním číslem, která může mj. napomoci vzájemnému posouzení číselných hodnot obou jmenovaných IČ. Vztah po něm nazývaný vyjadřuje podíl obou těchto IČ v pojmech běžných statistických veličin. Formulujme ho konkrétně :

(2.57) $$B = \frac{P_{01}^{P}}{P_{01}^{L}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}} = 1 + \frac{S_{\frac{p1}{p0}}}{E_{\frac{p1}{p0}}}\cdot\frac{S_{\frac{q1}{q0}}}{E_{\frac{q1}{q0}}}\cdot r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}}$$

V (2.57) přítomné symboly mají následující význam :

$E_{\frac{p1}{p0}}$ označuje vážený aritmetický průměr cenových poměrových změn $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ s vahami tvaru $w_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}$. $E_{\frac{p1}{p0}}$ představuje tedy přímo Laspeyresovo cenové indexní číslo P_{01}^{L} .

Obdobně $E_{\frac{q1}{q0}}$ označuje vážený aritmetický průměr změn kvantit $\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$ s týmiž vahami, neboli tento výraz je Laspeyresovým kvantovým indexním číslem Q_{01}^{L}. Analogicky pak $s_{\frac{p1}{p0}}$ označuje výběrovou směrodatnou odchylku cenových poměrových změn $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ s vahami $w_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}$ a podobně symbol $s_{\frac{q1}{q0}}$ představuje směrodatnou odchylku změn kvantit $\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$ s týmiž vahami.

Poznámka 2 Jak známo, podíl směrodatné odchylky a příslušné střední hodnoty se nazývá variační koeficient, takže (v prostředí s vahami) jsou dva výrazy v součinu pro B variačními koeficienty. Ty jsou zřejmě v důsledku kladných cen a nezáporných kvantit také nezáporné. Konečně poslední výraz pravé strany $r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}}$ není nic jiného než vážený párový korelační koeficient mezi poměrově vyjádřenými cenovými a kvantovými změnami. Formálně zapsáno:

$$r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}} = \frac{\operatorname{cov}\left(\frac{p_1}{p_0},\frac{q_1}{q_0}\right)}{S_{\frac{p1}{p0}} \cdot S_{\frac{q1}{q0}}},$$ kde výraz pro váženou kovarianci v čitateli zlomku je roven

(2.58) $$\operatorname{cov}\left(\frac{p_1}{p_0},\frac{q_1}{q_0}\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)} \cdot \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - E_{\frac{p1}{p0}}\right)\cdot\left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)} - E_{\frac{q1}{q0}}\right)$$

Platnost Bortkiewiczova poměru (2.57) vyvodíme z následujících vztahů používaných v matematické i v popisné statistice. Prvním z nich je relace

(2.59) $$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\right) + \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(\overline{x}_i - x)\cdot(\overline{y}_i - y)\right]$$

(2.59A) $$\overline{xy} = \overline{x}\cdot\overline{y} + \operatorname{cov}(x,y)$$

který je obdobou známého výpočtového vzorce pro výběrový rozptyl $\operatorname{var} x = \overline{x^2} - \overline{x}^2$.

ověření (2.55a) Rozvedením vztahu pro kovarianci na pravé straně výrazu (1.4.3) dostaneme

$$\frac{1}{N}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\cdot(y_i - \overline{y})\right] = \frac{1}{N}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \overline{x}\sum_{i=1}^{N} y_i - \overline{y}\sum_{i=1}^{N} x_i - N\overline{xy}\right] =$$
$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - \overline{x}\cdot\overline{y} - \overline{y}\cdot\overline{x} + \overline{x}\cdot\overline{y} = \frac{1}{N}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot y_i\right) - \overline{x}\cdot\overline{y}$$

následně převedením $x \cdot y$ na opačnou stranu získáme hledanou relaci. □.

Analogicky k předchozímu bychom odvodili platnost obdobného vztahu pro vážené charakteristiky :

(2.60) $$\sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i = \left(\sum_{i=1}^{N} w_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} w_i y_i\right) + \sum_{i=1}^{N} w_i\left(x_i - \sum_{i=1}^{N} w_i x_i\right)\left(y_i - \sum_{i=1}^{N} w_i y_i\right)$$

kde $w_i, i = 1,2,.....,n$ jsou libovolné nezáporné váhy normované jedničkovým součtem: $\sum w_i = 1$.

Označíme-li

$$\overline{x}^* = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot x_i\,,\quad \overline{y}^* = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot y_i\,,\quad \operatorname{cov}^*(x,y) = \sum_{i=1}^{N} w_i\left(x_i - \sum_{i=1}^{N} w_i x_i\right)\cdot\left(y_i - \sum_{i=1}^{N} w_i y_i\right),$$

můžeme předchozí výraz zapsat ve tvaru

(2.60A) $$\overline{xy^*} = \overline{x^*}\cdot\overline{y^*} + \operatorname{cov}^*(x,y)$$

Identitu (2.59) dále upravíme tak, že ji vydělíme výrazem $\overline{x}\cdot\overline{y}$. Dostaneme

(2.61)
$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\bar{x}\cdot\bar{y}} = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\bar{x}\cdot\bar{y}} + \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\bar{x}\cdot\bar{y}} = 1 + \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\bar{x}\cdot\bar{y}}$$

a poté druhý výraz pravé strany doplníme vložením směrodatných odchylek, čímž získáme vyjádření obsahující variační koeficienty proměnných x_i a y_i a jejich párový korelační koeficient r_{xy} .

(2.61A)
$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i}{\bar{x}\cdot\bar{y}} = 1 + \frac{s_x}{\bar{x}}\cdot\frac{s_y}{\bar{y}}\cdot r_{xy}$$

Stejně bychom získali analogické vyjádření pro vážené veličiny $x^*, y^*, s_{x^*}, s_{y^*}$ a r^*_{xy}, pokud by byly všechny vážené stejnými vahami w_i, $i = 1,2,...n$. Vážená obdoba by vypadala následovně

(2.62)
$$\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i}{\overline{x}^* \cdot \overline{y}^*} = 1 + \frac{s_{x^*}}{\overline{x}^*}\cdot\frac{s_{y^*}}{\overline{y}^*}\cdot r^*_{xy}$$

kde máme $\overline{x}^* = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i$, $\overline{y}^* = \sum_{i=1}^{N} w_i y_i$, $s_{x^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \left(x_i - \overline{x}^*\right)}$ $s_{y^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \left(y_i - \overline{y}^*\right)}$,

$$\mathrm{cov}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} w_i \left(x_i - \overline{x}^*\right)\left(y_i - \overline{y}^*\right)$$

s nějakým vektorem nezáporných a jedničkovým součtem normovaných vah $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$. Cíle, který sledujeme, bude dosaženo, jestliže ukážeme, že levá strana výrazu (2.62), jehož obecnou platnost jsme odvodili, může přejít vhodnou konkretizací veličin x_i, y_i a $w_i, i = 1,2,...,n$ ve výraz vyjádřitelný jako podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla.

Přistupme tedy za tímto účelem nejprve k vyjádření podílu Paascheho a Laspeyresova indexního čísla, který má tvar:

(2.63)
$$\frac{P_{01}^P}{P_{01}^L} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}}$$

Na základě předchozích výsledků a tvaru pravé strany Bortkiewiczova poměru se pokusíme vyšetřit, zda podíl obou zmíněných indexních čísel lze vyjádřit jako výraz korespondující se zápisem (2.62), jehož levá strana by měla podobu vážené kovariance dělené součinem stejně vážených středních hodnot dvou vektorů vyjadřujících cenové a množstevní změny s vhodně volenými vahami. Ukazuje se, že toto vyjádření je skutečně možné, a to při následující volbě veličin : $x_i = \dfrac{p_i(1)}{p_i(0)}$, $y_i = \dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}$ a vah $w_i^* = \dfrac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)}$. Tyto konkretizace pro x_i a y_i lze vzhledem k symetrii výrazů přirozeně zaměnit. Dosadíme-li totiž zmíněné veličiny do (2.62), dostaneme

(2.64)

$$\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \dfrac{p_i(1)}{p_i(0)} \cdot \dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}}{\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \dfrac{p_i(1)}{p_i(0)}\right] \cdot \left[\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}\right]} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)}}{\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)}\right] \cdot \left[\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)}\right]}$$

což po dalším vykrácení součtem $\sum p_i(0) \cdot q_i(0)$ zřejmě dává výraz vyjadřující podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla (2.63). □.

Důslednou záměnou cen za kvantity a obráceně bychom dospěli tímto způsobem rovněž k vyjádření

(2.65) $$\frac{Q_{01}^{P}}{Q_{01}^{L}} = 1 + \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot \frac{s_y}{\bar{y}} \cdot r_{xy}$$ (tzn. s prohozením obsahu x_i a y_i)

z něhož je mj. patrná platnost "křížového" splnění rovnosti $P_{01}^{P} \cdot Q_{01}^{L} = P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{P}$ □.

Z vlastností (vážených) středních hodnot a směrodatných odchylek lze dále dovodit, že "neutrální hodnota" von Bortkiewiczova podílu B = 1 nastane v případech, kdy :

1) *všechny ceny se změní ve stejném poměru, tj.* $\dfrac{p_i(1)}{p_i(0)} = c$ *pro všechny komodity.*

Tento analyticky ideální případ je ovšem výjimečný.

2) *všechny kvantity se změní ve stejném poměru tj.* $\dfrac{q_i(1)}{q_i(0)} = d$ *pro všechny komodity.*

Při práci s reálnými datovými hodnotami je tato eventualita stejně vzácná jako předchozí případ.

3) *vektory cenových a kvantových změn jsou vzájemně nekorelované.*

Tato možnost zasazená do obvyklého ekonomického prostředí by znamenala vzácnou situaci, kdy poptávka po komoditách zařazených do zkoumání není v zásadě ovlivněna změnami v jejich cenách mezi základním a běžným obdobím.
Za všech těchto okolností dojde tedy ke shodě hodnot poskytnutých Laspeyresovým a Paascheho indexním číslem. Podobné nenáročné úvahy nás přivedou k těmto závěrům :

Má-li být hodnota Paascheho indexu větší než Laspeyresova indexu, musí být (při nezápornosti ostatních fragmentů dekompozice, tj. středních hodnot a směrodatných odchylek) hodnota

$\boldsymbol{r}_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}}$ kladná, tzn. mezi vektory cenových a kvantových změn by musela existovat kladná korelace. Současně platí též opačně:

Má-li být Paascheho IČ menší než Laspeyresovo IČ, musí být (při nezápornosti ostatních členů dekompozice (2.57), tj. středních hodnot a směrodatných odchylek) hodnota $r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}}$ záporná **,** tzn. mezi vektory cenových a kvantových změn musí existovat korelace negativní. To by odpovídalo situaci, kdy nadprůměrný růst cen některých komodit (*oproti průměrnému růstu či poklesu cen jiných komodit*) provází zpravidla podprůměrný růst (popř. pokles) poptávky po těchto komoditách. Zřejmě je právě tato situace v ekonomické realitě obvyklá. S ohledem na interpretaci korelačních vztahů (*v prostředí spíše růstových tendencí cen a kvantit*) lze tedy konstatovat, že Laspeyresův index bude poskytovat vyšší hodnotu než index Paascheho, protože "nadprůměrně" vysokým cenových vzestupům skutečně v ekonomickém prostředí odpovídají "podprůměrné" vzestupy či poklesy v poptávaných množstvích.

Lze tedy učinit dílčí závěr, že Laspeyresovo indexní číslo – jmenovatel výrazu (2.57) - bude při práci s konkrétními ekonomickými daty poskytovat obvykle vyšší hodnotu než indexní číslo Paascheho. S ohledem na své konstrukce budou jak Marshallovo-Edgeworthovo, tak Fisherovo nebo Walshovo indexní číslo ležet v intervalu vymezeného zdola Paascheho a shora Laspeyresovým indexním číslem.

Okolnost, že Laspeyresův cenový index zpravidla převyšuje analogický Paascheho index, může mít i určitý dopad na politické hodnocení míry inflace: Pokud je CPI – index životních nákladů – měřen Laspeyresovým indexním číslem (jako je tomu např. v České republice) a inflace měřená tímto indexem vykáže nízkou hodnotu (řekněme pod 3% ročně), bude mít vládní uskupení (ať je složenou jednou politickou stranou nebo ho tvoří koalice) oprávněný důvod oponovat případnému napadání ze strany opozice, že „skutečná inflace", kterou běžný občan pociťuje, je určitě vyšší. Naopak lze říci, že vládní strany přijímají od statistického úřadu údaje zpracovávané pro ně „nepříznivou metodikou" a že inflace měřená „nestranným způsobem" , tedy např. Fisherovým nebo Walshovým indexem by poskytla hodnotu více nebo méně nižší. K záležitosti se ještě podrobněji a z dalších hledisek vrátíme v kapitole 8.