Teorie užitku

Teorie užitku (též teorie hodnoty nebo teorie rovnováhy spotřebitele), se jako už klasická sféra matematické formalizace mikroekonomického prostředí, zabývá zkoumáním chování jednoho typického spotřebitele, který při nákupu dostupných komodit usiluje o maximalizaci svého užitku, tzn. že - při stejných výdajových možnostech - nakupuje soubor komodit poskytujících mu co největší užitek. Maximalizace se odehrává v prostředí, kde spotřebitel musí vycházet z cen komodit, které jsou utvářeny v rámci tržního prostředí nezávisle na jeho vůli, a kde musí rovněž přihlížet k velikosti svého příjmu/důchodu, který má pro tento účel k dispozici a který nesmí překročit.

1 Preferenční uvažování spotřebitele

Formulace problému: Spotřebitel maximalizuje svůj subjektivně posuzovaný užitek za předpokladu, že při koupi potřebných množství jednotlivých komodit $\zeta_1, \zeta_{2,} ...., \zeta_n$ zajišťujících mu velikost užitku na požadované úrovni u^* nepřekročí rozpočtové omezení dané jeho disponibilním příjmem M .

Poznámka 1 Pro následující úvahy není příliš podstatné, jak chápeme veličinu důchod. Ta přirozeně ani v krátkodobém pohledu nemusí být představována pouze příjmem běžného období, ale také dřívějšími úsporami spotřebitele popř. jinými aktivy nebo naopak také budoucími aktivy (půjčkami, budoucími výnosy, rentou, pohledávkami), která mu budou k dispozici později. V dalším textu budeme konkrétní množství komodit $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ označovat veličinami $x_1, x_2, ..., x_n$.

Definice 1 Uvažujme konečnou množinu komodit (statků) $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$, z níž provádíme postupně několik výběrů $j = 1, 2, ..., r$. Množinu všech možných vybíraných množství/kombinací ze všech komodit nazveme ***komoditní prostor*** a označíme jej

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{x}^{(j)}, \boldsymbol{x}^{(j)} = \left(\boldsymbol{x}_1^{(j)}, \boldsymbol{x}_2^{(j)}, ..., \boldsymbol{x}_n^{(j)}\right)\right), \quad \boldsymbol{x}^{(j)} \geq 0 \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, ..., r$$

Hodnota $\boldsymbol{x}_i^{(j)}$ tedy vyjadřuje množství komodity ζ_i vybírané při j-té variantě výběru. Pro tuto chvíli, (ač to není zásadně důležité), budeme předpokládat (třeba velký) konečný soubor možných výběrů.

Každé komoditě ζ_i přiřadíme kladné číslo p_i, které bude vyjadřovat cenu za jednotku fyzického množství (jednotkovou cenu) této komodity.

Definice 2 Soubor cen p_i všech komodit $\zeta_i, i = 1, ..., n$ představovaných vektorem kladných čísel

$$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_n), \; p_i > 0 \quad \text{pro} \;\; i = 1, 2, ..., n$$

kde každé p_i vyjadřuje jednotkovou cenu i-té komodity ζ_i, a to nezávisle na provedeném výběru nazveme **cenový vektor.**

Jak je patrné, v systému neuvažujeme volné statky, tj. komodity, u nichž $p_i = 0$. Důvodem není ani tak okolnost, že by se v systému nemohly vyskytnout, jako fakt, že pro řešení problému, který je svou povahou optimalizační (mj. vzhledem k cenám), nemají význam, resp. hledané řešení jimi nebude ovlivněno.

Na rozlišovací schopnost spotřebitele je nutno položit některé zásadní požadavky, které ve svých důsledcích umožní rigorózní formulaci úlohy. Jedním z těchto požadavků je např. předpoklad, že spotřebitel musí být pro jakékoliv dvě kombinace komodit, řekněme A a B schopen rozhodnout, která z nich mu přinese vyšší užitek, případně zda užitek jimi poskytnutý bude stejný. Jinými slovy to znamená, že tyto dvě kombinace A, B mohou být co do užitku poskytnutého spotřebiteli rovnocenné (z pohledu spotřebitele jde o indiferentní komodity), nemohou však být nesrovnatelné. Přesněji :

Předpoklad Spotřebitel je schopen vzájemně porovnat libovolné dvě varianty $\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{x}^{(j)}, j = 1, 2, \ldots, n$ a (subjektivně) posoudit, která z nich je pro něj výhodnější, popř. jsou-li vzájemně rovnocenné. Rozlišovací (binární) relace „♠“ definovaná na kartéském součinu $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$ (tj. pro každou dvojici variant) má přitom dále uvedené vlastnosti . Při značení použijeme symbol „$\geq$ „ jako symbol neostrého preferenčního uspořádání tj. relace pro dvě srovnávané kombinace zapíšeme ekvivalentně $\boldsymbol{x}^{(i)}$ ♠ $\boldsymbol{x}^{(j)}$, právě tehdy, když $\boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(k)}$, přičemž symbol **„** $\succeq$ **„** čteme jako „preferováno nebo stejně hodnoceno“.

Preferenční relaci je třeba nyní přisoudit takové vlastnosti, které jsou splněny pro co možná nejširší okruh myslitelných situací spojených s rozhodováním spotřebitele o výběru z jemu dostupných a užitek přinášejících variant. Tyto vlastnosti jsou obsahem následující definice.

Definice 3 Vlastnosti preferenční relace „ $\succeq$ „ :

(P1) Relace „ $\succeq$ „ je reflexívní, tzn. platí $\boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(j)}$ pro libovolné $\boldsymbol{x}^{(j)}$.

(P2) Relace „ $\succeq$ „ je tranzitivní, tzn. jestliže $\boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(k)}$ a $\boldsymbol{x}^{(k)} \succeq \boldsymbol{x}^{(l)}$, potom platí $\boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(l)}$

(P3) Relace „ $\succeq$ „ je úplná, tzn. pro všechna $\boldsymbol{x}^{(j)}, \boldsymbol{x}^{(k)}$ platí $\boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(k)}$ nebo $\boldsymbol{x}^{(k)} \succeq \boldsymbol{x}^{(j)}$.
nebo současně obojí (tento poslední případ znamená indiferentnost/rovnocennost „ $\approx$ “).

(P4) Relace „ $\succeq$ „je nenasycená, tzn. neexistuje taková varianta $\boldsymbol{x}^{(j)}$, která by byla nadřazená vůči všem ostatním variantám. Jinými slovy : ke každé variantě $\boldsymbol{x}^{(j)}$ lze nalézt variantu $\boldsymbol{x}^{(k)}$ takovou, že platí $\boldsymbol{x}^{(k)} \succeq \boldsymbol{x}^{(j)}$.

Tato vlastnost má za následek, že užitková funkce je neklesající a přinejmenším v jednom svém argumentu je rostoucí.

(P5) Relace „ $\succeq$ „ je spojitá, což znamená toto: Pro libovolnou variantu $\boldsymbol{x}^{(j)}$ definujme dvě množiny

a) $L\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right)$ jako množinu všech variant "přinejmenším stejně dobrých jako $\boldsymbol{x}^{(j)}$"
b) $H\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right)$ jako množinu všech variant "nikoliv lepších než $\boldsymbol{x}^{(j)}$" tzn. :

$$L\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right) = \left\{\boldsymbol{x}^{(k)};\ \boldsymbol{x}^{(k)} \succeq \boldsymbol{x}^{(j)}\right\} \qquad , H\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right) = \left\{\boldsymbol{x}^{(k)}; \boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$$

Relace „$\succeq$„ je spojitá právě tehdy, jestliže množiny $L\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right)$ i $H\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right)$ jsou uzavřené, tj. součástmi těchto množin jsou i jejich hranice (tj. body, kde platí indiference vůči $\boldsymbol{x}^{(j)}$).

(P6) Relace „ $\succeq$ „je konvexní, tzn. platí implikace :

jestliže $\boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(k)}$, potom $\lambda \cdot \boldsymbol{x}^{(j)} + (1-\lambda) \cdot \boldsymbol{x}^{k} \succeq \boldsymbol{x}^{(j)}$ pro libovolné $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$.

Vlastnost **(P1)** konstatuje samozřejmost, že každá komoditní kombinace je vůči sobě „aspoň stejně dobrá“. Jejím účelem je dosažení rovnocennosti hodnocení kombinace vůči sobě.

Smyslem vlastnosti (P2) je pak dosáhnout uspořádání variant v souladu se zásadou, že je-li varianta A nejméně stejně dobrá jako druhá varianta B a tato druhá nejméně stejně dobrá jako varianta C, pak je i varianta A vždy nejméně stejně dobrá jako varianta C. V minulosti byla tato vlastnost předmětem řady polemik a pokusů o konstruování protipříkladů, nyní se již přijímá jako plně oprávněná.

Úplnost relace **(P3)** znamená vyloučení možnosti nesrovnatelných variant, tzn. že pro kterékoliv dvě varianty musíme být schopni rozhodnout o jejich vzájemném preferenčním postavení. Lze tedy také mluvit o axiomu srovnatelnosti.

Konvexnost **(P6)** preferenční relace není až tak samozřejmá vlastnost, byť jde o vlastnost velmi důležitou, která zajišťuje - jak uvidíme dále - kvanzikonkávnost dále konstruované užitkové funkce. Problém spočívá v tom, že vlastnost reprezentuje konstatování, že "směs" dvou komoditních kombinací nemůže být horší než horší z obou těchto kombinací. I když se omezíme jen na statické nazírání na věc, je patrné, že v řadě srovnávacích situací tomu tak být nemusí : Smícháme-li dva jinak chutné drinky (např. whisky a gin), získaný výsledek stěží poskytne lepší chuťový dojem, než kterákoliv z obou substancí konzumovaných samostatně. Totéž by platilo o množství jiných komoditních kombinací spojených s jídlem a pitím.

Poznámka 2 Preferenční relace splňující výše uvedené tři vlastnosti se nazývá **úplným uspořádáním**.

Pokud bychom chtěli dosáhnout tzv. ***ostrého uspořádání***, znamenalo by to odvození relace (označené např. „ $\succ$ „) s dodatečnou vlastností ***antisymetrie.***

(P7) Varianta $\boldsymbol{x}^{(j)}$ je ostře preferována před variantou $\boldsymbol{x}^{(k)}$, jestliže platí $\boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(k)}$, avšak nikoliv $\boldsymbol{x}^{(k)} \succeq \boldsymbol{x}^{(j)}$.

Pokud bychom naopak chtěli dosáhnout relace představující indiferenci variant (označené např. „$\approx$ „), pak stačí formulovat podmínku ***symetrie.***

(P8) Varianta $\boldsymbol{x}^{(j)}$ je indiferentní vůči variantě $\boldsymbol{x}^{(k)}$, tj. $\boldsymbol{x}^{(j)} \approx \boldsymbol{x}^{(k)}$, jestliže platí $\boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(k)}$ a současně také platí $\boldsymbol{x}^{(k)} \succeq \boldsymbol{x}^{(j)}$.

Poznámka 3 Relace, která splňuje vlastnosti **(P1)**, **(P2)** a **(P8)** se nazývá **ekvivalence**. Je tedy současně reflexívní, symetrická a tranzitivní.

Někdy se pro účely matematické přesnosti doplňuje ještě další vlastnost relace „$\succeq$ „ , jíž je spojitost:

(P6) Pro každou variantu $\boldsymbol{x}$ jsou množiny tvaru

$$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} | z \succeq x\} \quad \text{a} \quad \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} | x \succeq z\} \qquad \text{uzavřené vůči množině } X.$$

Tato vlastnost reprezentuje konzistentní způsob uvažování spotřebitele v tom smyslu, že když existuje posloupnost komoditních kombinací $z^{(n)}$ takových, že pro kterýkoliv prvek této posloupnosti platí $z^{(n)} \succeq x$, potom také pro limitní bod z této posloupnosti z (pro který $z = \lim_{n \to \infty} z^{(n)}$) platí $z \succeq x$.

Nyní přejdeme od relací charakterizujících vzájemný vztah srovnávaných komodit komoditního prostoru k vyjádření, při němž je každá komoditní kombinace ohodnocena nějakým reálným číslem nebo aspoň pořadím z hlediska užitečnosti pro spotřebitele. Toto ohodnocení by mělo dodržovat zásadu, že horší varianta je proti lepší oceněna menším reálným číslem.

Definice 4 Přiřadíme-li každé variantě $\boldsymbol{x}^{(k)}$ číslo $u\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) \in R_1^+$, získáme tak funkci přiřazující každému bodu komoditního prostoru $\boldsymbol{X}$ hodnotu, kterou nazveme ***užitek.*** Tato ***užitková funkce*** $u(\boldsymbol{x})$ přiřazuje lepší variantě $\boldsymbol{x}^{(j)}$ větší hodnotu $u\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right)$ oproti horší variantě $\boldsymbol{x}^{(k)}$, které přiřazuje menší hodnotu $u\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$ v souladu se vztahem

$$\boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(k)} \Leftrightarrow u\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right) \geq u\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right).$$

V případě, že jsou obě varianty indiferentní, tzn. platí $\boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(k)}$ a současně $\boldsymbol{x}^{(k)} \succeq \boldsymbol{x}^{(j)}$, budou hodnoty užitku při obou variantách stejné tj. $u\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right) = u\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$.

Pro účely dalšího výkladu přijmeme úmluvu, že komoditní prostor je tvořen kartéským součinem uzavřených intervalů $X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$, kde tyto intervaly $X_i \leq 0, \kappa_i$), přičemž pravé krajní body těchto intervalů budou tvořeny buď konečnými hodnotami nebo neomezenou hodnotou „$+\infty$„ . Intervalové uvažování přípustných hodnot komodit ve svém důsledku znamená, že množství každé komodity budeme považovat za neomezeně dělitelnou (nezápornou) veličinu a rovněž to, že z komoditního prostoru můžeme provádět nekonečně mnoho opakovaných různých výběrů.

Jak je patrné, zdaleka ne každá ekonomicky posuzovaná komodita má vlastnost neomezené dělitelnosti. To sice nečiní podstatnější problém v případě, kdy ji oceňujeme peněžně (dělení v principu diskrétní veličiny je zde „dostatečně jemné“), avšak v případě naturálního vyjádření to může přinést poměrně hrubé odchýlení se od skutečnosti. Měříme-li užitek, který spotřebiteli přináší elektrospotřebič, vozidlo či objekt bydlení, jsme při popisu množství komodity odkázáni na vyjádření v přirozených číslech (které je typicky diskrétního charakteru), přičemž přechod např. ke zlomkovému vyjádření by s ohledem na celistvost užitné hodnoty věci byl sotva rozumně interpretovatelný. Podobných „protipříkladů“ bychom nalezli ostatně nesčetně i mezi předměty zřetelně nižší peněžní hodnoty (oděvy, kancelářské potřeby, hračky, tkaničky od bot apod.).

„Zespojitění“ komoditního prostoru, popř. omezení oboru hodnot každé komodity zprava na prakticky uvažovatelný rozsah je tedy provedeno především z důvodu matematické zvládnutelnosti, mj. též k možnosti definovat řadu pojmů marginální ekonomicko-matematické analýzy s použitím spojitosti a diferencovatelnosti (užitkové) funkce. V této souvislosti se nejprve budeme věnovat matematické formalizaci užitkové funkce.

Definice 5 Preferenční uspořádání se nazývá ***monotónní***, jestliže situace, kdy platí $\boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(k)}$ a současně $\boldsymbol{x}^{(j)} \neq \boldsymbol{x}^{(k)}$ znamená $\boldsymbol{x}^{(j)} \succeq \boldsymbol{x}^{(k)}$

Monotónnost vylučuje tedy možnost existence ekvivalentních tříd, ve kterých by bylo několik různých vzájemně indiferentních prvků. Vlastnost udává, že více kteréhokoli zboží je preferováno, což znamená, že všechna zboží jsou žádoucí.

Platí, že ***užitková funkce odvozená z monotónního uspořádání je rostoucí***.

Definice 6 Preferenční uspořádání se nazývá ***konvexní***, jestliže množina $\{ z \in \boldsymbol{X} | z \geq x \}$ je konvexní pro všechna $x \in X$.

Definice 7 Preferenční uspořádání se nazývá ***ryze konvexní***, jestliže pro dvě libovolné komoditní kombinace x, y takové, že $x \succeq y$ a přitom $x \neq y$ platí vztah $\lambda x + (1 - \lambda) y \succ y$, a to pro jakékoliv $0 < \lambda < 1$