# 4 Výdajová funkce, nepřímá užitková funkce a systém poptávkových funkcí

## 4.1 Výdajová funkce a její vlastnosti

***Definice 13*** Máme dánu spojitou užitkovou funkci $u(x)$, cenový vektor $\boldsymbol{p}$ a mějme dále určenu konkrétní velikost užitku $u^0$ (skalární, v ordinálním pojetí). Potom funkci

(4.1) $$E(u^0, \boldsymbol{p}) = Min[\boldsymbol{px}; u(\boldsymbol{x}) \geq u^0]$$

nazveme výdajovou funkcí (***expenditure function***) ve vztahu k užitkové funkci $u(\boldsymbol{x})$. Argumenty této funkce je tedy cenový vektor a velikost užitku požadovaná spotřebitelem. Jak je patrné z definice, výdajová funkce představuje minimální možné náklady (spojené s nákupem nanejvýš $n$ statků při exogenně stanovených cenách $\boldsymbol{p}$) vynaložené na komoditní kombinaci, která poskytuje užitek přinejmenším o velikosti $u^0$. Spotřebitel přitom nemusí nutně nakupovat všechny komodity a s ohledem na kriteriální funkci v (3.11) dá přednost těm, u kterých dosažení užitku na žádané výši docílí nejlevněji.

***Definice 14*** Výdajová funkce $E(u, \boldsymbol{p})$ příslušná k užitkové funkci $u(\boldsymbol{x})$ s vlastnostmi (U1) - (U5) má tyto vlastnosti[1] :

(V1) $E(u, \boldsymbol{p})$ je reálná konečná a nezáporná funkce, přičemž $E(u^0, \boldsymbol{p}) > 0$ pro libovolné $u^0 > 0$.
(V2) $E(u, \boldsymbol{p})$ je rostoucí a spojitá v $u$ pro jakýkoliv cenový vektor $\boldsymbol{p} > 0$.
(V3) $E(u, \boldsymbol{p})$ je neklesající v $\boldsymbol{p}$ a rostoucí alespoň v jedné z cen $p_i$ pro libovolnou úroveň užitku $u^0$.
(V4) $E(u, \boldsymbol{p})$ je lineárně homogenní v $p_i$ pro libovolnou úroveň užitku $u^0$.
(V5) $E(u, \boldsymbol{p})$ je konkávní v cenách $p_i$ pro libovolnou úroveň užitku $u^0$.

Vlastnost (V2) konstatuje, že s růstem velikosti užitku požadovaného spotřebitelem (ostře) roste i výdaj na pořízení komodit, které tento užitek poskytují. Vlastnost (V3) připouští, že růst některých cen (zpravidla těch, které právě nejsou ve vybírané kombinaci statků pro poskytujících užitek $v^0$) nemusí nutně vést k růstu výdajů spotřebitele. Očekávaný vývoj nákladů na komoditní kombinaci při změně cenového měřítka všech komodit pak vyjadřuje (V4), zatímco poslední vlastnost (V5) charakterizuje „ne vyšší než lineární" tendenci vývoje výdajů při růstu kterékoliv z cen $p_i, i = 1, 2, ...., n$. První vlastnost (V1) mluví o přirozených matematických omezeních funkce $n+1$ proměnných v kontextu ekonomického významu $E(u, \boldsymbol{p})$ a konstatuje, že kladné hodnotu užitku nelze dosáhnout zdarma.

Jestliže nyní máme definovánu výdajovou funkci $\upsilon = E(u, \boldsymbol{p})$ s výše uvedenými vlastnostmi (jmenovitě vlastností (V2)), máme tím zaručeno, že k této výdajové funkci existuje funkce inverzní, která bude vyjadřovat hladinu užitku v jako funkci výdajů a cen komodit.

Mohlo by nás dále zajímat, jakým způsobem je hodnota výdajové funkce $\upsilon = E(\boldsymbol{p}, u^0)$ vztažena k disponibilnímu příjmu spotřebitele $M$. Optimalizační problém počítá s tím, že po nákupu statků spotřebiteli nezůstane již žádný nevyčerpaný příjem. Lze tedy - aspoň ve statickém pohledu - přímo ztotožnit $\upsilon$ a $M$ a psát také $M = E(\boldsymbol{p}, u^0)$ s vědomím toho, že příjem $M$ právě postačuje k dosažení užitku ve výši $u^0$.

[1] Tyto vlastnosti lze vyvodit z definičního výrazu (4.1), vlastností funkce Min a skalárního součinu ***px***

Význam výdajové funkce spočívá mj. v tom, že pomocí ní lze generovat celý systém poptávkových funkcí v tzv. Hicksově smyslu. Uvedená možnost (pro diferencovatelnou výdajovou funkci) vychází z modifikace tzv. Shephardova lemmatu vysloveného autorem pro vztah mezi nákladovou funkcí a příslušným systémem poptávkových funkcí po výrobních faktorem v r.1953 - viz část 3. Z uvedeného lemmatu vyplývá, že lze psát :

(4.2) $$\frac{\partial E(u,\boldsymbol{p})}{\partial p_j} = h_i(u,\boldsymbol{p})$$ , kde

funkce na pravé straně vyjadřuje poptávku po komoditě $x_j$ .

### 4.2 Nepřímá užitková funkce a její vlastnosti

***Definice 15*** Máme dánu výdajovou funkci $M = \upsilon = E(\boldsymbol{p}, u^0)$ s cenovým vektorem $\boldsymbol{p}$ a současně tím určenu konkrétní velikost výdajů $M$. Potom funkci

(4.3) $$\psi(M,\boldsymbol{p}) = Max[u(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{px} = M]$$

nazveme nepřímá užitková funkce (***indirect utility function***) ve vztahu k výdajové funkci $E(\boldsymbol{p}, v^0)$. Argumenty této funkce je tedy cenový vektor a velikost přípustných výdajů (příjmu) spotřebitele použitelná na nákup komodit v množstvích $\boldsymbol{x}$.

***Definice 16*** Nepřímá užitková funkce $\psi(M,\boldsymbol{p})$ příslušná k výdajové funkci $E(\boldsymbol{p}, u^0)$ s vlastnostmi (V1) - (V5) je charakterizována těmito vlastnostmi[2] :

(W1) $\psi(M,\boldsymbol{p})$ je reálná konečná a nezáporná funkce, přičemž $\psi(\boldsymbol{p},0) = 0$.
(W2) $\psi(M,\boldsymbol{p})$ je rostoucí a spojitá v $M$ pro jakýkoliv cenový vektor $\boldsymbol{p} > 0$.
(W3) $\psi(M,\boldsymbol{p})$ je nerostoucí v $\boldsymbol{p}$ (pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů $M$ ).
(W4) $\psi(M,\boldsymbol{p})$ je homogenní funkce stupně 0 současně v cenách $\boldsymbol{p}$ a výdajích $M$.
(W5) $\psi(M,\boldsymbol{p})$ je konkávní funkce v $\boldsymbol{p}$ pro jakoukoliv úroveň výdajů $M$ .

Prvá z výčtu vlastností nepřímé užitkové funkce konstatuje mj. že s nulovými obnosem žádný kladný užitek nezískáme. Ryzí monotónnost ve (W2) ve vztahu k υ předpokládá, že zvýšený příjem je vynaložen účelně a není alokován do neužitečných komodit. Dále, jak praví (W3), se zvýšením kterékoliv z cen $p_i$ (při neměnných výdajích) užitek nemůže vzrůst (nemusí však ani nutně klesnout, neboť ke zdražení může dojít u nenakupovaného statku). Již jsme zmínili, že výdaj $\upsilon$ lze ztotožnit s příjmem spotřebitele $M$. Vlastnost (W4) lze pak chápat tak, že pokud by došlo k tomu, že by se všechny ceny $p_1, p_2, ...., p_n$ i příjem $M$ změnily v témže poměru (např. $\lambda$-násobně), nezmění se na situaci viděné očima spotřebitele vůbec nic. Spotřebitel se bude řídit stejnými preferenčními hledisky jako dříve. Rovnice (2.17A) a (2.17B) si dále podrží svou platnost a úrovně poptávky po jednotlivých komoditách (zajišťující při daném rozpočtovém omezení nejvyšší možný užitek) se nijak nezmění.

***Poznámka 1*** K nepřímé užitkové funkci můžeme dospět i poněkud jiným způsobem : Jak (přímá) užitková funkce $u(\boldsymbol{x})$ (jejímiž „bezprostředními“ argumenty jsou $x_1, x_2, ...., x_n$ ), tak Lagrangeův multiplikátor $\lambda$ závisí na „parametrech úlohy“ tj. na veličinách $p_1, p_2, ...., p_n$ a $M$ (těch je v tomto případě také $n+1$). Řešením úlohy (2.17a), (2.17b) jsou optimální

---
[2] Tyto vlastnosti lze vyvodit z definičního výrazu (4.3), vlastností funkce Max a užitkové funkce u(**x**)

(rovnovážné) rozsahy komodit $x_1, x_2, \dots x_n$, které při splnění rozpočtového omezení maximalizují užitkovou funkci $u(x)$. Přitom každá taková optimální úroveň poptávky může být zapsána jako funkce (vnitřních) proměnných $p_1, p_2, \dots p_n$ a $M$. Pro užitkovou funkci (vyčíslenou v bodě dosažení maxima) tedy dostáváme postupně vyjádření

$$u(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = u[\gamma_1(p_1, p_2, \dots, p_n, M), \gamma_2(p_1, p_2, \dots, p_n, M), \dots, \gamma_n(p_1, p_2, \dots, p_n, M)] =$$

$$(4.4) \qquad = \boldsymbol{\Gamma}(p_1, p_2, \dots, p_n, M) = \boldsymbol{\Psi}\left[\frac{M}{p_1}, \frac{M}{p_2}, \dots, \frac{M}{p_n}, 1\right]$$

Zde jsme zřejmě vektorovou funkci $\boldsymbol{\Gamma}$ vytvořili složením z funkcí $u$ a $\gamma_i$, takže např.její $k$-[3]tá složka $\Gamma_k = u(\gamma_k(\dots))$. Tato složená funkce je přirozeně funkcí argumentů $p_1, p_2, \dots, p_n, M$. Jestliže posléze vyjádříme jednotlivé tyto argumenty $\boldsymbol{\Gamma}$ v podílovém tvaru $\frac{M}{p_i}$, což je oprávněné vzhledem k již zmíněné homogenitě proporcí mezi $p_i$ a $M$, dospějeme k nepřímé užitkové funkci $\Psi$.

***Poznámka 2*** V tomto zápisu vyjadřují argumenty nepřímé užitkové funkce v reciprokých hodnotách podíly cen libovolné komodity na celkovém příjmu, tzn. každý z argumentů udává, kolik množstevních jednotek příslušné komodity si spotřebitel může dovolit koupit, pokud by celý svůj příjem $M$ použil výlučně na nákup této komodity, tj. nekupoval-li by komodity jiné. Z této interpretace je patrné, že nepřímá užitková funkce výstižně vyjadřuje hodnotové orientace spotřebitele zohledněním relativní nákladnosti ceny každé komodity v systému.

***Poznámka 3*** Argumenty nepřímé užitkové funkce bývají však někdy uváděny v reciprokém tvaru, tzn. místo $\frac{M}{p_1}, \frac{M}{p_2}, \dots, \frac{M}{p_n}$ jde o veličiny $\frac{p_1}{M}, \frac{p_2}{M}, \dots, \frac{p_n}{M}$. Poslední člen „1" doplňující jen formálně počet argumentů nepřímé užitkové funkce na $n+1$ je zpravidla vynecháván. Při takovémto zápisu každý argument $\frac{p_i}{M}$ vyjadřuje podíl ceny komodity na příjmu $M$ a jeho zvýšení představuje zvýšení nákladnosti pořízení $i$-tého statku.

### 4.3 Odvození poptávkových funkcí a Engelových křivek

Řešením rovnic (3.1A) s podmínkou (3.1B) pro neznámé $x_1, x_2, \dots, x_n$, případně i veličinu $\lambda$ obdržíme pro každou komoditu

**Poptávkovou funkci po i-té komoditě ,** kterou lze obecně zapsat ve tvaru

$$(4.5) \qquad x_i = D_i(M, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

a která je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru a příjmu spotřebitele $M$.

Poznamenejme však, že tyto funkce, jejichž analytický tvar je odvozen z tvaru výchozí užitkové funkce, nemusí být vždy vyjádřitelné v explicitním tvaru.

---

[3] Uvedené pojetí nepřímé užitkové funkce pochází od Samuelsona [1947], dále se na rozpracování podíleli Karlin [1959] a Mc.Kenzie [1957], později pak především Diewert [1974].

***Definice 17*** Máme-li poptávku po každé komoditě $x_i$ $(i = 1, 2, ...., n)$ vyjádřenu zápisem (4.5) s nějakou poptávkovou funkcí $D_i(M, \boldsymbol{p})$ $n+1$ proměnných, pak každá taková poptávková funkce ze soustavy $n$ poptávkových funkcí $D_1, ...., D_n$ má následující vlastnosti[4] :

(D1) : Poptávková funkce $D_i(M, \boldsymbol{p})$ je reálná konečná a nezáporná funkce a platí pro ni $D_i(0, \boldsymbol{p}) = 0$.

(D2) : Poptávková funkce $D_i(M, \boldsymbol{p})$ je nerostoucí v ceně $i$-té komodity $p_i$ a neklesající v příjmu $M$.

(D3) : Poptávková funkce $D_i(M, \boldsymbol{p})$ je spojitá v $M$ a spojitá v $p_i$ $(i = 1, 2, ...., n)$.

(D4) : Poptávkové funkce definované v Hicksově smyslu $x_i = D_i^*(u, \boldsymbol{p})$ jsou homogenní stupně 0 v cenách $p_i$ a podobně tytéž funkce definovány v Marshallově smyslu $x_i = D_i(M, \boldsymbol{p})$ jsou rovněž homogenní stupně 0 (uvažováno simultánně v cenách $p_i$ i v příjmu $M$ ). Znamená to, že platí[5]

$$D_i^*(u, \lambda\boldsymbol{p}) = D_i^*(u, \boldsymbol{p}) = D_i(\lambda M, \lambda\boldsymbol{p}) = D_i(M, \boldsymbol{p})$$

(D5) : Úplná soustava poptávkových funkcí je aditivní a součtovatelná, a to jak v Hicksově, tak v Marshallově smyslu. Znamená to, že platí rovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i(u, \boldsymbol{p}) = M \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i(M, \boldsymbol{p}) = M \tag{4.6A,B}$$

(D6) : Úplné soustavě poptávkových funkcí odpovídá symetrická a negativně semidefinitní Sluckého substituční matice.Tímto rozumíme splnění následujících podmínek :

(a) "Křížové" derivace Hicksových poptávek (podle jednotlivých cen) jsou symetrické, tzn. platí

$$\frac{\partial D_i(M, \boldsymbol{p})}{\partial p_j} = \frac{\partial D_j(M, \boldsymbol{p})}{\partial p_i} \qquad \text{pro všechna} \quad i, j = 1, 2, ..., n\,;\ i \neq j$$

(b) Matice $S$ rozměrů $[n \times n]$ sestávající z prvků $s_{ij} = \dfrac{\partial D_i(M, \boldsymbol{p})}{\partial p_i}$ je negativně semidefinitní, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, ...., \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma s maticí koeficientů $S$ podmínku

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[ \frac{\partial D_i(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_j} \right] \cdot \xi_i \cdot \xi_j \leq 0 \tag{4.7}$$

Sluckého substituční matice ( při kompenzovaných odezvách na změnu ceny) $S$ je tvořena prvky $s_{ij}$, kde $s_{ij} = \dfrac{\partial D_i(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_j}$, takže lze psát $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot \xi_i \cdot \xi_j \leq 0$. Přímými důsledky negativní semidefinitnosti $S$ jsou, mimo jiné, podmínky $s_{ii} \leq 0$.

[4] Většinu z těchto vlastností uvádíme *( z důvodu úspornosti)* jen pro Marshallův tvar poptávek.

[5] Homogenita nultého stupně poptávek vyjadřuje skutečnost, že při *současné proporční* změně příjmu a všech cen se poptávky nemění. Zápis poptávek v Hicksově tvaru $x_i = D_i^*(u, \lambda\boldsymbol{p})$ v sobě implicitně obsahuje i násobení $\lambda M$ , neboť jen tehdy nedojde ke změně hodnoty užitku $u$ .

Poslední výrok tvrzení v (D1) vyjadřuje prostou skutečnost, že s nulovým příjmem nelze pořídit ani nejmenší množství žádného užitečného statku. Dvě vlastnosti obsažené v (D2) charakterizují závisle proměnnou (poptávku) jako monotónní funkce ceny $p_i$ a příjmu $M$, přičemž zvýšení ceny neznamená nutně snížení poptávky (zájem spotřebitele může být upřen na jiné komodity) a zvýšení příjmu nemusí nutně vést (ze stejného důvodu) ke zvýšení poptávky po $i$-tém statku. Spojitost ve všech argumentech vylučuje skokovitý přírůstek poptávky při nepatrné změně ceny či příjmu. Vlastnosti uvedené v (D5) vyjadřují úplné rozložení disponibilního příjmu $M$ na nákup (ne však nutně všech) $n$ komodit bez ohledu na to, jakou formulaci poptávkových funkcí přijmeme. V podmínkách (D4) je obsažena zásada, že proporční změna důchodu a cen neovlivní nijak chování poptávky po žádné z komodit.

Součtovatelnost (D5) a homogenita nultého stupně (D4) jsou důležitým nástrojem v teoretické analýze poptávkových vztahů, nicméně častěji se vyjadřují zprostředkovaně v zápisech s derivacemi poptávkových funkcí (místo původních poptávkových funkcí). Z podmínky součtovatelnosti (D5) takto vyplývají vztahy[6] (platné pro $i = 1, 2, ...., n$) :

(4.8A,B) $$\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial D_k(M, \boldsymbol{p})}{\partial M} = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} p_k \frac{\partial D_k(\boldsymbol{p}, M)}{\partial p_i} + D_i(\boldsymbol{p}, M) = 0$$

takže změna v příjmu $M$ a cenách $\boldsymbol{p}$ způsobí přeskupení v nákupech, které neporuší výdajové omezení. Rovnosti (4.8A) resp. (4.8B) se takto nazývají ***Engelova resp. Cournotova agregační podmínka***. Z podmínky homogenity nultého stupně (D4) obdobně vyplývá, že pro $i = 1, 2, ...., n$ platí

(4.9) $$\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial D_k(M, \boldsymbol{p})}{\partial p_k} + M \cdot \frac{\partial D_k(\boldsymbol{p}, M)}{\partial M} = 0$$

To neříká nic více, než že současná proporční změna v $\boldsymbol{p}$ a $M$ ponechá nákupy kterékoliv komodity beze změn.

Chování poptávky spotřebitele vůči každé komoditě $\xi_i$, $i = 1, 2, ...., n$ toliko v závislosti na jeho příjmu (tzn. při pevném cenovém vektoru $\boldsymbol{p}$) pak udávají známé ***Engelovy křivky*** vyjádřitelné ( jako funkce jediné proměnné příjem $M$ ) v obecném tvaru

(4.10) $$x_i = \eta_i^*(M)$$

a odvoditelné z poptávkových funkcí $\gamma_i$ poté, co do nich dosadíme jako pevné hodnoty ceny jednotlivých komodit $p_1, p_2, ...., p_n$.

***Definice 18*** Máme-li poptávku po $i$-té komoditě $x_i$ $(i = 1, 2, ...., n)$ vyjádřenu zápisem (4.10) s nějakou Engelovou křivkou $\eta_i^*$ jedné proměnné, pak každá tato Engelova křivka má následující vlastnosti :

(E1) : Engelova křivka $\eta_i(M)$ je reálná, konečná nezáporná funkce a platí pro ni $\eta_i(0) = 0$.

(E2) : Engelova křivka $\eta_i(M)$ je neklesající v příjmu $M$.

(E3) : Engelova křivka $\eta_i(M)$ je spojitá v $M$.

(E4) : Engelova křivka $\eta_i(M)$ je konkávní v $M$.

(E5) : Úplná soustava Engelových křivek $\eta_i(M)$ je součtovatelná, tzn. $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$.

[6] Vztahy ( 4.8.A,B) získáme okamžitě derivováním (4.6A) podle M, resp. podle $p_i$

Jak je patrné, vlastnosti Engelovy křivky $\eta_i, i = 1,2,....,n$ jsou vesměs konformní s vlastnostmi příslušné poptávkové funkce $D_i(\boldsymbol{p},M)$, pokud při pevném $\boldsymbol{p}$ omezíme pozornost na chování poptávky ve vztahu k příjmu. Navíc se předpokládá konkávnost (E4) $\eta_i$ jako funkce jedné proměnné $M$ a úplné vynaložení spotřebitelova příjmu na pořízení komodit (ne nutně všech) při jakékoliv úrovni $M$. Engelova křivka je (jen) slabě monotónní, neboť zvýšení příjmu nemusí nutně vést ke zvýšení poptávky právě po $i$-té komoditě.

Tečna (sklon) Engelovy křivky vyjadřuje hodnotu mezního sklonu ke spotřebě dané komodity, tzn. poměr mezi (limitně chápanou) změnou spotřeby (realizované poptávky) $x_i$ a změnou důchodu $M$ tj. $\frac{\partial x_i}{\partial M}$. Připomeňme, že výraz $\frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{M}{x_i}$ nazýváme ***příjmová pružnost poptávky***.

***Definice 19*** Funkce $v(\boldsymbol{x})$ $n$ proměnných se nazývá homogenní stupně $0$, jestliže se vyznačuje vlastností, že pro všechna $x_i$ platí

(4.11) $$v(\lambda x_1, \lambda x_2,....,\lambda x_n) = v(x_1, x_2,....,x_n) \qquad \text{pro libovolné } \lambda > 0\,.$$

***Poznámka 4*** Tato vlastnost je speciálním případem homogenity obecného $k$-tého stupně, kterážto vyžaduje, aby při proporční $\lambda$-násobné změně všech argumentů funkce byla funkční hodnota též $\lambda^k$ (kde $k$ je tzv. stupeň homogenity) násobkem původní funkční hodnoty.

### 4.4 Shephardovo lemma a Royova identita

Jedním z nejdůležitějších tvrzení, které platí mezi výdajovou funkcí a soustavou poptávkových funkcemi po komoditách v rovnovážné situaci, je tzv. Shephardovo lemma. R.Shephard je formuloval původně pro vztah mezi nákladovou funkcí (jako obdobou výdajové funkce) a poptávkovými funkcemi (po výrobních faktorech) v teorii produkce [viz blíže část 3].[7]

***Tvrzení 6 - Shephardovo lemma***

Máme dánu výdajovou funkci $E(\boldsymbol{p},u^0)$ příslušnou k užitkové funkci $u(\boldsymbol{x})$ s vlastnostmi (V1), (V2), (V3), (V4), (V5). Potom jednotlivé ze soustavy poptávkových funkcí po komoditách získáme tímto způsobem

(4.12) $$x_i = \frac{\partial E(u^0, \boldsymbol{p})}{\partial p_i}$$

což znamená, že tvar poptávkové funkce po komoditě $\zeta_i$ je určen jako parciální derivace výdajové funkce podle ceny této komodity. Toto fundamentální tvrzení je základním východiskem při konstrukci soustavy poptávkových funkcí po užitek přinášejících statcích z výdajové funkce.

*Důkaz tvrzení 6*

Zvolme pevně ale jinak libovolně cenový vektor $\boldsymbol{p}^0$, hladinu užitku $u^0$ a příslušný vektor optimálních (ve vztahu $\boldsymbol{p}^0$ ) $k$ komoditních množství $\boldsymbol{x}^0$. Dále pro jakýkoliv jiný cenový

[7] Podrobněji R.W. Shephard : Cost and Production Functions (1953) nebo tentýž autor : Theory of Cost and Production Functions. Princeton U.P.1970.

vektor $\boldsymbol{p}$ definujme funkci $\chi(\boldsymbol{p})$ vztahem

$$\chi(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^0 - E(u^0, \boldsymbol{p}) \tag{4.13}$$

Protože $\boldsymbol{x}^0$ není nutně optimální ve vztahu k $\boldsymbol{p}$, výdaje na pořízení množství $\boldsymbol{x}^0$ při cenách $\boldsymbol{p}$ musí vždy být přinejmenším tak velké, jako jsou analogické výdaje na pořízení těch množství, která jsou optimální vzhledem k $\boldsymbol{p}$ - tyto minimální výdaje udává výdajová funkce $E(u^0, \boldsymbol{p})$. Tedy $\chi(.)$ je vždy větší nebo nejméně rovno $0$ . Dále víme, že $\chi(.)$ je rovno $0$, tj. nabývá svého minima, pokud $\boldsymbol{p}$ je rovno $\boldsymbol{p}^0$ . Proto všude tam, kde existují derivace $\frac{\partial \chi(.)}{\partial p_i}$ musí platit v kombinaci $\boldsymbol{p}^0$

$$\frac{\partial \chi(\boldsymbol{p}^0)}{\partial p_i} = \boldsymbol{x}_1^0 - \frac{\partial E(u^0, \boldsymbol{p}^0)}{\partial p_i} = 0 \tag{4.14}$$

V důsledku toho, že jsme hodnotu $\boldsymbol{p}^0$ volili libovolně - je vztah (4.8) dokázán. □.

***Poznámka 5*** Bohužel nelze obecně zaručit, že takto odvozený systém poptávkových funkcí splňuje všechny vlastnosti předpokládané u funkcí deklarovaných jako poptávkové, tj. (D1),... , (D5).

***Poznámka 6*** Opačný postup - tzn. vytvoření výdajové funkce postupnou integrací systému poptávkových funkcí v vlastnostmi (D1),... , (D5) - není obecně uskutečnitelný, a to ani tehdy, jestliže s jistotou víme, že taková výdajová funkce $E(\boldsymbol{p}, u^0)$ existuje a že lze ji vyjádřit v explicitním tvaru. Pokud lze výdajovou funkci zkonstruovat ze soustavy poptávkových funkcí, říkáme, že tato soustava splňuje tzv. "podmínku integrability".

Dalším užitečným tvrzením je věta, která charakterizuje určitou „příbuznost" struktury mezi funkčními tvary u jednotlivých poptávkových funkcí.

***Tvrzení 7 - Symetrie poptávkových funkcí***

Mějme dánu výdajovou funkci $E(u^0, \boldsymbol{p})$ příslušnou k užitkové funkci $u(\boldsymbol{x})$ s vlastnostmi (V1),(V2),(V3),(V4),(V5), která má navíc spojité všechny parciální derivace aspoň do 2. řádu včetně. Potom pro systém poptávkových funkcí vyvozených pomocí Shephardova lemmatu (4.12) platí :

$$\frac{\partial x_j(u^0, \boldsymbol{p})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k(u^0, \boldsymbol{p})}{\partial p_j} \tag{4.15}$$

*<u>Důkaz tvrzení 7</u>*

Okamžitě vyplývá z *Youngovy věty* známé z matematické analýzy deklarující nezávislost druhých parciálních derivací na pořadí derivování, jestliže jsou tyto druhé parciální derivace spojité. Pak platí :

$$\frac{\partial x_j(u^0, \boldsymbol{p})}{\partial p_k} = \frac{\partial E(u^0, \boldsymbol{p})}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial E(u^0, \boldsymbol{p})}{\partial p_k \partial p_j} = \frac{\partial x_k(u^0, \boldsymbol{p})}{\partial p_j} \tag{4.16}$$

čímž je důkaz tvrzení proveden. □.

V tomto smyslu lze tedy mluvit o podmínce symetrie každé funkce ze soustavy poptávkových funkcí. Je tedy zřejmé, že všechny poptávkové funkce musí mít určitou příbuznou funkční podobu, která se může u jednotlivých funkcí systému lišit např. různými hodnotami parametrů těchto funkcí, nemůže jit však o principiálně odlišný funkční typ. (např. jedna poptávková funkce nemůže být logaritmem součtu kvadrátů svých argumentů, zatímco druhá bude arkustangentou součinu odmocnin těchže argumentů). Uvedená podmínka tedy výrazně snižuje pestrost v možné vzájemné odlišnosti jednotlivých poptávkových funkcí.

Shephardovo lemma umožňuje generovat Hicksovy poptávkové funkce z výdajové funkce. Pokud bychom chtěli odvodit Marshallovy poptávkové funkce, stačí k tomu substituovat za argument $u$ ve výdajové funkci hodnoty nepřímé užitkové funkce $\psi()$, která má argumenty $\boldsymbol{p}$ a $M$. Dostaneme

(4.17 ) $$x_i = h_i(u, \boldsymbol{p}) = h_i(\psi(\boldsymbol{p}, M), \boldsymbol{p}) = g_i(\boldsymbol{p}, M)$$

tzn. soustavu poptávkových funkcí ( pro $i = 1, 2, ...., n$ ) v Marshallově tvaru.

Pokud bychom byli postaveni před opačný problém, tj. vyvodit Hicksovy poptávkové funkce z Marshallových, potom lze postupovat v inverzním směru. Máme-li dány $g_i(\boldsymbol{p}, M), i = 1, 2, ...., n$, dosadíme za argument $M$ - výdaj je plně vynaložen na nákup $\boldsymbol{x}$ - hodnotu výdajové funkce $E(u, \boldsymbol{p})$.

(4.18 ) $$x_i = g_i(M, \boldsymbol{p}) = h_i(E(u, \boldsymbol{p}), \boldsymbol{p}) = h_i(u, \boldsymbol{p})$$

Vztah mezi nepřímou užitkovou a výdajovou funkcí, jež jsou vzájemně inverzní, lze zapsat identitou

(4.19 ) $$\psi(M, \boldsymbol{p}) = \psi(E(u, \boldsymbol{p}), \boldsymbol{p}) \equiv u$$

Podobné tvrzení, jakým je Shephardovo lemma ve vztahu k výdajové funkci, lze vyslovit pro vyvození poptávkových funkcí (tentokrát formulovaných v Marshallově tvaru) z nepřímé užitkové funkce $\psi(\boldsymbol{p}, M)$. Soustavu Marshallových poptávek můžeme generovat pomocí vztahu známého jako Royova identita[8].

### *Tvrzení 8 - Roy-Villého identita*

Máme dánu nepřímou užitkovou funkci $\psi(\boldsymbol{p}, M)$ příslušnou užitkové funkci $u(\boldsymbol{x})$ s vlastnostmi (W1), (W2), (W3), (W4), (W5). Potom soustavu Marshallových poptávkových funkcí po komoditách získáme tímto způsobem

(4.20) $$x = \frac{-\dfrac{\partial \psi(\boldsymbol{p}, M)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial \psi(\boldsymbol{p}, M)}{\partial M}}$$

To znamená, že poptávkovou funkci po $i$-té komoditě obdržíme jako (záporně vzatý) podíl dvou parciálních derivací nepřímé užitkové funkce $\psi(\boldsymbol{p}, M)$, a to jednak podle ceny $i$-té komodity, jednak podle spotřebitelova příjmu $M$.

8 Je pojmenována po jednom svém objeviteli, francouzském ekonomu René Royovi [1943]. Druhým byl zhruba v téže době jiný francouzský ekonom-matematik Jean Villé.

*Důkaz tvrzení 8*

Vztahem (4.19) jsme zapsali, že výdajová funkce a nepřímá užitková funkce jsou vzájemně v inverzním vztahu. Ten můžeme vyjádřit zápisem identity :

(4.21)
$$\psi[E(\boldsymbol{p},u),\boldsymbol{p}] = u\,.$$

Jestliže tuto identitu (platící pro libovolnou dvojici pevných hodnot $\boldsymbol{p}$ a $u$) derivujeme podle jednotlivých cen $p_i$, dostaneme při uplatnění řetězového pravidla pro derivaci složené funkce vztah

(4.22 )
$$\frac{\partial\psi[E(\boldsymbol{p},u),\boldsymbol{p}]}{\partial p_i} = \frac{\partial\psi(p,u)}{\partial E(\boldsymbol{p},u)}\cdot\frac{\partial E(\boldsymbol{p},u)}{\partial \boldsymbol{p}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial p_i} + \frac{\partial\psi(p,u)}{\partial \boldsymbol{p}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial p_i} = 0$$

neboť při pevném $u$ je $\dfrac{\partial u}{\partial p_i} = 0$ a dále $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial p_i} = 1$ neboť $\dfrac{\partial p_j}{\partial p_i} = \partial_{ij}$ (*Kroneckerovo* $\partial$), $i,j = 1,2,....,n$ a dále $E(\boldsymbol{p},u) = M$, neboť příjem $M$ je rozdělen beze zbytku.

(4.22 ) můžeme tedy přepsat do tvaru

(4.23 )
$$\frac{\partial\psi(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}\cdot\frac{\partial E(\boldsymbol{p},u)}{\partial p_i} + \frac{\partial\psi(\boldsymbol{p},M)}{\partial p_i} = 0$$

Z Shephardova lemmatu víme, že $\dfrac{\partial E(\boldsymbol{p},u)}{\partial p_i} = x_i$ ( tj.Hicksova poptávka po $i$-tém statku). Odtud tedy již snadno odvodíme

(4.24)
$$x_i = g_i(\boldsymbol{p},M) = -\frac{\dfrac{\partial\psi(\boldsymbol{p},M)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial\psi(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}} \qquad \square\,.$$

**Poznámka** Jestliže dále nepřímou užitkovou funkci vyjádříme v normalizovaném tvaru, tzn. při jednotkovém spotřebitelově příjmu ($M = 1$) s argumenty ve tvaru $\psi\left(\dfrac{p_1}{M},\dfrac{p_2}{M},....,\dfrac{p_n}{M},1\right) = \psi^*(r_1,r_2,....,r_n)$, kde pracujeme s $n$-členným vektorem normovaných cen $(r_1,r_2,....,r_n)$, pak lze výraz pro Royovu identitu zapsat přímo jako

(4.25)
$$\frac{p_i x_i}{M} = \frac{\dfrac{\partial\psi^*(\boldsymbol{r})}{\partial \log r_j}}{\dfrac{\sum_{j=1}^{n}\partial\psi^*(\boldsymbol{r})}{\partial \log r_j}}$$

tedy ve tvaru vyjadřujícím rozpočtovou účast $i$-té komodity na celkovém příjmu $M$ jako podíl parciální derivace nepřímé užitkové funkce podle logaritmované ceny této komodity a součtu analogicky vyjádřených parciálních derivací $\psi^*(\boldsymbol{r})$ podle všech logaritmovaných cen.

K názornějšímu vyjádření vztahů mezi uvedenými ekonomickými funkčními typy připojíme schéma :

UŽITKOVÁ FUNKCE
$u(\boldsymbol{x})$

***substituce***
$x_i = f_i(\boldsymbol{p}, M)$

VÝDAJOVÁ FUNKCE
$E(\boldsymbol{p}, u^0)$

← ***inverze*** →

NEPŘÍMÁ UŽITKOVÁ FUNKCE
$\psi(\boldsymbol{p}, M)$

**Shephardovo lemma**

$$x_i = \frac{\partial E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}^0)}{\partial p_i}$$

derivace $E$ podle $p_i$

**Royova identita**

$$x_i = -\frac{\dfrac{\partial \psi(\boldsymbol{p}, M)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial \psi(\boldsymbol{p}, M)}{\partial M}}$$

záporný podíl derivací $\psi$ podle $p_i, M$

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ
PO KOMODITÁCH
V HICKSOVĚ TVARU
$x_i = h_i(\boldsymbol{p}, u^0)$

← ***substituce*** →

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ
PO KOMODITÁCH
v MARSHALLOVĚ TVARU
$x_i = g_i(\boldsymbol{p}, M)$

### 4.5 Vzájemné vztahy mezi ekonomicky interpretovatelnými funkcemi

Jak bylo v předchozím textu naznačeno, není otázka přechodu od jednoho typu ekonomické funkce k jiné zdaleka snadno a přímočaře řešitelná. Do značné míry přitom záleží na tom, který typ funkce je volen jako výchozí. V úvahu přicházejí (prostá) užitková, nepřímá užitková, výdajová, případně jednotková výdajová funkce. Obecně lze říci, že vůbec největší obtíže - je-li volen jako výchozí ekonomický typ - činí (prostá) užitková funkce, což lze zdůvodnit značnou obtížnosti řešení zadaného problému maximalizace obecné (nelineární) užitkové funkce při omezení daném spotřebitelovým příjmem. Jen u několika málo příkladů lze toto řešení odvodit analyticky a výsledný systém poptávkových funkcí je vyjádřitelný v explicitním tvaru. Tři takové příklady, kterým se dostalo pozornosti i pojmenování v literatuře, uvádíme dále v části 5 .

V podstatně příznivější situaci se nacházíme, jestliže za výchozí ekonomický funkční typ volíme nepřímou užitkovou funkci nebo výdajovou funkci, kde převodní vztahy - Royova identita resp. Shephardovo lemma - umožňují vcelku snadno v explicitním tvaru vyjádřit soustavu poptávkových funkcí – podle kontextu v Marshallově nebo Hicksově tvaru - pomocí parciálních derivací výchozích funkcí. Na druhé straně však formulace prosté užitkové funkce je svým způsobem průhlednější, neboť zohledňuje přímo – jakkoliv subjektivní - výchozí preferenční hlediska při stanovení užitečnosti jednotlivých komodit včetně případných jejich vzájemných působení. Informace o preferenční struktuře mají, přirozeně, konkretizující dopad na volený tvar (nebo aspoň hodnoty parametrů) užitkové funkce.

Jak však ukázaly některé teoretické výzkumy posledních 20 let, ani pokusy o vytvoření všeobecně konzistentní soustavy všech ekonomických funkčních typů vycházející z nepřímé užitkové nebo z výdajové funkce, nevedou - až na skromné výjimky - ke všestranně uspokojivým závěrům. Neduhy, kterými převážná většina odvozených ekonomických funkcí trpí, spočívají především v té skutečnosti, že i když výchozí ekonomický tvar – např. výdajová funkce - splňuje všechny jemu odpovídající vlastnosti - např. výdajová funkce vlastnosti (E1),..., (E5) - nebudou po provedení příslušné transformace (např. Shephardova lemmatu) z něj odvozené ostatní funkční typy (poptávkové funkce) splňovat všechny vlastnosti, které by jim z ekonomického posuzování vlastností funkce daného typu měly příslušet.

Přirozeně, konkrétní závěry lze učinit vždy až po vyšetření vlastností ostatních ekonomických funkčních typů odvozených z výchozího typu a po zpravidla detailní analýze zjištění, do jaké míry - alespoň v části původní množiny parametrů a hodnot argumentů/proměnných funkčního tvaru - se žádoucí teoretické vlastnosti pro daný funkční typ zachovávají. Aktuální literatura v tomto směru je již vcelku bohatá, dílčí přínosy jednotlivých autorů lze nalézt např. v pracích [xx], [xx] ,[xx]. Zde se lze také seznámit i s jistou „kategorizaci“ pojmů, problémů a hledisek (aspekty tzv. teoretické konzistence funkčního tvaru[9]*/, tzv. oblastí aplikovatelnosti funkčního tvaru, parametrické flexibility apod.). Jejich podrobnější rozvedení by však zašlo za přiměřený rozsah i účel tohoto studijního textu.

[9] Pojem konzistence v tomto smyslu nemá pranic společného se stejně pojmenovanou vlastností (základní příznivou) odhadové funkce/estimátoru, jak ji známe např. z ekonometrie.