7 Funkcionální (Koňusova) indexní čísla

Prostředí rovnováhy spotřebitele umožňuje formulovat a analyzovat tento od statistické koncepce v principu odlišný typ indexních čísel. V definicích funkcionálních indexních čísel, jak dále uvidíme, se uplatňují pojmy užívané k charakterizaci situace spotřebitele usilujícího o maximalizaci svého užitku. Důležitou úlohu zde hrají některé poznatky o užitkové funkci, zejména v souvislosti s její nepřímou formou.

Uvažujme stejně jako dříve dvě časová období, která budeme v souladu se značením zavedeným pro aparát indexních čísel označovat „0“ - období základní a „1“ - období běžné. Ekonomická situace, ve které se nachází spotřebitel, nechť je v tomto základním období zevně charakterizována cenovým vektorem $\boldsymbol{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0))$. Současně nechť spotřebitel, jehož preferenční hlediska jsou vyjádřena přímou užitkovou funkcí $u^{(0)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pobírá v tomto základním obdobím příjem $M(0)$, který v plném rozsahu vynaloží na nákup n komodit. Tyto informace nám umožňují zavést pro základní období nepřímou užitkovou funkci $\psi(p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0); M(0))$, kterou budeme zkráceně označovat $\psi^{(0)}(\boldsymbol{p}, M)$. Jak patrno, horní index vyjadřuje časový okamžik měření, argumenty funkce jsou ceny komodit a důchod spotřebitele, obojí vzaté v období „0“ .

Naprosto shodně pak formulujeme analogické podmínky pro běžné období „1“ : V něm má spotřebitel příjem $M(1)$, přičemž vnější cenové prostředí je popsáno cenovým vektorem $\boldsymbol{p}(1) = (p_1(1), p_2(1), \ldots, p_n(1))$. To umožňuje parametrizovat nepřímou užitkovou funkci $\psi(p_1(1), p_2(1), \ldots, p_n(1); M(1))$, kterou budeme zkráceně značit $\psi^{(1)}(\boldsymbol{p}, M)$. Změny cenové hladiny budeme vyšetřovat ve dvou možných směrech, resp. fázích :

V prvé z nich budeme vycházet ze stavu daného situací v základním období „0“. Po změně cenového vektoru z původního $\boldsymbol{p}(0)$ na nový $\boldsymbol{p}(1)$ dojde následně k posunu původního rovnovážného bodu charakterizujícího úrovně poptávky po jednotlivých komoditách) $\boldsymbol{q}(0)$ do nového bodu $\boldsymbol{q}^*(0)$, v němž se (nová) poptávka po komoditách přizpůsobí relativním změnám cenových proporcí z $\boldsymbol{p}(0)$ na $\boldsymbol{p}(1)$. Obecně lze říci, že se zvýší poptávka po těch komoditách, u kterých došlo k relativnímu zlevnění na úkor statků, které naopak zdražily. Přitom se zpravidla změní i důchod potřebný k nákupu nových komoditních množství $\boldsymbol{q}^*(0)$. Aby nicméně byla zachována souměřitelnost posuzování obou situací spotřebitelem, nemění se uvažovaná hladina užitku $u(0)$, tzn. že přizpůsobení kvantit cenovým změnám se odehrává na téže indiferenční křivce

Druhá uvažovaná situace ve změnách cen a následném přizpůsobení jednotlivých poptávek bude v jistém smyslu „inverzní“ k první : Vyjdeme ze stavu charakterizovaného cenovou hladinou a úrovní spotřeby komodit v běžném období „1“, tzn. $\boldsymbol{p}(1)$, $\boldsymbol{q}(1)$. Užitek odpovídající této výchozí situaci je dán hodnotou $u(1)$. Dále předpokládáme změnu cenového vektoru $\boldsymbol{p}(1)$ na úrovně cen tentokrát odpovídající základnímu období, tedy $\boldsymbol{p}(0)$. Tomuto cenovému pohybu bude odpovídat analogický pohyb kvantit, tedy přesun rovnovážného bodu do nového bodu $\boldsymbol{q}^*(1)$ zachycujícího úrovně poptávky po komoditách, který by se realizoval, pokud by poptávaný komoditní vektor - poskytující spotřebiteli užitek na nezměněné hladině $u(1)$ - byl odvozován z cenové úrovně základního období, tedy $\boldsymbol{p}(0)$.

7.1 Funkcionální cenová indexní čísla

Na základě předešlého vymezení situace a pojmů nyní definujeme :

Definice 7.1 ***Funkcionální Koňusovo-Laspeyresovo cenové indexní číslo*** $P_{01}^{M(0)}$ na hladině užitku $u(0)$ je určeno výrazem

(7.1)
$$P_{01}^{M(0)} = \frac{M^*(1,0)}{M(0,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i^*(0)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)}$$

kde symbol $q_i^*(0)$ označuje taková rovnovážná množství komodit, která při změněné cenové situaci $\boldsymbol{p}(1)$ přinášejí spotřebiteli stejný užitek $u(0)$ jako komoditní kombinace $q(0)$ za cenové situace $\boldsymbol{p}(0)$. Hodnotový agregát $M^*(1,0)$ pak označuje právě příjem dostačující k tomu, aby spotřebitel měl možnost nakoupit komodity v množstvích $q_i^*(0)$ (opět při nové cenové situaci $\boldsymbol{p}(1)$).

Ve výrazu (2.7.1) jsme použili místo označení $M(0)$ představujícího výdaj nutný na pořízení komodit $q_i(0)$ při cenách $p_i(0), i = 1,2,....,n$ - tedy celkem $\sum p_i(0) \cdot q_i(0)$ - poněkud odlišné značení $M(0,0)$. Je tomu tak proto, abychom mohli - v pořadí nejprve ceny, pak kvantity - zkráceně vyjadřovat příslušné hodnotové agregáty i v případě, že nedojde ke shodě časových období, v nichž jsou ceny a kvantity vyjadřovány. Obdobné značení uplatníme i v navazujících definicích.

Definice 7.2 ***Funkcionální Koňusovo-Paascheho cenové indexní číslo*** $P_{01}^{M(1)}$ na hladině užitku $u(1)$ je určeno hodnotou

(7.2)
$$P_{01}^{M(1)} = \frac{M(1,1)}{M^*(0,1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i^*(1)}$$

kde analogicky symbol $q_i^*(1)$ označuje taková rovnovážná množství komodit, která při změněné cenové situaci $\boldsymbol{p}(0)$ přinášejí spotřebiteli stejný užitek jako komoditní kombinace $\boldsymbol{q}(1)$ za původní cenové situace $\boldsymbol{p}(1)$. Náklad na pořízení statků $M^*(0,1)$ pak odpovídá právě příjmu potřebnému k tomu, aby spotřebitel měl možnost nakoupit komodity v množstvích $q_i^*(1)$, tentokrát vycházeje z původní cenové situace $\boldsymbol{p}(1)$.

V této souvislosti bude mj. zajímavé a užitečné vyšetřit vztah výrazů $M^*(1,0)$ a $M(1,0)$. Druhý z nich, neuplatňující se přímo v definicích 7.1 a 7.2 funkcionálních indexních čísel, představuje úroveň příjmu potřebnou k tomu, aby spotřebitel za cenové situace $\boldsymbol{p}(1)$ nakoupil komodity ve stejných množstvích jako v základním období, tj. $\boldsymbol{q}(0)$, tzn. neuvažuje se zde žádná adaptace poptávky po komoditách při změně cenových proporcí.

Tvrzení 7.1 Pro symbol $M^*(1,0)$ zavedený v definici 7.1 platí ve vztahu k $M(1,0)$ nerovnost

(7.3) $$M^*(1,0) \le M(1,0)$$.

Ověření : Postačí všimnout si srovnání hodnot nepřímé užitkové funkce $\psi^{(0)}(\boldsymbol{p},M)$. Platí pro ni totiž

$$\psi(p_1(1), p_2(1),\ldots, p_n(1); M^*(1,0)) = u(0) = \psi^{(0)}(\boldsymbol{p}(0), M(0)).$$

přičemž příjem $M^*(1,0)$ je definičně nejmenší postačující k tomu, aby spotřebitel hladiny užitku $u(0)$ dosáhl za cenové situace $p(1)$. Pokud by platila opačná než ověřovaná nerovnost, tzn. situace $M^*(1,0) > M(1,0)$, potom by to znamenalo, že s menší hodnotou příjmu, totiž s úrovní $M(1,0)$ by bylo možno dosáhnout stejné hladiny užitku $u(0)$ jako s úrovní $M^*(1,0)$. Vzhledem k tomu, že srovnání by proběhlo při cenách $p(1)$ na téže indiferenční křivce, bylo by toto zjištění v rozporu s předpokladem, že $M^*(1,0)$ je minimální možný příjem. Nepřímá užitková funkce by tedy nemohla být v proměnné M rostoucí - viz její vlastnost (W2). Jak lze ukázat, dostali bychom se i do sporu s konvexností množin vymezujících indiferenční křivky. □ .

Nerovnost (7.3) můžeme vysvětlit takto : Příjem nutný k zakoupení komodit poskytujících užitek $u(0)$ je menší, pokud dojde k přizpůsobení cen pohybem kvantit do nového rovnovážného bodu (odpovídajícího cenové úrovni $\boldsymbol{p}(1)$, než v situaci, kdy k takovémuto pohybu kvantit nedojde. Není to ostatně nic překvapivého, neboť pohyb kvantit (po téže indiferenční křivce) při změně cen do nového rovnovážného bodu se děje (v souladu s rovnocenným principem minimalizace potřebného příjmu) směrem k pořizování levnějších komodit v kombinacích poskytujících jinak stejnou hladinu užitku.

Poznámka 7.1 : Pro symbol $M^*(0,1)$ zavedený v definici 7.2 platí ve vztahu k $M(0,1)$ nerovnost

(7.4) $$M^*(0,1) \le M(0,1)$$

kterou ověříme analogickou úvahou, pokud vyjdeme z ryzí monotónnosti nepřímé užitkové funkce $\psi^{(1)}(\boldsymbol{p},M)$ ve vztahu k M. Také zde můžeme konstatovat, že příjem nezbytný k pořízení komodit spotřebovávaných v běžném období $\boldsymbol{p}(1)$ je nižší v případě, že se kvantity pohybem do nového rovnovážného bodu (tentokrát pro cenovou úroveň $\boldsymbol{p}(0)$ přizpůsobí odehrané cenové změně. Připomeňme, že v této úvaze postupujeme v čase „inverzně“, tj. od běžného „1“ k základnímu „0“ období. Opět je to plně v souladu s charakterizací rovnovážného bodu jako stavu, v němž se ustálí poptávka po jednotlivých komoditách, nastal-li dříve pohyb v cenách těchto komodit, přičemž toto směřování vyústí v „nejlevnější možnou komoditní kombinaci“ , s níž se dociluje daná hladina užitku $u(1)$. V uvažovaném případě platí

$$\psi(p_1(0), p_2(0),\ldots, p_n(0); M^*(0,1)) = u(1) = \psi^{(1)}(\boldsymbol{p}(1), M(1)).$$

a tedy pro příjem nemůže současně také platit $M(0,1) < M^*(0,1)$, neboť by to mj. znamenalo, že nepřímá užitková funkce není rostoucí v příjmu a že indiferenční křivky nemohou být „vyklenuty“ směrem k počátku (nekonvexnost množin vymezujících tyto křivky).

Kvantová funkcionální indexní čísla nyní budeme definovat následujícím způsobem :

7.2 Funkcionální kvantová indexní čísla

Definice 7.3 Funkcionální ***Koňusovo-Laspeyresovo kvantové indexní číslo*** $Q_{01}^{M(0)}$ pro cenovou situaci základního období $\boldsymbol{p}(0)$ je určeno výrazem

(7.5)
$$Q_{01}^{M(0)} = \frac{M^*(0,1)}{M(0,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i^*(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)}$$

kde kvantity $q_i^*(1)$ mají stejný význam jako v Definici 2.7.2 .

Definice7.4 : Funkcionální ***Koňusovo-Paascheho kvantové indexní číslo*** $\boldsymbol{Q_{01}^{M(1)}}$ pro cenovou situaci běžného období $\boldsymbol{p}(1)$ je definováno výrazem.

(7.6)
$$Q_{01}^{M(1)} = \frac{M(1,1)}{M^*(1,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i^*(0)}$$

kde význam kvantit $q_i^*(0)$ je stejný jako v Definici 7.1.

Jak je z obou předchozích definicí patrné, nejsou kvantová indexní čísla odvozena z cenových pouhou formální záměnou cen a kvantit. Je tomu tak proto, že zatímco v případě cenových indexních čísel zkoumáme pohyb kvantit vyvolaný právě změnou cenových proporcí v různých místech téže indiferenční křivky, nelze srovnatelnou úvahu provést pro změny v kvantitách. Kvantity reagují pohybem do rovnovážného bodu při změně cen, nikoliv však naopak. (Cenové proporce se vytvářejí nezávisle na vůli spotřebitele).

Kvantová indexní čísla tedy vyjadřují nikoliv porovnání stavů ve dvou bodech téže indiferenční křivky, ale stavů na dvou různých indiferenčních křivkách představujících hladiny užitku pro základní a běžné období ; jde tedy o srovnání dvou stavů na téže Engelově křivce (tj. křivce vyjadřující vývoj poptávky po dané komoditě při rostoucím příjmu M a pevných cenách $\boldsymbol{p}$). Pro případ definice 7.3 jde o Engelovu křivku při daných cenových proporcích $\boldsymbol{p}(0)$ základního období, v případě definice 7.4 se jedná o Engelovu křivku odpovídající pevným cenám $\boldsymbol{p}(1)$ běžného období**.**

Na obrázku ( ) představuje Koňusovo-Laspeyresovo kvantové indexní číslo podíl peněžních objemů v bodech … a ………. . Na stejném obrázku lze zaznamenat Koňusovo-Paascheho kvantové indexní číslo jako podíl spotřebitelových výdajů v bodech ………. a …….. .

<u>Výklad k obrázkům funkcionální indexní čísla</u>

Přibližme výše uvedené obrázkem. Máme na něm znázorněnu situaci se dvěma komoditami q_1 a q_2. Uvažujme dvě indiferenční křivky odpovídající hladinám užitku $u(0)$ a $u(1)$ takové, že v souladu s obrázkem $u(0) < u(1)$. První hladině užitku odpovídá nepřímá užitková funkce $\psi[p_1(0), p_2(0), M(0)] = u(0)$, druhé pak nepřímá užitková funkce $\psi[p_1(1), p_2(1), M(1)] = u(1)$.

V základním období „0" nechť jsou dány ceny $p_1(0)$, $p_2(0)$. Jejich relativní poměr $\frac{p_2(0)}{p_1(0)}$ určuje (doplňkem do 180%) tangens úhlu γ. Úsečka p vyjadřuje rozpočtové omezení ve tvaru

$$p_1(0) \cdot q_1(0) + p_2(0) \cdot q_2(0) = M(0,0) \qquad (\text{ zkráceně } M(0))$$

kde příjem o velikosti $M(0)$ udává minimální dosažitelné náklady na nákup komodit - v množstvích $q_1(0)$, $q_2(0)$ - postačující k dosažení užitku o velikosti $u(0)$. Bod C je (jediným) takovým optimálním bodem, v němž se úsečka p dotýká indiferenční křivky $u(0)$.

Předpokládejme, že se v důsledku nějakého exogenního vývoje změní cenový poměr $\frac{p_2(0)}{p_1(0)}$ tak, že se zdraží komodita q_1 a současně zlevní komodita q_2. Nový poměr cen bude $\frac{p_2(1)}{p_1(1)}$. Znamená to, že k případnému dosažení užitku na téže úrovni $u(0)$ bude zapotřebí koupit více zboží q_2 a méně zboží q_1. Změněný relativní cenový poměr bude dán tangentou úhlu δ. Nákupy obou zboží budou realizovány v množstvích $q_1^*(0)$, $q_2^*(0)$, které odpovídají souřadnicím nového rovnovážného bodu D. Úsečka q procházející tímto bodem je přitom vyjádřena rovnicí

$$p_1(1) \cdot q_1^*(0) + p_2(1) \cdot q_2^*(0) = M^*(1,0)$$

Uvažujme nyní obrácenou situaci k výše popsané. Nacházíme se v běžném období „1", v němž je užitek spotřebitele popsán nepřímou užitkovou funkcí $\psi^{(1)}[p_1(1), p_2(1), M(1)]$ na vyšší hladině užitku $u(1)$ tzn., že při stejném množství jedné komodity se nakupuje více množství komodity druhé než v základním období. Rovnovážný stav, který odpovídá minimálním možným vynaloženým nákladům na nákup komodit zajišťujících užitek $u(1)$, je vyjádřen polohou bodu G - komodity se tedy budou nakupovat v množstvích $q_1(1)$ a $q_2(1)$. Ceny nyní odpovídají cenovému poměru $\frac{p_2(1)}{p_1(1)}$ tzn. opět se nacházejí v proporci odpovídající tangentě úhlu δ.

Úsečka vedená bodem C rovnoběžně s přímkou q je vyjádřena rovnicí $p_1(1) \cdot q_1(0) + p_2(1) \cdot q_2(0) = M(1,0)$. Tato úsečka není k indiferenční křivce $u(0)$ tečná, nýbrž ji protíná ve dvou bodech (jedním z nich je právě C) a nemůže tedy představovat minimální možné výdaje potřebné k dosažení užitku $u(0)$.

Nechť nyní dojde pod vlivem nějakého vnějšího podnětu ke změně cen, dejme tomu na poměr odpovídající cenové relaci v základním období tj. $\frac{p_2(0)}{p_1(0)}$. Přizpůsobení poptávky nákupem komodit v jiných množstvích než $q_1(1)$ a $q_2(1)$ – označme je $q_1^*(1)$ a $q_2^*(1)$ - je charakterizováno přesunutím nákupů z bodu Q do nového rovnovážného bodu H. Je zřejmé, že přímky q a r jsou rovnoběžné, neboť ve vztahu k ose q_1 svírají stejný úhel δ.

Pokusme se ještě na tomtéž obrázku vyjádřit veličiny porovnávané v Koňusových indexních číslech :

Vezměme nejprve indiferenční křivku $\psi^{(0)} = \psi^{(0)}[p_1(0), p_2(0), M(0)]$ s užitkem na hladině $u(0)$. Výraz $M(0,0)$ představuje peněžní prostředky nutné (a postačující) k tomu, aby spotřebitel dosáhl užitku $u(0)$ při cenové úrovni $\boldsymbol{p}(0)$. Naproti tomu výraz $M^*(1,0)$ v čitateli $P_{01}^* M(0)$ udává peněžní objem postačující k tomu, aby spotřebitel dosáhl téhož užitku $u(0)$ při cenách $\boldsymbol{p}(1)$ běžného období. Nejmenší takový výdaj představuje nákup komodit v množstvích odpovídajících bodu D, neboť tento nákup je nejúspornější možný. V obecném případě nelze sice říci, zda je $M^*(1,0) < M(0,0)$ nebo platí opačná nerovnost, zato lze tvrdit, že vždy platí $M^*(1,0) \leq M(1,0)$, kde druhý výraz představuje množství peněz potřebné na nákupy obou komodit pro užitek $u(0)$ při cenové úrovni $\boldsymbol{p}(1)$, pokud by se ovšem poptávka nepřizpůsobila změně v poměru cen z $\boldsymbol{p}(0)$ na $\boldsymbol{p}(1)$. Velikost těchto výdajů $M(1,0)$ odpovídá úsečce q^* vedené bodem C (vyjadřujícím nakupovaná množství $q_1(0)$, $q_2(0)$) rovnoběžně s úsečkou q.

Hodnota funkcionálního (Koňusova) indexního čísla $P_{01}^* M(0)$ je tedy dána poměrem výdajů představovaných peněžním množstvím na úsečce q vůči analogickému množství vyjádřenému úsečkou p. Nelze obecně říci, které výdaje jsou větší (i když určením úhlů a souřadnic koncových bodů obou úseček by to možné bylo pro každý jednotlivý případ) lze pouze vyslovit tendenci, že posun „příliš daleko“ od „malých“ hodnot komoditních množství (tj. „ze středu blíže k osám“) náklady (tedy i hodnota indexního čísla) porostou v důsledku rychle narůstajících nákladů spojených s pořízením komodity potřebné ve velkém množství při zřetelně nižším tempu poklesu nákladů na pořízení „ubývající komodity“.

Nyní provedeme obdobnou úvahu ve vztahu k užitkové funkci $\psi^{(1)} = \psi^{(0)}[p_1(1), p_2(1), M(1)]$ tzn. s užitkem na hladině $u(1)$. Zřejmě výraz $M(1,1)$ představuje peněžní objem nutný a postačující k tomu, aby spotřebitel dosáhl užitku $u(1)$ při cenové úrovni $\boldsymbol{p}(1)$. V porovnání s tím výraz $M^*(0,1)$ ve jmenovateli $P_{01}^* M(1)$ udává nejmenší možný peněžní objem postačující k tomu, aby spotřebitel dosáhl téhož užitku $u(1)$ při cenách $\boldsymbol{p}(0)$ základního období. Ten představuje objem prostředků vynaložený na nákup komodit v množstvích odpovídajících bodu H (jako nejúspornějšímu nákupu při těchto cenách). Ani zde nelze obecně říci, zda platí $M^*(0,1) < M(1,1)$ nebo opačná nerovnost, zato se lze snadno přesvědčit, že vždy platí $M^*(0,1) \leq M(0,1)$, kde $M(0,1)$ vyjadřuje výdaj na nákupy obou komodit pro užitek $u(1)$ při cenové úrovni $\boldsymbol{p}(0)$, jestliže by se poptávka po komoditách neadaptovala podle změny v poměru cen z $\boldsymbol{p}(1)$ na $\boldsymbol{p}(0)$. Velikost výdajů $M(0,1)$ udává tentokrát úsečka p^* vedená bodem Q (vyjadřujícím množství $q_1(1)$, $q_2(1)$ nakupovaná v nynějším „základním“ období „1“) jako rovnoběžka s úsečkou p a její rovnice je

$$p_1(0) \cdot q_1(1) + p_2(0) \cdot q_2(1) = M(0,1)$$

Tato úsečka není k indiferenční křivce $u(1)$ tečná, nýbrž ji protíná ve dvou bodech (jedním z nich je G).

Úsečka s je naproti tomu vyjádřena rovnicí

$$p_1(0) \cdot q_1^*(1) + p_2(0) \cdot q_2^*(1) = M^*(0,1)$$

Je patrné, že v případě tří a více komodit by byla situace principiálně obdobná, znázornění pomocí indiferenčních křivek a rozpočtových nadrovin by ovšem bylo komplikovanější.

7.3 Jednostranná omezení funkcionálních indexních čísel - Koňusovy nerovnosti

Z dokázaných nerovností (7.3) a (7.4) bezprostředně vyplývají další zajímavé důsledky.

Důsledek 7.1

Vzhledem k platnosti nerovnosti $M^*(1,0) \le M(1,0)$, platí také nerovnost

(7.7) $$\frac{M^*(1,0)}{M(0,0)} \le \frac{M(1,0)}{M(0,0)} \qquad \text{což znamená} \qquad P_{01}^{M(0)} \le P_{01}^{L}$$

Odvodili jsme tedy poznatek, že funkcionální cenové indexní číslo $P_{01}^{M(0)}$ lze shora omezit hodnotou Laspeyresova cenového indexního čísla (srovnávajícího vektory cen běžného a základního období).

Podobně při platnosti $M^*(0,1) \le M(0,1)$ můžeme pokračovat úvahou, že

(7.8) $$\frac{M(1,1)}{M^*(0,1)} \ge \frac{M(1,1)}{M(0,1)} \qquad \text{což v tomto případě znamená, že} \quad P_{01}^{P} \le P_{01}^{M(1)}$$

a lze tedy konstatovat, že funkcionální cenové indexní číslo $P_{01}^{M(1)}$lze zdola omezit hodnotou Paascheho cenového indexního čísla. Srovnání opět probíhá mezi vektory cen běžného a základního období, kvantity zde vystupují buď po přizpůsobení nebo v původních hodnotách.

Vztahy (7.7) a (7.8) odvodil poprvé ruský statistik A .A. Koňus [1924] a jsou po něm nazývány Koňusovy nerovnosti. Funkcionální cenová indexní čísla nelze sice na jejich základě omezit oboustranně ohraničeným intervalem, nicméně možnost aspoň jednostranného omezení každého z obou definovaných indexních čísel je cenná (zvláště, tvoří-li hranice právě P_{01}^{P} a P_{01}^{L}).

Obdobným způsobem dostaneme i pro kvantová funkcionální indexní čísla dvě jednostranná omezení, a to pro

(7.9) $$Q_{01}^{M(0)} \le Q_{01}^{L} \qquad \text{, neboť}$$

(7.10) $$\frac{M^*(1,0)}{M(0,0)} \le \frac{M(1,0)}{M(0,0)}$$

(7.11) $$Q_{01}^{M(1)} \le Q_{01}^{P} \qquad \text{, protože}$$

(7.12)
$$\frac{M(1,1)}{M^*(1,0)} \le \frac{M(1,1)}{M(1,0)}$$

tedy obdobně jako u cenových lze alespoň jednostranně vymezit jejich vztahy k Laspeyresovu a Paascheho indexním číslům.

7.4 Fisherovy axiomy pro funkcionální indexní čísla

Rovněž u funkcionálních indexních čísel můžeme vyšetřovat, jak tato indexní čísla splňují jednotlivé axiomy uvedené I.Fisherem a na základě toho učinit jisté úvahy o jejich „teoretické kvalitě". S ohledem na nesymetričnost v adaptaci na změny vývoje kvantit a cen ovšem musíme přistupovat k vyhodnocování dílčích závěrů pozorně. Nelze zde pouze mechanicky zaměňovat symboly (ceny za množství a vice versa) v příslušných výrazech. Vždy je třeba promyslet, jaký je význam toho-kterého axiomu v prostředí změn cenových poměrů a následných posunů rovnovážných bodů.

(F1) **Axiom identity** je zřejmě splněn triviálním způsobem u obou cenových indexních čísel, neboť při „nedostatku času" ke změně cen k žádné adaptaci poptávky po komoditách nemůže dojít. Kvantity se prostě nemění, tudíž pro $p_i(1) = p_i(0)$ vyplývá $q_i^*(0) = q_i(0)$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ a následně $P_{01}^{M(0)} = 1$. Zde i formální dosazení do (2.7.1) vede ke stejnému závěru. Analogicky je tomu u indexního čísla $P_{01}^{M(1)}$, kde rovněž po dosazení $p_i(1) = p_i(0)$ a $q_i^*(0) = q_i(0)$ do (7.2) obdržíme 1.

(F2) **Axiom záměny faktorů** je rovněž u $P_{01}^{M(0)}$ i $P_{01}^{M(1)}$ splněn. K ověření je třeba pouze přiřadit k cenovému indexnímu číslu adekvátní kvantové : vezmeme-li např. $P_{01}^{M(0)}$, je nutné k němu jako duální použít kvantové $Q_{01}^{M(1)}$ z definice 7.4, protože testu musíme uvažovat v kontextu přechodu z hladiny $u(0)$ na $u(1)$. Potom platí

(7.13)
$$P_{01}^{M(0)} \cdot Q_{01}^{M(1)} = \frac{M^*(1,0)}{M(0,0)} \cdot \frac{M(1,1)}{M^*(1,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)}$$

Analogickou úvahou prověříme, že také

(7.14)
$$P_{01}^{M(1)} \cdot Q_{01}^{M(0)} = \frac{M(1,1)}{M^*(0,1)} \cdot \frac{M^*(0,1)}{M(0,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)}$$

kde sledujeme nejprve adaptaci kvantit pohybem po indiferenční křivce $u(1)$ a následně sestup po Engelově křivce na úroveň $u(0)$.

(F3) U **axiom**u **záměny období** budeme porovnávat v souladu s následností dvou fází, ve kterých probíhá přizpůsobování kvantit (pohybem do nových rovnovážných bodů) cenovým změnám. Nejprve se odehraje změna cen $\boldsymbol{p}(0) \Rightarrow \boldsymbol{p}(1)$, poté protisměrná změna $\boldsymbol{p}(1) \Rightarrow \boldsymbol{p}(0)$. Proto vezmeme-li v prvé fázi poměr $P_{01}^{M(0)}$, musíme při obráceném kroku uplatnit $P_{10}^{M(1)}$. Obdobně postupujeme u kvantových indexních čísel. Platí tedy vztahy

(7.15) $$P_{01}^{M(0)} \cdot P_{10}^{M(1)} = \frac{M^*(1,0)}{M(0,0)} \cdot \frac{M(0,0)}{M^*(1,0)} = 1$$, jakož i vztah

(7.16) $$P_{01}^{M(1)} \cdot P_{10}^{M(0)} = \frac{M(1,1)}{M^*(0,1)} \cdot \frac{M^*(0,1)}{M(1,1)} = 1$$

(7.17) $$Q_{01}^{M(0)} \cdot Q_{10}^{M(1)} = \frac{M^*(0,1)}{M(0,0)} \cdot \frac{M(0,0)}{M^*(0,1)} = 1$$ a podobně vztah

(7.18) $$Q_{01}^{M(1)} \cdot Q_{10}^{M(0)} = \frac{M(1,1)}{M^*(1,0)} \cdot \frac{M^*(1,0)}{M(1,1)} = 1$$,

kteréžto rovnosti jsme snadno ověřili přímým dosazením do příslušných definičních výrazů.

(F4) Při vyšetření **axiom**u **tranzitivity** nejprve formulujme příslušnou levou stranu :

(7.19) $$P_{01}^{M(0)} \cdot P_{12}^{M(1)} = \frac{M^*(1,0)}{M(0,0)} \cdot \frac{M^*(2,1)}{M(1,1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i^*(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(2) \cdot q_i^*(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i^*(1)}$$

Znamená to tedy, že nejprve na indiferenční hladině užitku $u(0)$ dojde k pohybu rovnovážného bodu v závislosti na změně cenových relací $\boldsymbol{p}(0) \Rightarrow \boldsymbol{p}(1)$. Nová rovnováha se vytvoří v bodě $q_i^*(0)$. Druhým členem součinu levé strany je vyjádření analogické změny při přechodu $\boldsymbol{p}(1) \Rightarrow \boldsymbol{p}(2)$, tentokrát se však pohybujeme po indiferenční křivce $\boldsymbol{u}(1)$ a nová rovnováha vznikne v bodě $q_i^*(1)$.

Na druhé straně výraz $P_{02}^{M(0)}$ představuje opět situaci na indiferenční křivce $\boldsymbol{u}(0)$, kde se nějaké jiné kvantity $q_i^{**}(0)$ ustálí v bodě rovnováhy při cenových relacích odpovídajících období „2“. Vskutku zde není žádný důvod pro shodu $P_{01}^{M(0)} \cdot P_{12}^{M(1)}$ na levé a $P_{02}^{M(0)}$ na pravé straně (7.19). Okružnost tedy není u funkcionálního cenového indexního čísla splněna.

(F5) **Axiom určenosti :** Je zřejmé, že výpadek některé z uvažovaných komodit nemá nijak osudný dopad na definiční určenost funkcionálního IČ. To je také vždy definováno, neboť jmenovatele lze ve všech případech interpretovat jako kladnou hodnotu nákladů na opatření komoditní kombinace (ať vezmeme ceny či kvantity jakkoliv).

(F6) **Axiom souměřitelnosti** : Jestliže změníme měrovou jednotku některé komodity (např. 100-násobkem), pak se ve stejném 100-násobku zvýší i cena za novou jednotku komoditního množství. Současně však dojde k reciproké změně (100-násobnému zmenšení) původní množstevní jednotky, ve které bude vyjádřen fyzický objem komodity. Výsledkem bude tedy hodnota $(100 \cdot p_i \cdot \frac{1}{100 \cdot q_i})$ shodná s původní v peněžním vyjádření. Je též zřejmé, že tyto změny měrových jednotek se nijak nedotýkají indiferenčních hladin. Funkcionální indexní číslo tedy axiomu (F6) vyhovuje.

(F7) **Axiom proporcionality** : Jestliže všechny ceny vzrostou mezi základním a běžným obdobím ve shodném poměru, tj. $p_i(1) = c \cdot p_i(0)$ pro všechna $i = 1, 2, ..., n$, potom zřejmě nedojde k žádnému posunu rovnovážných bodů na jakékoliv hladině užitku, neboť relativní cenové proporce zůstanou beze změn. Žádná komodita se vůči jiné nezlevní ani nezdraží. Tedy

(7.20)
$$P_{01}^{M(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i^*(0)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)} = \frac{c \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)} = c$$

neboť $q_i(0) = q_i^*(0)$ při nezměněných relacích v poptávce. Stejný výsledek získáme pro všechna ostatní (cenová i kvantová) funkcionální indexní čísla.

Jak je z předchozího patrné, funkcionální indexní čísla jsou nepochybně kvalitním výrazovým prostředkem pro srovnání cenových resp. objemových hladin v situacích, kdy máme dostatek informací k sestrojení příslušných užitkových funkcí. Tím je ostatně také vymezen (dosti omezený) okruh jejich uplatnění, kterým může být jen speciální mikroekonomické prostředí : porovnávání dvou různých spotřebních košů, sledování vývoje reálné příjmové hladiny u jednotlivce nebo u stejnorodě se projevující malé sociální skupiny (rodiny apod.). Použitelnost na vyšších úrovních agregace chování spotřebitele je těžko myslitelná právě pro individuálnost hodnocení téhož spotřebního koše různými jedinci.