8 Konzistentní výdajové systémy

V této části uvedeme několik příkladů schémat s konkrétními funkčními tvary, které mohou dobře sloužit nejen jako ilustrace, nýbrž také jako konkrétní modelové specifikace pro reálné ekonometrické využití - modelování spotřebitelské poptávky. Nejprve uvedeme - v částech 8.1 - 8.3 - schémata vycházející z (prosté) užitkové funkce, poté - v částech 8.4 - 8.8 připojíme několik dalších, jejichž východiskem je nepřímá užitková funkce nebo výdajová funkce. V jednotlivých - vesměs empiricky vícekrát prověřených - modelových formulacích půjde kromě prezentace výchozího funkčního tvaru zejména o odvození příslušného systému poptávkových funkcí.

8.1 Rozšířená kvadratická užitková funkce (dvoukomoditní)

Problém s řešením soustavy nelineárních rovnic charakterizujících podmínky rovnovážného stavu $\frac{u_i}{p_i} = \lambda$ pro $i = 1,2,....,n$ vede k úvaze o možnosti formulovat jako užitkovou funkci kvadratickou funkci, jejíž mezní užitky jsou lineárními funkcemi komodit. Jak však dále ukážeme, volba kvadratická funkce jako užitkové není šťastná, pokud ji posuzujeme též z dalších hledisek.

Uvažujme nejprve dvoufaktorovou kvadratickou užitkovou funkci obecného tvaru s křížovým členem

(8.1) $$u(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2\right),$$

jejíž (známé) parametry a_{11}, a_{12}, a_{22} zatím nepodrobíme žádným restrikcím.

Funkce zapsaná v (8.1) je spojitá a dvakrát spojitě diferencovatelná při jakékoliv volbě parametrů. Další její vlastnosti však, jak ukážeme, na hodnotách parametrů silně závisí.

Funkci (8.1) budeme nyní maximalizovat standardním způsobem, tj. použijeme k kritérium

(8.2) $$Max\left[u(x) - \lambda \cdot (p_1x_1 + p_2x_2 - M)\right]$$

s Lagrangeovým multiplikátorem λ.

Výpočtem parciálních derivací a jejich následným anulováním získáme *nutné* podmínky pro lokalizaci rovnovážného bodu, v němž nastává maximum :

(8.3A) $$u_1 = \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

(8.3B) $$u_2 = \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} = a_{11}x_1 + a_{22}x_2 \quad .$$

Máme tedy soustavu tří rovnic s neznámými x_1, x_2 (a λ) :

(8.4A) $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda \cdot p_1$$

(8.4B) $$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda \cdot p_2$$

(8.4C) $$p_1x_1 + p_2x_2 = M ,$$

kterou pro tyto neznámé řešíme.

Zvolíme-li kteroukoliv z metod řešení soustav lineárních rovnic (např. komparační metodu s eliminací multiplikátoru λ), dostaneme řešení ve tvaru

(8.5A) $$x_1 = \frac{M(a_{22}p_1 - a_{12}p_2)}{a_{11}p_2{}^2 + a_{22}p_1{}^2 - 2a_{12}p_1p_2}$$

(8.5B) $$x_2 = \frac{M(a_{11}p_2 - a_{12}p_1)}{a_{11}p_2^2 + a_{22}p_1^2 - 2a_{12}p_1p_2}$$

(8.5C) $$\lambda = \frac{M\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)}{a_{11}p_2^2 + a_{22}p_1^2 - 2a_{12}p_1p_2}$$

přičemž výraz (8.5C) pro neznámou λ jsme uvedli jen pro úplnost. Tímto jsme tedy získali dvojici poptávkových funkcí po komoditách ζ_1, ζ_2, které, jak vidíme, jsou přímo úměrné příjmu M a klesají s růstem ceny vlastní komodity. Potud je vše v pořádku.

Kvadratická funkce (8.1) a z ní odvozené poptávkové funkce (8.5A), (8.5B) však musí splňovat podmínky, které vyplývají z ekonomického kontextu. Tak např. (vedle podmínky $u(\boldsymbol{0}) = 0$) musí být užitková funkce *nezáporná pro všechny kladné hodnoty statků* x_1, x_2. Dále musí mít *kladné oba mezní užitky* a být *kvazikonkávní*. *Poptávkové funkce musí být* rovněž *nezáporné* a měly by splňovat požadavek, *aby byly klesající s cenou vlastní komodity*. Ukážeme, že v případě kvadratické funkce (8.1) jsou tyto požadavky vzájemně rozporné a nelze nalézt žádný přípustný obor parametrických hodnot (a_{11}, a_{12}, a_{22}), ve kterém by byly všechny podmínky splněny.

A1. Nejprve vyšetříme podmínky pro ***nezápornost*** samotné ***kvadratické funkce***. Lze je vyjádřit jako požadavek, aby kvadratická forma s trojicí koeficientů (a_{11}, a_{12}, a_{22}) byla v proměnných x_1, x_2 kladně semidefinitní. To lze zapsat jako

(8.6) $$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0 .$$

Tento požadavek je – *jak známo z teorie kvadratických forem* – splněn právě tehdy, jestliže současně platí podmínky :

(8.7) $$a_{11} > 0 , \quad a_{22} > 0, \quad a_{11}.a_{22} \geq a_{12}{}^2 .$$

V jiných situacích nelze (*přinejmenším ne pro všechny hodnoty komodit* ζ_1, ζ_2) nezápornost zaručit.

A2. Dále připojíme podmínky, za kterých jsou ***kladné oba mezní užitky*** v (8.3A,B) : Dostaneme

(8.8A) $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq 0 \quad \text{neboli} \quad a_{11}.x_1 \geq -a_{12}x_2$$

(8.8B) $$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geq 0 \quad \text{neboli} \quad a_{12}.x_1 \geq -a_{22}x_2$$

Pro další rozbor uvažujme dva v úvahu přicházející případy :

a) $a_{11} > 0 , a_{22} > 0$: Pak $\dfrac{x_1}{x_2} \geq -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$ a současně $\dfrac{x_2}{x_1} \geq -\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$

Je zřejmé, že pokud $a_{12} > 0$, pak obě nerovnosti vzhledem k nezápornosti komoditních množství platí vždy . Pokud naopak platí $a_{12} < 0$, pak z (8.8A), (8.8B) vyplývá, že množina komoditních množství, při kterých jsou tyto nerovnosti splněny, je $-\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \leq \dfrac{x_1}{x_2} \leq -\dfrac{a_{22}}{a_{12}}$

b) $a_{11} < 0, a_{22} < 0$: Pak naopak $\frac{x_1}{x_2} \le -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, a podobně $\frac{x_2}{x_1} \le -\frac{a_{12}}{a_{22}}$.

Nyní je zřejmé, že pokud $a_{12} < 0$, nemůže platit ani jedna z nerovností opět pro nezápornost komoditních množství, zatímco jestliže $a_{12} > 0$, je množina přípustných komoditních množství vymezena nerovnostmi $-\frac{a_{22}}{a_{12}} \le \frac{x_1}{x_2} \le -\frac{a_{12}}{a_{11}}$

Odtud vyplývá, že obor přípustných hodnot x_1, x_2 není omezen pouze tehdy, jsou-li všechny parametry kvadratické funkce a_{11}, a_{12}, a_{22} kladné.

A3. Jako další vyšetříme (*postačující*) ***podmínky stability/kvazikonkávnosti*** : Pro tento účel se ukazuje účelné vyjádřit příslušný determinant matice $\boldsymbol{U}$ obsahující obě komodity. Dostaneme

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{11} & a_{12} \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda p_1 & \lambda p_2 \\ \lambda p_1 & a_{11} & a_{12} \\ \lambda p_2 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Přímým výpočtem tohoto determinantu dostaneme

(8.11) $$\det U = \lambda^2 \cdot \left[2a_{12}p_1p_2 - p_2^2 a_{11} - p_1^2 a_{22}\right] > 0$$

což je zřejmě ekvivalentní s podmínkou

(8.12A) $$p_2^2 a_{11} + p_1^2 a_{22} - 2a_{12}p_1p_2 < 0$$

Zapíšeme-li dále tento výraz jako kvadratickou formy (s proměnnými p_1, p_2 a s koeficienty a_{11}, a_{12} a a_{22}), dostaneme dále nerovnost

(8.12B) $$(p_1 \; p_2) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} < 0$$

v níž je vyjádřen požadavek na ***negativní definitnost*** této kvadratické formy, neboť (8.6B) musí platit pro libovolná (kladná) p_1, p_2 . Jak je známo z teorie kvadratických forem - viz [Matematický Dodatek č.1] - bude matice kvadratické formy v (9.6B) ***negativně definitní*** právě tehdy, bude-li platit

(8.13) $a_{11} < 0$ a současně také $\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$

neboť jde o dva hlavní minory matice A, z nichž první musí být kladný, druhý záporný. Z druhé podmínky okamžitě plyne $a_{11}a_{22} - (-a_{12})^2 > 0$ neboli $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$. Poněvadž pořadí komodit lze zaměnit, vyplývá odtud (z analogie k $a_{11} < 0$) rovněž podmínka $a_{22} < 0$. Kvazikonkávní dvoufaktorová kvadratická musí tedy mít záporná znaménka u ryze kvadratických členů. Aby tato funkce byla (aspoň někde) nezáporná, musí nutně platit $a_{12} > 0$. Přijatelný tvar kvadratické funkce je tedy např. $u(\boldsymbol{x}) = 0{,}5 \cdot \left(-x_1^2 + 8x_1x_2 - 9x_2^2\right)$.

A4. ***Poptávkové funkce*** odvozené v (9.5.A) a (9.5.B) ***musí být*** zřejmě dále ***nezáporné***, kterážto vlastnost ovšem neplatí pro libovolnou volbu parametrů a_{11}, a_{12}, a_{22} :
Jmenovatel obou výrazů (8.5.A) , (8.5.B) lze zapsat jako kvadratickou formu tvaru

(8.14)
$$(p_2, p_1).\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} ,$$

která v případě, že jsou čitatele ve výrazech (8.5.A) , (8.5.B) kladné, musí být *pozitivně definitní*, naopak v případě, že tyto čitatele jsou záporné, musí být *negativně definitní*. Pozitivní i negativní definitnost implikují nerovnost $a_{11}.a_{22} - a_{12}^2 > 0$, v prvém případě za souběžných podmínek $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, ve druhém za opačných podmínek $a_{11} < 0, a_{22} < 0$. Vyšetříme tedy všechny možnosti ve vztahu k těmto omezením : Nejprve uvažujme

a) případ $a_{11} > 0$**,** $a_{22} > 0$ **:** Čitatel v (8.5.A) je kladný právě tehdy, když platí $a_{22}p_1 - a_{12}p_2 > 0$ neboli jestliže $\dfrac{p_1}{p_2} > \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$.

Podmínka má význam toliko v případě, že $a_{12} > 0$, neboť v opačné situaci platí vždy.
Čitatel v (8.5.B) je kladný právě tehdy, když platí $a_{11}p_2 - a_{12}p_1 > 0$ neboli jestliže $\dfrac{p_2}{p_1} > \dfrac{a_{12}}{a_{11}}$. Opět, podmínka má význam toliko v případě, že $a_{12} > 0$, neboť v opačné situaci je splněna vždy.
Nezápornost poptávkových funkcí v případě pozitivní definitnosti matice v (8.14) spolu s příslušnými omezeními $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ platí pro $\dfrac{a_{12}}{a_{22}} < \dfrac{p_1}{p_2} < \dfrac{a_{11}}{a_{12}}$

b) případ $a_{11} < 0$**,** $a_{22} < 0$ **:** Čitatel v (8.5A) je záporný právě tehdy, když platí $a_{22}p_1 - a_{12}p_2 < 0$ neboli jestliže $\dfrac{p_1}{p_2} < \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$.

Podmínka má význam pouze v případě, že $a_{12} > 0$, jinak je splněna automaticky.

Čitatel v (8.5A) je záporný právě tehdy, když platí $a_{11}p_2 - a_{12}p_1 < 0$ neboli jestliže $\dfrac{p_2}{p_1} < \dfrac{a_{12}}{a_{11}}$ I zde má podmínka význam jen v případě, že $a_{12} > 0$, neboť v opačné situaci platí vždy. Nezápornost poptávkových funkcí v případě negativní definitnosti matice v (8.14) spolu s příslušnými omezeními $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$ platí pro $\dfrac{a_{11}}{a_{12}} < \dfrac{p_1}{p_2} < \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$

A5. Poslední úlohou, kterou se budeme zabývat, bude vyšetření podmínek nutných k tomu, aby poptávkové funkce, které jsem odvodili v (8.5 A,B) s rostoucí cenou vlastní komodity klesaly. Znamená to vyšetřit znaménka derivací $\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1}$ a podobně $\dfrac{\partial x_2}{\partial p_2}$. Pro první parciální derivaci po úpravách dostaneme :

(8.15)
$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{M\left(a_{11}a_{22}p_2^2 - a_{22}{}^2 p_1^2 - 2a_{12}^2 p_2^2 + 2a_{12}a_{22}p_1p_2\right)}{\left(p_2^2 a_{11} + p_1^2 a_{22} - 2a_{12}p_1p_2\right)^2}$$

Vzhledem ke kladné hodnotě jmenovatele a kladnému M je zřejmé, že znaménko derivace (a tedy směr vlivu ceny p_1) bude určeno znaménkem výrazu $\left(a_{11}a_{22}p_2^2 - a_{22}{}^2 p_1^2 - 2a_{12}^2 p_2^2 + 2a_{12}a_{22}p_1p_2\right)$, který lze dále poněkud přehledněji zapsat jako kvadratickou formu v proměnných p_1, p_2

(8.16) $$(p_2, p_1).\begin{pmatrix} a_{11}.a_{22} - 2a_{12}{}^2 & a_{12}a_{22} \\ a_{12}a_{22} & -a_{22}{}^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

Z nutných podmínek pro negativní definitnost kvadratické formy vyplývají dva požadavky:[1]

$$a_{11}.a_{22} - 2a_{12}{}^2 < 0 \qquad \text{s důsledkem} \qquad a_{11}.a_{12}/2 < a_{12}{}^2$$

a dále $$(a_{11}.a_{22} - 2a_{12}{}^2)(-a_{22}{}^2) - (a_{12}.a_{22})^2 > 0$$

z čehož po jednoduché úpravě dostaneme podmínku

(8.17) $$a_{12}{}^2 > a_{11}.a_{22}$$

Znamená to tedy, že $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$ platí právě tehdy, když bude platit (8.17), neboť tato podmínka pokrývá rovněž podmínku $a_{11}.a_{22} - 2a_{12}{}^2 < 0$, pokud mají a_{11} i a_{22} shodná znaménka. Stejnou úvahou bychom – *mutatis mutandis* - obdrželi podmínku pro zápornost $\frac{\partial x_2}{\partial p_2}$.

Na druhé straně však podmínka (8.17) je protikladná třetí podmínce (8.7) vyžadované pro globální nezápornost kvadratické funkce a rovněž podmínce vyplývající z druhého vztahu v (8.7) nutné pro to, aby byla kvadratická funkce kvazikonkávní. Souhrnně lze tedy konstatovat, že neexistuje žádná konstelace parametrů a_{11}, a_{12}, a_{22} kvadratické funkce, při které by kvadratická funkce vyhovovala všem požadovaným vlastnostem. V takovém případě říkáme, že příslušný nelineární funkční tvar není *globálně teoreticky konzistentní* .

8.2 Mocninná (Cobb-Douglasova) užitková funkce (n-komoditní)

Mocninná funkce - s nezbytnými omezeními na parametry - představuje další užitečný funkční tvar - použitelný přímo jako (prostá) užitková funkce. Přestože historicky jde o funkci (tzv. Cobb-Douglasovu), která nalezla v mikroekonomii využití nejprve při modelování chování výrobce (odtud též její druhý název spojený s oběma jmény autorů), má vhodné vlastnosti i z pohledu užitkové funkce. Zde uvedeme jen její stručnou prezentaci a odvození jí příslušného systému poptávkových funkcí. Dalšími jejími charakteristikami se budeme zabývat v textu věnovaném teorii produkce.

Cobb-Douglasova užitková funkce $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ má mocninný tvar

(8.18) $$u(x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma \cdot x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot .... \cdot x_n^{\beta_n},$$

kde γ je kladná konstanta a $\beta_i, i = 1,2,....,n$ jsou mocninné parametry, zpravidla hodnotami omezené na interval $(0,1)$ - vyjadřující pro každou komoditu tendenci, s jakou užitek vzrůstá při zvyšování množství této komodity. Z funkčního tvaru je patrné, že rostoucí užitek přináší jakkoliv malý přírůstek množství komodity. Z multiplikativního tvaru (8.18) je rovněž zřejmé, že přítomné statky působí na celkový užitek spotřebitele ve vzájemných interakcích.

---

[1] Třetí podmínka $-a_{22}{}^2 < 0$ je zřejmě splněna vždy.

Jak je patrné, tato funkce splňuje všechny vlastnosti, kterou jsme pro užitkovou funkci přijali definicí 2.8. Jde o konečnou nezápornou funkci, pro niž platí $u(\boldsymbol{0}) = 0$, spojitou v celém definičním oboru, která je - při daných omezeních na parametry - dále rostoucí a kvazikonkávní. Jak lze ihned vidět, mezní míra substituce mezi dvěma komoditami je dána podílem $\dfrac{\beta_1 x_2}{\beta_2 x_1}$, tzn. není v celém komoditním prostoru konstantní. Okamžitě je patrné, že všechny statky jsou při takto zvolené mocninné užitkové funkci podstatné.

Nyní se pokusíme pro Cobb-Douglasovu (přímou) užitkovou funkci odvodit příslušný systém poptávkových funkcí : Standardní způsob odvození předpokládá nalezení rovnovážného bodu tak, že se položí všechny mezní užitky u_i rovny λp_i, kde p_i je cena i-té komodity a λ (pomocný) Lagrangeův multiplikátor. Po tomto úkonu dostaneme soustavu vztahů

(8.19) $$u_i = \beta_i \cdot \frac{u(\boldsymbol{x})}{x_i} = \lambda p_i \qquad \text{pro } i = 1,2,\ldots.,n.$$

kde $u(\boldsymbol{x})$ má tvar (8.18). Rozpočtové omezení má obvyklý tvar $\sum p_i x_i = M$.

Postup vedoucí k vyvození tvarů pro systém poptávkových funkcí vede přes vydělení jednotlivých rovnic v soustavě (8.19) (a zbavení se tak multiplikátoru λ a funkčního tvaru $u(\boldsymbol{x})$). Dostaneme

(8.20) $$\frac{\beta_i x_j}{\beta_j x_i} = \frac{p_i}{p_j} \qquad \text{pro } i, j = 1,2,\ldots.,n$$

a po převedení členů na protilehlé strany rovnic

(8.21A) $$p_i x_i = p_j x_j \cdot \left(\frac{\beta_i}{\beta_j}\right)$$

Nyní sečteme (pro pevné i) tyto vztahy pro všechna $j = 1,2,\ldots.,n$ včetně $i = j$ a dostaneme :

(8.21B) $$p_i x_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{p_j x_j}{\beta_j}}{n \sum_{j=1}^{n} \beta_j} = \boldsymbol{xp} = M$$

a poptávku po i-té komoditě můžeme vyjádřit poptávkovou funkcí ve tvaru

(8.22) $$x_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{p_j x_j}{\beta_j}}{n \sum_{j=1}^{n} \beta_j} = \boldsymbol{xp} = \beta_i \cdot \left(\frac{M}{p_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j\right)$$

Pokud přijmeme restrikci $\sum \beta_j = 1$, vztah (8. 22) se dále zjednoduší na

(8.23) $$x_i = \beta_i \cdot \left(\frac{M}{p_i}\right)$$

Odvodili jsme tedy soustavu poptávkových funkcí, které mají tu vlastnost, že poptávka je lineární funkcí příjmu spotřebitele M, přičemž konstanta příslušné úměrnosti je rovna $\frac{\beta_i}{p_i}$.

Cobb–Douglasova funkce je zřejmě konečná, nezáporná a spojitá funkce s vlastností $u(\boldsymbol{0}) = 0$. Je v daném parametrickém oboru rostoucí, což je okamžitě patrné z kladných hodnot mezních užitků (8.19). Vyšetříme ještě, zda je u této funkce rovněž splněna podmínka negativní semidefinitnosti Sluckého substituční matice definované v části 2.6 resp. kvazikonkávnosti.

K tomuto účelu sestavíme nejprve matici $\boldsymbol{U}$ sestávající z prvních a druhých parciálních derivací užitkové funkce. Mezní užitky jsme již uvedli v (8.19), po dosazení za $u(\boldsymbol{x})$ dostaneme

(8.24A) $$u_i = \gamma \cdot \left(\frac{\beta_i}{x_i}\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{\beta_j}\right)$$

Stejně snadno sestavíme matici druhých parciálních derivací

(8.24B) $$u_{ii} = \frac{\partial u^2(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2} = \beta_i(\beta_i - 1)u(\boldsymbol{x})x_i^{-2} \qquad u_{ij} = \frac{\partial u^2(\boldsymbol{x})}{\partial x_i x_j} = \beta_i \beta_j u(\boldsymbol{x}) x_i^{-1} x_j^{-1}$$

Tyto hodnoty nyní dosadíme do matice $\boldsymbol{U}$ a spočteme její determinant. Postupně dostáváme : (Protože každý prvek obsahuje $u(\boldsymbol{x})$, vytýkáme tento společný člen před determinant.)

$$\left|U^{CD}\right| = u(\boldsymbol{x})^{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & \beta_1/x_1 & \beta_2/x_2 & \beta_3/x_3 & \cdots & \beta_n/x_n \\ \beta_1/x_1 & \beta_1(\beta_1-1)/x_1^2 & \beta_1\beta_2/x_1x_2 & \beta_1\beta_3/x_1x_3 & \cdots & \beta_1\beta_n/x_1x_n \\ \beta_2/x_2 & \beta_1\beta_2/x_1x_2 & \beta_2(\beta_2-1)/x_2^2 & \beta_2\beta_{3/x_2x_3} & \cdots & \beta_2\beta_n/x_2x_n \\ \beta_3/x_3 & \beta_1\beta_3/x_1x_3 & \beta_2\beta_3/x_2x_3 & \beta_3(\beta_3-1)/x_3^2 & \cdots & \beta_3\beta_n/x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n/x_n & \beta_1\beta_n/x_1x_n & \beta_2\beta_n/x_2x_n & \beta_3\beta_n/x_1x_n & \cdots & \beta_n(\beta_n-1)/x_n^2 \end{vmatrix}$$

V dalším označíme výrazem $\left|U^{*CD}\right|$ podíl $\frac{\left|U^{CD}\right|}{u(\boldsymbol{x})^{(n+1)}}$.

Abychom determinant $\left|U^{*CD}\right|$ spočetli, rozložíme ho na součet (nejprve) dvou determinantů podle druhého sloupce. Dostaneme :

$$
\left|U^{*CD}\right| = \begin{vmatrix}
0 & 0 & \beta_2/x_2 & \cdots & \beta_n/x_n \\
\beta_1/x_1 & \beta_1^2/x_1^2 & \beta_1\beta_2/x_1x_2 & \cdots & \beta_1\beta_n/x_1x_n \\
\beta_2/x_2 & \beta_1\beta_2/x_1x_2 & \beta_2(\beta_2-1)/x_2^2 & \cdots & \beta_2\beta_n/x_2x_n \\
\beta_3/x_3 & \beta_1\beta_3/x_1x_3 & \beta_2\beta_3/x_2x_3 & \cdots & \beta_3\beta_n/x_3x_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\beta_n/x_n & \beta_1\beta_n/x_1x_n & \beta_2\beta_n/x_2x_n & \cdots & \beta_n(\beta_n-1)/x_n^2
\end{vmatrix} +
$$

$$
+ \begin{vmatrix}
0 & \beta_1/x_1 & \beta_2/x_2 & \cdots & \beta_n/x_n \\
\beta_1/x_1 & -\beta_1/x_1^2 & \beta_1\beta_2/x_1x_2 & \cdots & \beta_1\beta_n/x_1x_n \\
\beta_2/x_2 & 0 & \beta_2(\beta_2-1)/x_2^2 & \cdots & \beta_2\beta_n/x_2x_n \\
\beta_3/x_3 & 0 & \beta_2\beta_3/x_2x_3 & \cdots & \beta_3\beta_n/x_3x_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\beta_n/x_n & 0 & \beta_2\beta_n/x_2x_n & \cdots & \beta_n(\beta_n-1)/x_n^2
\end{vmatrix}
$$

Jak je vidět, první z obou determinantů součtu má druhý sloupec, který je násobkem prvního sloupce. Uvedené dva sloupce jsou tedy lineárně závislé a tento první determinant je nulový. Druhý z determinantů součtu podrobíme stejnému rozkladu na dva dílčí determinanty podle třetího sloupce a dostaneme

$$
\left|U^{**CD}\right| = \begin{vmatrix}
0 & \beta_1/x_1 & 0 & \cdots & \beta_n/x_n \\
\beta_1/x_1 & -\beta_1/x_1^2 & \beta_1\beta_2/x_1x_2 & \cdots & \beta_1\beta_n/x_1x_n \\
\beta_2/x_2 & 0 & \beta_2^2/x_2^2 & \cdots & \beta_2\beta_n/x_2x_n \\
\beta_3/x_3 & 0 & \beta_2\beta_3/x_2x_3 & \cdots & \beta_3\beta_n/x_3x_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\beta_n/x_n & 0 & \beta_2\beta_n/x_2x_n & \cdots & \beta_n(\beta_n-1)/x_n^2
\end{vmatrix} +
$$

$$
+ \begin{vmatrix}
0 & \beta_1/x_1 & \beta_2/x_2 & \cdots & \beta_n/x_n \\
\beta_1/x_1 & -\beta_1/x_1^2 & 0 & \cdots & \beta_1\beta_2/x_1x_n \\
\beta_2/x_2 & 0 & -\beta_2/x_2^2 & \cdots & \beta_2\beta_n/x_2x_n \\
\beta_3/x_3 & 0 & 0 & \cdots & \beta_3\beta_n/x_3x_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\beta_n/x_n & 0 & 0 & \cdots & \beta_n(\beta_n-1)/x_n^2
\end{vmatrix}
$$

Opět vidíme, že u prvního z obou determinantů součtu je třetí sloupec $\dfrac{\beta_2}{x_2}$-násobkem prvního sloupce, v důsledku čehož je první determinant nulový. Druhý z determinantů lze opět aditivně rozložit podle třetího sloupce na dva dílčí determinanty. Výsledkem tohoto procesu, při kterém je vždy první z dvojice součtu determinantů anulován, je jediný determinant tvaru

$$\left|U^{CD}\right| = u(\boldsymbol{x})^n \cdot \begin{vmatrix} 0 & \beta_1/x_1 & \beta_2/x_2 & \beta_3/x_3 & \cdots & \beta_n/x_n \\ \beta_1/x_1 & -\beta_1/x_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2/x_2 & 0 & -\beta_2/x_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_3/x_3 & 0 & 0 & -\beta_3/x_3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n/x_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta_n/x_n^2 \end{vmatrix}$$

Hodnotu resp.znaménko determinantu $\left|U^{ADD}\right|$ nyní určíme tak, že užijeme výraz pro determinant symetrické matice, která má nenulové prvky pouze v 1. řádku a 1. sloupci a na hlavní diagonále, u níž navíc prvek v průsečíku všech tří uvedených nenulových řad je roven nule. Obecně můžeme zapsat

$$\left|U^{CD}\right| = u(\boldsymbol{x})^{(n+1)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_n \\ w_1 & w_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ w_2 & 0 & w_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ w_3 & 0 & 0 & w_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & w_{nn} \end{vmatrix}$$

Rozvojem podle hlavní diagonály a Indukcí lze ukázat, že determinant $\left|U^{CD}\right|$ nabývá hodnotu

(8.25) $$\left|U^{CD}\right| = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 (n-1)! \, \frac{\prod_{i=1}^{n} w_{ii}}{w_{ii}},$$

což pro případ Cobb-Douglasovy funkce a výrazů substituovaných za w_i a w_{ii} dává

(8.26) $$\left|U^{CD}\right| = -(n-1)! \, u(\boldsymbol{x})^{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{x_i}\right)^2 \cdot \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{\left(-\dfrac{\beta_j}{x_j^2}\right)}{\left(-\dfrac{\beta_i}{x_i^2}\right)} \right]$$

tzn. po úpravě vykrácením

(8.27A) $$\left|U^{CD}\right| = -(n-1)! \, u(\boldsymbol{x})^{n+1} \sum_{i=1}^{n} (-\beta_i) \left[\prod_{j=1}^{n} \left(-\frac{\beta_j}{x_j^2}\right) \right]$$

Vzhledem ke skutečnosti, že $w_i > 0$, dále $w_{ii} < 0$, budou členy v sumaci záviset na znaménku $\prod \boldsymbol{u}_{jj}$.

S ohledem na zápornost všech w_{ii} bude výraz $\left[\prod -\dfrac{\beta_j}{x_j^2}\right]$ jako součin n záporných hodnot kladný pro sudé n a záporný pro liché n . Následně bude každý z n členů sumace

$(-\beta_i)\cdot\left[\prod\left(-\frac{\beta_j}{x_j^2}\right)\right]$ kladný pro liché n a záporný pro sudé n a konečně celý výraz $\left|\boldsymbol{U}^{CD}\right|$ kladný pro sudé n a záporný pro liché n. Dochází tedy ke střídání znamének tohoto determinantu při postupném růstu počtu komodit. Tímto je ověřeno, že Cobb-Douglasova funkce použitá jako přímá užitková funkce je kvazikonkávní.

8.3 Stone-Gearyho (n-komoditní) užitková funkce - lineární výdajový systém

Tento výdajový systém se odvodí z užitkové funkce $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, která má tvar

(8.28) $$u(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - \alpha_i)^{\beta_i}$$

kde α_i je vektor n nezáporných parametrů (konstant) charakterizujících „prahové úrovně“ užitečnosti každé komodity; β_i je obdobně vektor kladných parametrů charakterizujících míru (degresivní) tendence individuální užitečnosti i-té komodity při zvyšování jejího množství. Pro užitek přinášející množství i-té komodity je zapotřebí, aby platilo $x_i > \alpha_i$ pro všechna $i = 1,2,...,n$. Uvedený výdajový systém byl poprvé použit Kleinem a Rubinem [1947-48].

Má-li být $u(\boldsymbol{x})$ rostoucí v každé proměnné, musí platit

(8.29) $$u_i(\boldsymbol{x}) = \beta_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - \alpha_i)^{\beta_i - 1} (x_j - \alpha_j)^{\beta_j} = \frac{\beta_i}{(x_i - \alpha_i)} \cdot u(\boldsymbol{x})$$, z čehož mj. plyne

$\beta_i > 0$ pro všechna i.

Dále platí:

$$u_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{\beta_{i\beta_j}}{(x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j)} \cdot u(\boldsymbol{x}) \text{ pro } i \neq j \text{ resp. } u_{ii}(\boldsymbol{x}) = \frac{\beta_i(\beta_i - 1)}{(x_i - \alpha_i)^2} \cdot u(\boldsymbol{x})$$

Je zřejmé, že má-li být $u(\boldsymbol{x})$ konkávní v jednotlivých komoditách, musí platit $\beta_i < 1$.

Abychom mohli odvodit rovnovážný bod, musíme položit všechny mezní užitky u_i rovny λp_i, kde p_i je cena i-té komodity a λ Lagrangeův multiplikátor, tedy

(8.30) $$\beta \cdot \frac{u(\boldsymbol{x})}{x_i - \alpha_i} = \lambda p_i$$ pro $i = 1, 2, ..., n$

Dostaneme soustavu vztahů:

(8.31)
$$\beta_1 \cdot \frac{u(\boldsymbol{x})}{x_1 - \alpha_1} = \lambda p_1$$
……….……….….
$$\beta_n \cdot \frac{u(\boldsymbol{x})}{x_n - \alpha_n} = \lambda p$$

kde $u(\boldsymbol{x})$ má tvar (8.28), spolu s rozpočtovým omezením $\sum p_i x_i = M$

Vzájemným vydělením rovnic v soustavě (8.31) dostaneme vztahy

(8.32)
$$\frac{(x_i-\alpha_i)p_i}{\beta_{ii}}=\frac{(x_j-\alpha_j)p_j}{\beta_j}$$

Sečteme-li (při pevné i) tyto vztahy pro všechna $j=1,2,....,n$ (včetně $i=j$), dostaneme

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\right)\frac{(x_i-\alpha_i)}{\beta_i}\cdot p_i=\sum_{j=1}^{n}(x_j-\alpha_j)p_j=\boldsymbol{xp}-\boldsymbol{ap}=\mathrm{M}-\boldsymbol{ap}$$

tedy poptávku po i-té komoditě můžeme vyjádřit poptávkovou funkcí ve tvaru

(8.33)
$$x_i=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\beta_j}\cdot\frac{\beta_i}{p_i}\left(M-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i\right)+\alpha_i$$

V případě, že jednotlivá β_j, $j=1,2,....,n$ dávají jedničkový součet[2] , vztah (8.33) se dále zjednoduší na

(8.34A)
$$x_i=\frac{\beta_i}{p_i}\left(M-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i\right)+\alpha_i$$

Jak je patrné, ***poptávka je lineární funkcí příjmu spotřebitele*** M, přičemž konstanta příslušné úměrnosti je rovna $\frac{\beta_i}{p_i}$ (popř. $\frac{\beta_i}{p_i}\left(\sum\beta_j\right)^{-1}$)

Poznámka: Výraz pro poptávku po x_i je zaručeně kladný, protože při přijatých omezeních $0<\alpha_i<x_i$ je obsah závorky v (8.33), resp. (8.34A) vždy kladný.

Dále vyšetříme podmínky nutné k tomu, aby poptávka po x_i byla klesající, jestliže cena této komodity p_i poroste. Derivujme (8.34A) podle p_i. Dostaneme:

(8.35)
$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i}=\beta_i\frac{p_i(-\alpha_i)-M+\sum_{i=j}^{n}\alpha_j p_j}{p_i^2}=\frac{\beta_i}{p_i^2}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\alpha_j p_j-M\right).$$

Poptávka po $i-$ tém statku je s růstem ceny p_i klesající, protože hodnota derivace v (8.35) je nutně záporná: při kladných α_j,β_j,x_j,p_j a předpokladu $0<\alpha_i<x_i$ platí vždy nerovnost.

$$M>\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\alpha_j p_j$$

---

2 Tento předpoklad je docela realistický pro případ, že užitková funkce (mocninného tvaru) obsahuje všechny v úvahu přicházející statky poskytující pro danou situaci spotřebiteli užitek. Jak víme z rozboru Cobb-Douglasova tvaru (podrobně analyzovaného v teorii produkce), může být v tomto případě užitek (vyjádřený lineárně homogenní užitkovou funkcí) rozložit na součet n výdajových účastí beze zbytku.

Příklad 2 Mějme 4-komoditní poptávkový systém popsaný užitkovou funkcí

(8.36) $$u(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 1)^{0.1} \cdot (x_2 - 2)^{0.2} \cdot (x_3 - 3)^{0.3} \cdot (x_4 - 4)^{0.4}$$

Příslušné mezní užitky jsou

$$u_1 = \frac{0.1u(\boldsymbol{x})}{x_i - 1}; \quad u_2 = \frac{0.2u(\boldsymbol{x})}{x_2 - 2}; \quad u_3 = \frac{0.3u(\boldsymbol{x})}{x_3 - 3}; \quad u_4 = \frac{0.4u(\boldsymbol{x})}{x_4 - 4}$$

Vyčíslíme podíly

$$\left(\sum_{K=1}^{4} K\right)(x_i - 1) = \frac{1}{p_1}\sum_{K=1}^{4}(x_K - K)\cdot p_K$$

z čehož plyne

$$x_1 = \frac{1}{p_1}\cdot\frac{\mathbf{px} - \mathbf{pK}}{\left(\sum K\right)} + 1 = \frac{1}{p_1}\cdot\frac{M - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}}{\left(\sum K\right)} + 1$$

a po zderivování

Analogické výrazy bychom získal i pro

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{p_1(-\alpha_1) - (M - \alpha p)\cdot 1}{\left(\sum K\right)p_{1i}^2} = \frac{\sum_{j=2}^{4}\alpha_j p_j - M}{\left(\sum K\right)p_{1i}^2} \qquad \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \text{ pro } j = 2,3,4$$

Jak je z výsledného výrazu patrné, poptávka po 1. komoditě je nepřímo úměrná čtverci ceny této komodity.

Vyšetření vlastností funkce typu (8.26) vede ke stejným závěrům jako u Cobb-Douglasovy funkce, neboť (až na omezení přípustných hodnot komoditního prostoru podmínkami $x_i > \alpha_i$) oba tyto funkční tvary jsou zcela analogické .

8. 4 Výdajový (n-komoditní) systém „přímý/nepřímý ADDILOG" (Houthakker H.)

Počátkem 60.let vyšetřoval Harald Houthakker [1960] nepřímou užitkovou funkci ve tvaru součtu mocnin, která je nazývána též "***nepřímý ADDILOG***" . Tuto funkci můžeme zapsat ve tvaru

(8.37) $$u = \psi\left(\frac{M}{p_1}, \frac{M}{p_2}, \dots, \frac{M}{p_n}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\beta_j}\cdot\left(\frac{M}{p_j}\right)^{\beta_j}$$ [3] při $\alpha_j, \beta_j > 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$

Soustavu poptávkových funkcí po jednotlivých komoditách odvodíme vcelku snadno na základě Royovy identity. Postupně dostáváme

(8.38) $$x_i = -\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_j}\right)} = \alpha_i \cdot \frac{\left(\frac{M}{p_i}\right)^{\beta_{i+1}}}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{M}{p_j}\right)^{\beta_{i+1}}}$$

---

[3] Podílový tvar pro parametry $\frac{\alpha_j}{\beta_j}$ je použit toliko za účelem zjednodušení následných výrazů, ve kterých vystupují mezní užitky jako parciální derivace užitkové funkce .

odkud vyplývá výraz pro podíl poptávek po i-té a j-té komoditě jako

(8.39A) $$\frac{x_i}{x_j}=\frac{\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right)\cdot\left(\frac{M}{p_i}\right)^{\beta_j+1}}{\left(\frac{M}{p_j}\right)^{\beta_j+1}}=\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right)\cdot M^{\beta_i-\beta_j}\cdot p_j^{\beta_j+1}\cdot p_i^{-\beta_1-1}$$

Ten můžeme alternativně zapsat v logaritmovaném tvaru

(8.39B) $$\log x_i-\log x_j=\log\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right)+(\beta_i+1)\cdot\log\left(\frac{M}{p_i}\right)+(\beta_j+1)\cdot\log\left(\frac{M}{p_j}\right)$$

Jak je patrné z (8.38), k tomu, aby poptávkové funkce klesaly s rostoucí cenou vlastní komodity p_i, je právě nutné, aby platily podmínky $\alpha_i>0$, $\beta_i<1$. Vůči příjmu M jsou tyto poptávkové funkce (při daných omezeních na parametry) rostoucí.

Jestliže použijeme odlišné definice ***nepřímého ADDILOGu*** (pro jednotkový objem výdajů, tj. $M=1$, a ceny vyjádříme v přímém tvaru), dostaneme jednodušší specifikaci

(8.40) $$u=\psi(p_1,\ldots,p_a)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\beta_j}\cdot p_j^{\beta_j}\qquad \text{opět při }\ \alpha_j>0,\,0<\beta_j<1$$

Parametry α_j, β_j budou mít zde však odlišný význam, než u modelu (8.xx) .

Royova identita pak generuje soustavu poptávkových funkcí příslušných této verzi ***nepřímého ADDILOG***u

(8.41) $$x_i=\frac{\left(\alpha_i p_i^{\beta_i-1}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_j p_j^{\beta_j-1}\right)}$$

a obdobnou cestou jako předtím lze získat rovnice pro rozpočtové účasti jako

(8.42) $$\frac{p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}p_j x_j}=p_i x_i=\frac{\left(\alpha_i p_i^{\beta_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_j p_j^{\beta_j}\right)}$$

neboť z (8.42) plyne, že $M=\sum p_j x_j=1$. Pokud bychom chtěli - např. pro ekonometrické účely - využít z (8.xx) vyvozený podílový tvar $\frac{x_i}{x_j}$, nebude jeho přímé použití výhodné, neboť jde o výraz nelineární v parametrech. Problém nicméně lze zmírnit vzetím logaritmovaného podílu $\log\left(\frac{x_i}{x_j}\right)$, pro který lze snadno odvodit

(8.43) $$\log\left(\frac{x_i(..)}{x_j(..)}\right)=\log\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right)+(\beta_i-1)\cdot\log(p_i)+(\beta_j-1)\cdot\log(p_j)$$

což je již tvar lineární v parametrech.

Pokud bychom uvažovali funkční typ ***přímý ADDILOG*** jako přímou užitkovou funkci, vyšli bychom z tvaru

$$(8.44) \qquad u(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\beta_j x_j^{\beta_j}}$$

S ohledem na vlastnosti požadované od užitkové funkce omezujeme hodnoty parametrů opět na $\alpha_j > 0$, $0 < \beta_j < 1$ pro všechna $j = 1,2,....,n$.

Odvození příslušných poptávkových funkcí bude však nyní podstatně obtížnějším úkolem než v předešlém případě :

Mezní užitky u tohoto tvaru sice snadno získáme jako

$$(8.45) \qquad u_i = \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \alpha_i x_i^{\beta_i - 1}$$

Podmínky vymezující rovnováhu vypadají takto

$$(8.46) \qquad \frac{u_i}{p_i} = \frac{\alpha_i x_i^{\beta_i - 1}}{p_i} = \frac{\alpha_j x_j^{\beta_j - 1}}{p_i} = \frac{u_j}{p_i} \qquad \text{pro} \quad i, j = 1,2,....,n$$

Jejich řešení pro x_i, popř. pro podíly $\frac{x_i}{x_j}$ je však bez dalších silných restrikcí položených na parametry (např. typu $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n =$ konst.) analyticky neodvoditelné a poptávkové funkce nelze tedy obecně získat v explicitním tvaru. Úpravou obou stran (8.46) sice dostaneme

$$(8.47) \qquad \frac{x_i^{\beta_i - 1}}{x_i^{\beta_i - 1}} = \frac{\alpha_j p_i}{\alpha_j p_j} \qquad \text{pro} \quad i, j = 1,2,....,n$$

ovšem individuální ani podílové vyjádření pro x_i resp. x_i odtud není možné.

Aby nedošlo k nedorozumění, zdůrazněme, že ***přímý ADDILOG*** jako (prostá) užitková funkce reprezentuje jinou strukturu preferenčních relací než tentýž funkční tvar vzatý jako nepřímá užitková funkce.

Přes zmíněný vážný problém s ***přímý ADDILOG***em jako s (prostou) užitkovou funkcí vyšetřeme ještě, do jaké míry by (prostá) užitková funkce tohoto typu splňovala teoretické vlastnosti kladené na tuto ekonomickou funkci.

Funkce ***přímý ADDILOG*** je zřejmě reálná, konečná, nezáporná a spojitá s vlastností $u(\boldsymbol{0}) = 0$. Funkce je v daném parametrickém oboru rovněž rostoucí, což je okamžitě patrné z hodnot mezních užitků. Kvazikonkávnost (a současně vlastnosti Sluckého substituční matice) ověříme následovně.

Nejprve určíme matici druhých parciálních derivací. Dostaneme

$$(8.48) \qquad u_{ii} = \frac{\partial u^2(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2} = \alpha_i (\beta_i - 1) x_i^{\beta_i - 2}, \qquad u_{ij} = \frac{\partial u^2(\boldsymbol{x})}{\partial x_i x_j} = 0$$

Tyto hodnoty nyní dosadíme do matice U a spočteme její determinant. Postupně dostáváme :

$$\left|U^{ADD}\right| = \begin{vmatrix} 0 & \alpha^1 x_1^{\beta_1-1} & \alpha^2 x_2^{\beta_2-1} & \alpha^3 x_3^{\beta_3-1} & \cdots & \alpha^n x_n^{\beta_n-1} \\ \alpha^1 x_1^{\beta_1-1} & \alpha_1(\beta_1-1)x_1^{\beta_1-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^2 x_2^{\beta_2-1} & 0 & \alpha_2(\beta_2-1)x_2^{\beta_2-2} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^3 x_3^{\beta_3-1} & 0 & 0 & \alpha_3(\beta_3-1)x_3^{\beta_3-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^n x_n^{\beta_n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n(\beta_n-1)x_n^{\beta_n-2} \end{vmatrix}$$

Hodnotu, resp. znaménko determinantu $\left|U^{ADD}\right|$ je třeba nyní určit. Použijeme k tomu výraz pro determinant symetrické matice, která má nenulové prvky pouze v 1. řádku a 1. sloupci a na hlavní diagonále, přičemž prvek v průsečíku všech tří zmíněných nenulových řad je roven nule. Obecně můžeme zapsat

$$\left|U^*\right| = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_2 & 0 & u_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & u_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

Rozvojem podle hlavní diagonály a Indukcí lze ukázat, že tento determinant nabývá hodnotu

(8.49) $$\left|U^*\right| = -\sum_{i=1}^{n} u_i^2 (n-1)! \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} u_{ii}\right)}{u_{ii}} \quad ,$$

resp. při vyjádření výrazů substituovaných za u_i a u_{ii} pro případ mocninné funkce

(8.50) $$\left|U^{ADD}\right| = -(n-1)! \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 x_i^{2\beta_i-2} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_j (\beta_j - 1) x_j^{\beta_j-2} \right)$$

Vzhledem ke skutečnosti, že $u_i > 0$, dále $u_{ii} < 0$, budou členy v sumaci záviset na znaménku $\prod u_{jj}$ S ohledem na zápornost všech u_{ii} bude výraz $\prod u_{jj}$ jako součin n záporných hodnot kladný pro sudé n a záporný pro liché n . Ze stejného důvodu bude podíl $\frac{\prod u_{jj}}{u_{jj}}$ kladný pro liché n a záporný pro sudé n . Odtud vyplývá, že – při kladných hodnotách u_i^2 a $(n-1)!$ - bude determinant $\left|U^{*ADD}\right|$ záporný pro sudé n a kladný pro liché n, dochází tedy ke střídání jeho znamének při přidávání dalších komodit. Tímto je ověřeno, že pro tento funkční tvar jsou splněny Hicksovy podmínky stability – viz část 2.4 – a rovněž, že funkce typu ***přímý ADDILOG*** vzatá jako přímá užitková funkce je kvazikonkávní.

8.5 Výdajový (n-komoditní) systém typu TRANSLOG (*Christensen, Jorgenson, Lau*)

Od počátku 70.let se v matematické ekonomii i ekonometrii setkáváme s tzv. flexibilními funkčními tvary, jejichž nápadným rysem je přítomnost interakčních členů jako vysvětlujících proměnných, s čímž souvisí též poměrně značný počet parametrů jakéhokoliv flexibilního tvaru. Jedním a možná nejtypičtějším představitelem flexibilních tvarů je právě tzv. transcendentní logaritmická funkce (zkráceně TRANSLOG). Lze se s ní setkat jak v prostředí modelování spotřebitelské poptávky, tak i v produkčních schématech. O jejím motivačním vyvození a teoretických vlastnostech pojednáme v oddílu věnovaném této otázce v teorii produkce. Zde se omezíme pouze na zavedení funkčního typu v kontextu modelování spotřebitelské poptávky a na přiblížení jejich vlastností v tomto ohledu.

TRANSLOG, který je charakterizován interakcemi v podobě součinů logaritmovaných komodit, může být chápán též jako zobecnění Cobb-Douglasova tvaru. Nejčastěji bývá specifikován v podobě nepřímé užitkové funkce, jejíž tvar je následující :

$$u^0 = \psi(p_1, p_2, \dots, p_n, M) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \log\left(\frac{p_i}{M}\right) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \cdot \log\left(\frac{p_j}{M}\right) \cdot \log\left(\frac{p_k}{M}\right) \tag{8.51}$$

s těmito omezujícími podmínkami na parametry :

Požadavek na homogenitu stupně 0 implikuje podmínku :

Jestliže TRANSLOG užijeme v jednodušším tvaru (jako jednotkovou výdajovou funkci), dostaneme poněkud jednodušší vyjádření

$$u^0 = \psi(p_1, p_2, \dots, p_n) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \log(p_i) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \cdot \log(p_j) \cdot \log(p_k) \tag{8.52}$$

se stejnými podmínkami pro parametry. Uplatněním Royovy identity obdržíme pro TRANSLOG nepřímou užitkovou funkci soustavu poptávkových funkcí (v zápisu pro rozpočtové účasti)

$$u^0 = \psi(p_1, p_2, \dots, p_n) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \log(p_i) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \cdot \log(p_j) \cdot \log(p_k) \tag{8.53}$$

$$w_i = \frac{p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i} = p_i x_i = \frac{\beta_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} \cdot \log(p_j)}{\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_j + \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} \cdot \log(p_k)\right)} \tag{8.54}$$

8.6 Rotterdamský (n-komoditní) výdajový systém (*H.Theil – A.Barten*)

Toto modelové schéma poprvé použili v krátkém rozmezí po sobě H.Theil [1965] a A.P.Barten [1966]. Přístup, který zvolili, je v mnoha směrech podobný Stoneově specifikaci (8.3), liší se však tím, že místo zacházení s logaritmy (jak to učinil R. Stone) operují s diferenciály.

Logaritmická poptávková funkce (zapsaná jako logaritmovaná mocninná funkce) má tvar

$$\log(x_i) = \beta_i + e_i \cdot \log M + \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \cdot \log p_k \tag{8.55}$$

odpovídající mocninné specifikaci

(8.56) $$x_i = b_i \cdot M^{e_i} \cdot \prod_{k=1}^{n} p_k^{e_{ik}}$$

kde e_i je příjmová pružnost poptávky ($e_i = \frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{M}{x_i}$) a e_{ik} jsou křížové cenové pružnosti poptávky ($e_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial p_k} \cdot \frac{M}{p_k}$) pro $i, k = 1, 2, ..., n$. Jako β_i jsme označili $\log b_i$.

Jestliže tuto specifikaci vyjádříme v totálních diferenciálech, získáme tvar

(8.57) $$d \log(x_i) = e_i \cdot d \log M + \sum_{k=1}^{n} e_{ik} d \log p_k$$

V tomto případě netrváme na předpokladu, že elasticity e_i a e_{ik} jsou konstantní. Podobně jako v původní Stoneově analýze se uplatní pro vyjádření e_{ik} Sluckého dekompozice s kompenzovanými křížovými cenovými elasticitami e_{ik}^* (v zápisu $e_{ik} = e_{ik}^* - e_i \cdot w_k$), takže (8.57) přejde na tvar

(8.58) $$d \log(x_i) = e_i \cdot \left(d \log M - \sum_{k=1}^{n} w_k d \log p_k \right) + \sum_{k=1}^{n} e_{ik}^* d \log p_k \quad ,$$

kde w_k označuje komoditní rozpočtové účasti $w_k = \Sigma p_k x_k$.

Zápis (8.48) tak odpovídá diferenciálu Stoneovy rovnice tvaru

(8.59) $$\log(x_i) = \beta_i + e_i \cdot \log \frac{M}{P} + \sum_{k=1}^{n} e_{ik}^* \log p_k$$

kde P vyjadřuje nějaký obecný cenový index.

Avšak v (8.49) nelze uplatnit symetrii, protože díky relaci

(8.60) $$w_i e_{ik}^* = w_k e_{ki}^*$$

restrikce také obsahují proměnné rozpočtové účasti.

Tento problém lze obejít násobením (8.35) rozpočtovými účastmi w_i wi , takže nakonec dostaneme

(8.61) $$w_i d \log x_i = b_i \cdot \left(d \log M^* + \sum_{k=1}^{n} c_{ki}^* d \log p_k \right) \quad ,$$ kde

(8.62) $$d \log M^* = d \log M - \sum_{k=1}^{n} w_k d \log p_k = \sum_{k=1}^{n} w_k d \log x_k$$

(8.63) $$b_i = w_i e_i = p_i \cdot \frac{dx_i}{dM}$$

(8.64) $$c_{ik} = w_i e_{ij}^* = p_i p_j \frac{s_{ij}}{M} \quad ,$$

kde s_{ij} je (i, j)-tý prvek Sluckého substituční matice. První rovnost v (8.64) představuje definici $d\log M^*$, druhá plyne z rozpočtového omezení. Veličinu $d\log M^*$bychom mohli chápat jako index reprezentující proporční změnu ve skutečných celkových výdajích. Dá se ukázat, že může být považována za míru změny užitku takže - stejně jako ve Stoneově rovnici - (8.x) reprezentuje Hicksovy poptávkové funkce. Rovnice (8.63) ukazuje, že $b_i = w_i e_i$ je mezní sklon ke spotřebě i-tého statku.

8.7 Výdajový (n-komoditní) systém typu AIDS (*Deaton A., Muellbauer J.*)

Před více než 50 lety se zabýval Holbrook Working [1943] odhadem Engelovy křivky specifikované jako logaritmický vztah udávající závislost veličiny účast statku na rozpočtu w_i na výdajích M :

(8.65) $\qquad w_i = \alpha_i + \beta_i \cdot \log M$, kde $w_i = \dfrac{p_i x_i}{M}$ a α_i ,β_i jsou parametry

Tato specifikace je již řadu desetiletí konvenčně nazývána Working-Leserovým modelem.

Abychom mohli uplatnit tuto statickou specifikaci v analýze časových řad, je třeba ji doplnit o účinky cenových změn (během sledovaného období). Dříve konstantní parametry α_i, β_i je proto účelné uvažovat jako funkce cen (nejlépe v podobě nějakého cenového indexu) .

Dále popisovaný *AIDS*-model uvedeme specifikací výdajové funkce tvaru

(8.66) $$\log E(u,\boldsymbol{p}) = a(\boldsymbol{p}) + ub(\boldsymbol{p})$$

kterážto vede k soustavě poptávkových funkcí pro w_i právě ve tvaru (8.61). To snadno ověříme uplatněním Shephardova lemmatu na tvar (8.56), tj. derivacemi $\dfrac{\partial \log E(u,\boldsymbol{p})}{\partial \log p_i}$ pro $i = 1,2,....,n$.

Z dále zřejmých důvodů se ukazuje za nejvhodnější volit pro parametry $a(\boldsymbol{p})$ a $b(\boldsymbol{p})$ interpretované jako cenové agregáty tyto konstrukty (indexy) :

(8.67a) $$a(\boldsymbol{p}) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \log p_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^* (\log p_j)(\log p_k)$$

(8.67b) $$b(\boldsymbol{p}) = \beta_0 \prod_{j=1}^{n} p_j^{\beta_j}$$

kde α_0, α_j, α_{jk}^*, β_0 a β_j jsou parametry. Aby výdajová funkce $E(u,\boldsymbol{p})$ byla lineárně homogenní v cenách $\boldsymbol{p}$, musí tyto parametry - jak lze bez obtíží ukázat - splňovat podmínky

(8.68) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}^* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^* = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0$$

Nyní zvolené cenové agregáty - parametry $a(\boldsymbol{p})$, $b(\boldsymbol{p})$ z (8.57a,b) - dosadíme do (8.66). Poté, co odvodíme rozpočtové účasti w_i pomocí vztahů $\dfrac{\partial \log E(u,\boldsymbol{p})}{\partial \log p_i}\partial$,dostaneme po následné substituci za u vztahy

(8.69) $$w_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot \log(p_j) + \beta_j \log\left(\frac{M}{P}\right)$$, kde

cenový index P je definován jako

(8.70) $$\log P = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \log p_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} (\log p_j)(\log p_k)$$

kde "neohvězdičkované" parametry α_{jk} jsou dány jako zprůměrované hodnoty "ohvězdičkovaných" :

(8.71) $$\alpha_{jk} = \frac{1}{2}\left(\alpha^*_{jk} + \alpha^*_{jk}\right) = \alpha_{kj}$$ (a tudíž jsou zesymetrizovány) .

Model reprezentovaný vztahy (8.65) a (8.66) se nazývá model ***AIDS*** (zkratka vytvořená z anglického ***Almost Ideal Demand System*** = téměř ideální poptávkový systém).

Zvláštností a předností tohoto modelu je, že zachovává obecnost jak modelu Theilova-Bartenova modelu tak *TRANSLOG* modelu. Jeho základní rovnice (8.69) může být považována za aproximaci 1. řádu obecné neznámé relace mezi w_i na jedné straně a veličin $\log M$ a $\log(p_j)$ na straně druhé.

Zbývá ještě uvést, do jaké míry ovlivňují podmínky kladené na obecnou výdajovou funkci přípustné hodnoty AIDS modelu. Podmínku homogenity jsme již udali skupinou vztahů (8.68), což pro symetrizované parametry α_{jk} představuje podmínky

(8.72) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} = 0$$

Další z podmínek, součtovatelnost individuálních poptávek do celkových výdajů, přináší restrikce

(8.73) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} = 0 \quad j = 1,2,....,n \qquad \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0$$

které jsou však již pokryty podmínkami uvedenými v (8.68) a konečně z podmínek symetrie dostáváme dříve uplatněný požadavek $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$, tj. (8.71).

Za zmínku stojí, že čtvercová matice, jejímiž prvky jsou hodnoty α_{jk}, nemusí být negativně semidefinitní. Podmínky negativity *(Sluckého matice)* jsou splněny, jestliže *výdajová* matice Ξ, jejímiž prvky jsou hodnoty ϑ_{jk} je definována jako

(8.74) $$\vartheta_{jk} = \alpha_{jk} + \beta_j \beta_k \log\left(\frac{M}{P}\right) - \delta_{jk} w_j - w_j w_k$$

kde δ_{jk} je použito pro označení Kroneckerova δ .

Z interpretačního hlediska jsou na AIDS modelu nejzajímavější parametry β_j, na základě kterých lze posoudit, zda jsou příslušné statky nezbytné ($\beta_j < 0$, w_j klesá) nebo luxusní. ($\beta_j > 0$, w_j vzrůstá) . Parametry α_{jk} pak udávají míru změny j-té rozpočtové účasti po jednotkové proporcionální změně p_j pokud se poměr $\frac{M}{P}$ zachovává.

alternativní obecnější specifikace AIDS modelu :

Dle modelu uvažovaného Workingem tedy platí :

$$w_i = \frac{\partial \log E(u,\boldsymbol{p})}{\partial \log(p_i)} = \alpha_i(\boldsymbol{p}) + \beta_i(\boldsymbol{p}) \cdot \log(E(u,\boldsymbol{p})) \tag{8.75}$$

který má obecné řešení ve tvaru

$$\log(E(u,\boldsymbol{p})) = u \cdot \log b(\boldsymbol{p}) + (1-u) \cdot \log a(\boldsymbol{p}) \quad \text{kde} \tag{8.76}$$

$$\alpha_i(\boldsymbol{p}) = \frac{a_i(p)\log(b) - b_i(\boldsymbol{p})\log(a)}{\log(b) - \log(a)} \qquad \beta_i(\boldsymbol{p}) = \frac{b_i(\boldsymbol{p})}{\log(b) - \log(a)}, \qquad \text{přičemž}$$

$$a_i = \frac{\partial \log(a)}{\partial \log(p_i)} \qquad b_i = \frac{\partial \log(b)}{\partial \log(p_i)}$$

Výdajová funkce tedy představuje užitkem vážený geometrický průměr lineárně homogenních funkcí $a(\boldsymbol{p})$a $b(\boldsymbol{p})$ reprezentující výdajové funkce velmi chudého ($u = 0$) a velmi bohatého ($u = 1$) spotřebitele. Celý systém poptávkových rovnice tzv. Working-Leserovy třídy může být generován vhodnou konkretizací funkcí $a(\boldsymbol{p})$ a $b(\boldsymbol{p})$. Jestliže zvolíme

$$\log a(\boldsymbol{p}) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \log p_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} (\log p_j)(\log p_k)$$

$$\log b(\boldsymbol{p}) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \log p_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} (\log p_j)(\log p_k) + \beta_0 \prod_{j=1}^{n} p_j^{\beta_j}$$

s obvyklými zpravidla přijímanými omezeními $\sum a_j = 1$, $\sum \alpha_{jk} = 0$ a $\sum \beta_j = 0$, dostaneme *AIDS*-výdajový systém ("*Almost Ideal Demand System*") [Deaton a Muelbauer 1980], pro který platí

$$w_i = \alpha_j + \beta_i \log\left(\frac{M}{P}\right) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} (\log p_j) \quad , \text{ přičemž indexní cenová funkce má tvar}$$

$$\log(P) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \log p_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} (\log p_j)(\log p_k)$$

8.8 Výdajový (n-komoditní) systém typu PIGL(OG)

Jinou možností, jak zvolit přijatelný tvar výdajové funkce, je nahradit geometrický průměr obecnou mocninou ρ-tého řádu. Touto modifikací dostaneme výdajovou funkci ve tvaru

$$E(u,\boldsymbol{p}) = \left[u \cdot b(\boldsymbol{p})^{\rho} + (1-u) \cdot a(\boldsymbol{p})^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} \qquad \text{kde } \rho > 0 \tag{8.77}$$

Tato tzv. PIGL-třída [Muelbauer] se mj. vyznačuje Engelovými křivkami zapsanými v ekvivalentním Box-Coxově tvaru (formulovaném pro w_i)

$$w_i = \alpha_i + \beta_i \cdot M^{-\rho}, \tag{8.78}$$

Uvedenou konkretizaci, nazývanou též „zobecněný Workingův model“ prezentovali poprvé Tran van Hoa [1983], Ironmonger a Manning [1983].