1. Zobrazte v rovině definiční obory funkcí

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$ b) $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)}$ c) $z = \ln(x + y)$

d) $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ e) $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$

2. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí

a) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ b) $z = \ln tg\, \frac{x}{y}$ c) $z = arctg \sqrt{x^y}$

d) $z = (\sin x)^y$ e) $z = x.\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$ f) $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

3. Vypočtěte

a) $f_z\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right)$, je-li $f(x, y, z) = \sqrt{(\sin x)^2 + (\sin y)^2 + (\sin z)^2}$

b) $f_x(1,2) + f_y(1,2)$, je-li $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$

c) $f_x + f_y + f_z$ v bodě (1,1,1) , je-li $f(x, y, z) = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$

4. Vypočítejte parciální derivace 1. a 2.řádu funkcí

a) $z = \frac{xy + x}{y}$ b) $z = \ln(x + y^2)$ c) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $z = \frac{\cos x^2}{y}$ e) $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$

5. Určete totální diferenciál funkce f(x,y) v bodě (x_0,y_0)

a) $f(x, y) = arctg \frac{y}{x}, (x_0, y_0) = (-1,-1)$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (3,4)$, je-li $dx = 0{,}02$, $dy = 0{,}01$

c) $f(x, y) = tg \frac{x}{y}$, $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

6. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně

   a) $\sqrt{(1{,}02)^3+(1{,}97)^3}$ b) $\arcsin\dfrac{0{,}48}{1{,}05}$ c) $0{,}99^{-1{,}02}$

7. Určete Taylorův polynom 2.stupně se středem v bodě (x_0, y_0) pro funkci f(x,y), je-li

   a) $f(x,y)=arctg\dfrac{y}{x}$, $(x_0, y_0)=(1{,}1)$

   b) $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,$(x_0, y_0)=(1{,}1)$

8. Užitím Taylorova polynomu 2.stupně vhodné funkce dvou proměnných ve vhodném bodě vypočtěte přibližně

   a) $arctg\dfrac{1{,}04}{0{,}98}$ b) $1{,}01^{-1{,}01}$ c) $\sqrt{2{,}98^2+4{,}05^2}$

9. Najděte lokální extrémy funkce z = f(x,y)

   a) $z=x^2+y^2-xy-2x+y$ b) $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$

   c) $z=xy.\ln(x^2+y^2)$ d) $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$

   e) $z=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3+4xy+y^2$

10. Najděte globální extrémy funkce z = f(x,y)

    a) $z=2x^2+4y^2$ v kruhu $x^2+y^2\le 9$

    b) $z=x^2+2xy-4x+8y$ v obdélníku x=0, y=0, x=1, y=2.

11. Vypočtěte

    a) $\displaystyle\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$ b) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ c) $\displaystyle\int\frac{(x+1)^2}{x+x^3}dx$

12. Metodou per partes vypočtěte

    a) $\int\arcsin x\,dx$ b) $\int x.arctgx\,dx$ c) $\displaystyle\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$

    d) $\int\cos(\ln x)dx$ e) $\int arctg\sqrt{2x-1}\,dx$ f) $\int x^3e^{2x}\,dx$

13. Vypočtěte

a) $\int \frac{x}{x^3-1}\,dx$ b) $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx$ c) $\int \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$

14. Užitím vhodné substituce vypočtěte

a) $\int \frac{\sin(1/x)}{x^2}\,dx$ b) $\int \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$ c) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}}\,dx$

d) $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ e) $\int \sin^2 x.\cos^2 x\,dx$ f) $\int tg^3 x\,dx$

g) $\int \frac{4tgx-5}{1-\sin 2x+4\cos^2 x}\,dx$ h) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$

i) $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx$ j) $\int \frac{tg^3 x}{\sin x}\,dx$

15. Vypočtěte

a) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\,dx$ b) $\int_0^{\pi/4} \sin^3 x.\cos x\,dx$ c) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

d) $\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{-12+8x-x^2}}$

16. Vypočtěte obsah rovinného obrazce, omezeného čarami

a) $y = 4 - x^2$, $y = 0$ b) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$

c) $xy = 4$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$

17. Vypočtěte

a) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ b) $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ c) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x.\ln^2 x}$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$ e) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2}$ f) $\int_{-1}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

18. Vyšetřete konvergenci nekonečné řady

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}5^{-n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{arctg\, n}\right)^n$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)2^n}$

19. Rozhodněte, zda následující řady $\alpha)$ konvergují, $\beta)$ konvergují absolutně. Výsledek zdůvodněte.

a) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg\,\frac{1}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2\pi^n}{(2n)!}$

20. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

a) $y'=10^{x+y}$ b) $x+xy+y'(x+y)=0$

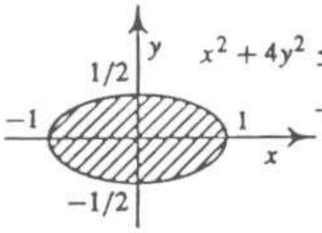
c) $xy'=y\ln\frac{y}{x}$ d) $y'=2x-y+3$

21. Řešte danou diferenciální rovnici. Najděte $\alpha)$ všechna řešení, $\beta)$ řešení vyhovující dané počáteční podmínce.

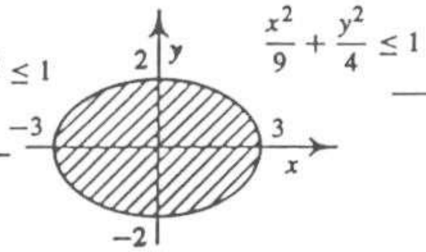
a) $y'+xy^2e^{2x}=0, y(0)=\frac{4}{1+4e}$

b) $y'=x+2y, y(0)=\frac{1}{2}$

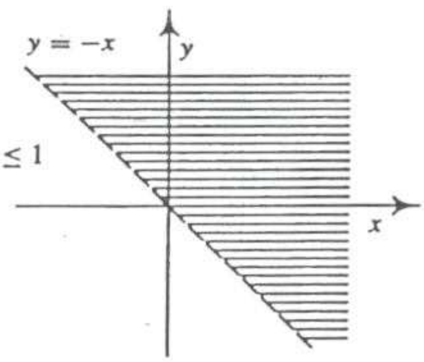
Výsledky



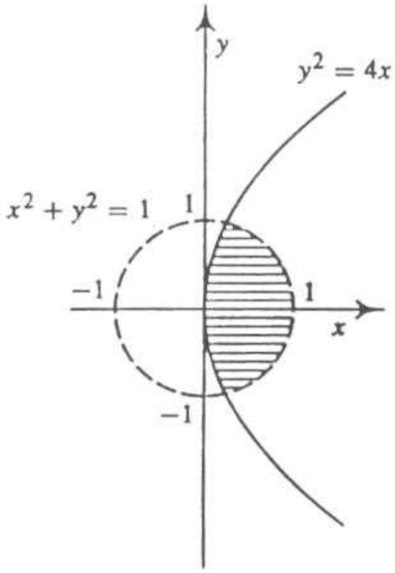
1.a)



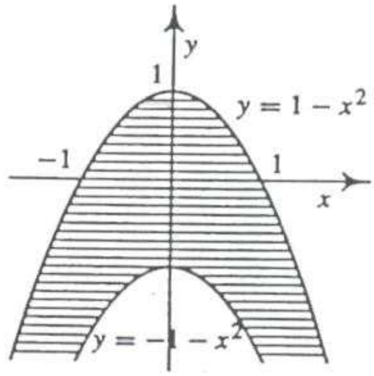
1.b)



1.c)



1.d)



1.e)

2. a) $z_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$

b) $z_x = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}$, $z_y = \frac{-2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}$

c) $z_x = \frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1 + x^y)}$, $z_y = \frac{\sqrt{x^y}\ln x}{2(1 + x^y)}$

d) $z_x = y(\sin x)^{y-1}\cos x$, $z_y = (\sin x)^y \ln\sin x$

e) $z_x = \sqrt{y} - \dfrac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$, $z_y = \dfrac{x}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

f) $z_x = \dfrac{|y|}{x^2+y^2}$, $z_y = \dfrac{-xy}{|y|(x^2+y^2)}$

3. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, **b)** $\dfrac{1}{4}$, **c)** $\dfrac{3}{2}$

4. a) $z_{xx} = 0$, $z_{xy} = \dfrac{-1}{y^2}$, $z_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$

b) $z_{xx} = \dfrac{-1}{(x+y^2)^2}$, $z_{xy} = \dfrac{-2y}{(x+y^2)^2}$, $z_{yy} = \dfrac{2(x \; - y^2)}{(x+y^2)^2}$

c) $z_{xx} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{xy} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{yy} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

d) $z_{xx} = -\dfrac{2\sin x^2 + 4x^2\cos x^2}{y}$, $z_{xy} = \dfrac{2x\sin x^2}{y^2}$, $z_{yy} = \dfrac{2\cos x^2}{y^3}$

e) $z_{xx} = \dfrac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $z_{xy} = \dfrac{2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $z_{yy} = \dfrac{-2x(x^2+2y^2)}{y^2(x^2+y^2)^{3/2}}$

5. a) $\dfrac{1}{2}dx - \dfrac{1}{2}dy$, **b)** $0{,}02$, **c)** $dx - \dfrac{\pi}{4}dy$

6. a) $2{,}95$, **b)** $\dfrac{\pi}{6} - 0{,}03.\sqrt{3}$, **c)** $1{,}01$

7. a) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{2}(y-1) + \dfrac{1}{4}(x-1)^2 - \dfrac{1}{4}(y-1)^2$

b) $\ln\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{2}(y-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)(y-1)$

8. a) $\dfrac{\pi}{4} + 0{,}0297 = 0{,}8060982$, **b)** $0{,}99$, **c)** $5{,}0282116$

9. a) vlastní lokální minimum v bodě $(1{,}0)$

b) vlastní lokální minimum v bodě $(5{,}2)$

c) sedlové body $(0{,}1), (0,-1), (1{,}0), (-1{,}0)$, vlastní lokální minima v bodech $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{2e}},\frac{-1}{\sqrt{2e}}\right)$,

vlastní lokální maxima v bodech $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{-1}{\sqrt{2e}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$

d) vlastní lokální minimum v bodě $(0,0)$, sedlový bod $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$

e) vlastní lokální minima v bodech $(4,-8),(-2,4)$, sedlový bod $(0,0)$

10. a) globální maximum $f(0,3)=f(0,-3)=36$, globální minimum $f(0,0)=0$

b) globální maximum $f(1,2)=17$, globální minimum $f(1,0)=-3$

11. a) $\frac{1}{2}tgx+\frac{1}{2}x+C$, **b)** $-ctg\,x-tg\,x+C$, **c)** $\ln|x|+2arctgx+C$

12. a) $x.\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$, **b)** $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)arctgx-\frac{1}{2}x+C$

c) $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4.\sqrt{1-x}+C$, **d)** $\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$

e) $x\,arctg\sqrt{2x-1}-\frac{x}{2}\sqrt{2x-1}+C$

f) $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)e^{2x}+C$

13. a) $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

b) $\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+arctg\,x+C$

c) $\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C$

14. a) $\cos\left(\frac{1}{x}\right)+C$, **b)** $\frac{-3}{2\left(x^2+1\right)}+C$, **c)** $\frac{-1}{3}e^{-x^3}+C$

d) $2\sqrt{x}\,arctg\sqrt{x}-\ln(x+1)+C$, **e)** $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$

f) $\dfrac{tg^2 x}{2} + \ln\left|\cos x\right| + C$

g) $2\ln\left(tg^2 x - 2\,tgx + 5\right) + \dfrac{1}{2}\,arctg\,\dfrac{tgx-1}{2} + C$

h) $x - tg\,\dfrac{x}{2} + C$ **, i)** $tg\,\dfrac{x}{2} - \ln\left(1 + tg^2\,\dfrac{x}{2}\right) + C$

j) $\dfrac{-\sin x}{2\cos^2 x} + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + C$

15. a) 4π **, b)** $\dfrac{1}{16}$**, c)** $arctg\,e - \dfrac{\pi}{4}$ **, d)** $\dfrac{\pi}{6}$

16. a) $\dfrac{32}{3}$ **, b)** 12 **, c)** $8\ln 2$

17. a) 1 **, b)** $\dfrac{1}{2}$ **, c)** $\dfrac{1}{\ln 3}$ **, d)** $\ln\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ **, e)** *diverguje* **, f)** 12

18. a) *konv.* **, b)** *konv.* **, c)** *konv.* **, d)** *konv.* **, e)** *div.* **, f)** *konv.* **,**
g) *div.* **, h)** *div.*

19. a) *konv.neabs.* **, b)** *konv.neabs.* **, c)** *konv.abs.* **, d)** *konv.abs.*

20. a) $10^x + 10^{-y} = C$ **, b)** $c\,e^{x+y} = (1+x)(1+y)$
c) $y = x\,e^{Cx+1}$ **, d)** $y = C\,e^{-x} + 2x + 1$

21. a α) $y = \dfrac{4}{2xe^{2x} - e^{2x} + C}$ **, a β)** $y = \dfrac{4}{2xe^{2x} - e^{2x} + 4e + 2}$

b α) $y = C\,e^{2x} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$ **, b β)** $y = \dfrac{3}{4}e^{2x} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$