Řešení písemné části zkoušky z matematiky B (KMMATB) 17.6.2005

1. Určete rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ v bodě $T=[1,?]$.

Řešení:

$f(1)=\dfrac{1}{2}$, $T=\left[1,\dfrac{1}{2}\right]$

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$

tečna t : $y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(x-1)$ normála n : $y-\dfrac{1}{2}=2(x-1)$

$y=-\dfrac{1}{2}x+1$ $y=2x-\dfrac{3}{2}$

---

2. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Řešení:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x\cdot\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\sin x+4x\cdot\cos x-x^2\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2\cos x+4\cos x-4x\cdot\sin x-2x\cdot\sin x-x^2\cos x}=\frac{1}{6}$$

---

3. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$

Řešení:

D(f) = **R** – $\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

Funkce je lichá.

f(0) = 0

interval	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$f(x)$	+	-	+	-

$$f'(x)=\frac{3x^2(3-x^2)-x^3\cdot(-2x)}{(3-x^2)^2}=\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2}$$

interval	$(-\infty,-3)$	$(-3,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	-	+	+	+	-
$f(x)$	klesá	roste	roste	roste	klesá

$f(-3)=\dfrac{-27}{-6}=\dfrac{9}{2}$ je lokální minimum

$f(3)=\dfrac{27}{-6}=-\dfrac{9}{2}$ je lokální maximum

$$f''(x)=\frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2-(9x^2-x^4)\cdot2(3-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^4}=$$

$$= \frac{54x - 12x^3 - 18x^3 + 4x^5 + 36x^3 - 4x^5}{\left(3 - x^2\right)^3} = \frac{6x^3 + 54x}{\left(3 - x^2\right)^3} = \frac{6x\left(9 + x^2\right)}{\left(\sqrt{3} - x\right)^3\left(\sqrt{3} + x\right)^3}$$

interval	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
$f''(x)$	+	-	+	-
$f(x)$	konvexní	konkávní	konvexní	konkávní

Inflexní bod je $f(0) = 0$.

Asymptoty bez směrnice jsou přímky $x = -\sqrt{3}$ a $x = \sqrt{3}$, neboť

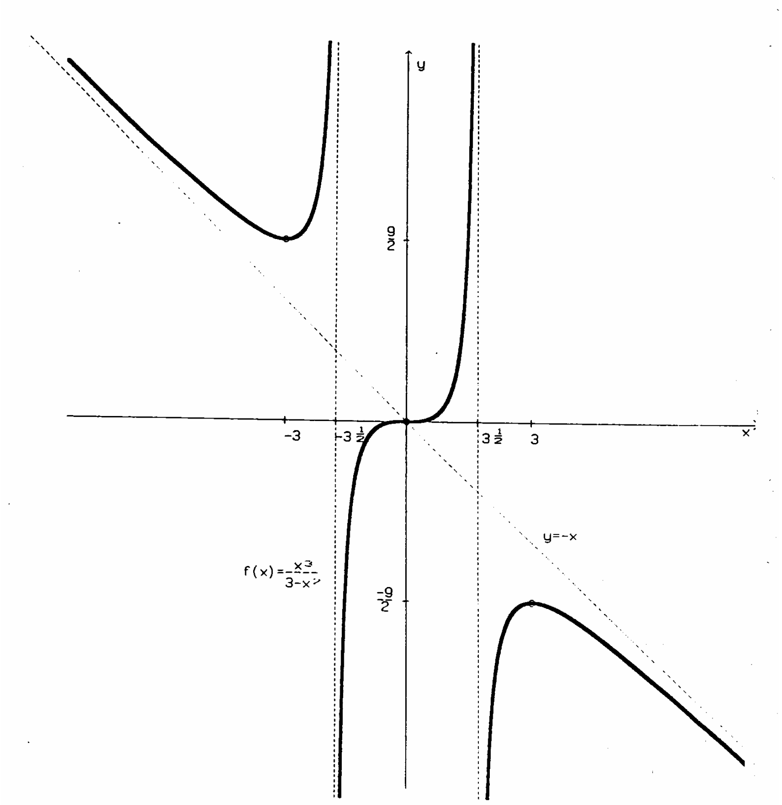
$$\lim_{x \to -\sqrt{3}^-} \frac{x^3}{3 - x^2} = \infty \quad , \quad \lim_{x \to -\sqrt{3}^+} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to \sqrt{3}^-} \frac{x^3}{3 - x^2} = \infty \quad , \quad \lim_{x \to \sqrt{3}^+} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty$$

Asymptota se směrnicí je přímka $y = -x$, neboť

$$A = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{3 - x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{-2x} = -1 \quad ,$$

$$B = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - Ax\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{3 - x^2} + x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 3x - x^3}{3 - x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{-2x} = 0$$

Graf:



4. Vypočítejte

a) $\int x^3 e^{-x}\,dx$ metodou per partes

b) $\int \frac{dx}{2(1+\sqrt{x})}$ substitucí $x = t^2$, pro $t > 0$.

Řešení:

a) $$\int x^3 e^{-x}\,dx = \begin{vmatrix} u = x^3 & v' = e^{-x} \\ u' = 3x^2 & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -x^3 e^{-x} + \int 3x^2 e^{-x} dx = \begin{vmatrix} u = 3x^2 & v' = e^{-x} \\ u' = 6x & v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + \int 6x e^{-x} dx = \begin{vmatrix} u = 6x & v' = e^{-x} \\ u' = 6 & v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} + \int 6 e^{-x} dx = = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} - 6e^{-x} + C$$

b) $$\int \frac{dx}{2(1+\sqrt{x})} = \begin{vmatrix} x = t^2 \text{ , } t > 0 \\ dx = 2t\,dt \end{vmatrix} = \int \frac{2t}{2(1+t)} dt = \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = \int dt - \int \frac{dt}{t+1} = t - \ln|t+1| + C =$$

$$= \sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}) + C$$

---

5. Vypočítejte $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ substitucí $x = \operatorname{tg} t$.

Řešení:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \begin{vmatrix} x = \operatorname{tg} t & t = \operatorname{arctg} x & dt = \frac{dx}{1+x^2} \\ x = 1 & \Leftrightarrow & t = \frac{\pi}{4} \\ x = \sqrt{3} & \Leftrightarrow & t = \frac{\pi}{3} \end{vmatrix} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos t\,dt =$$

$$= [\sin t]_{\pi/4}^{\pi/3} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

---

6. Vypočítejte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$ **.**

Řešení:

$f_x(x,y) = 2x - y - 2$ $\quad\quad f_{xx} = 2$

$f_y(x,y) = 2y - x + 1$ $\quad\quad f_{yy} = 2$

$f_{xy} = -1$

$$\begin{aligned} 2x \quad - y - 2 &= 0 \\ -x + 2y + 1 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad 3y = 0 \quad \wedge \quad x = 1$$

Stacionární bod je bod [1,0] .

$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$ tedy extrém nastane a $f_{xx} = 2 > 0$,

takže funkce f(x,y) má v bodě [1,0] vlastní lokální minimum $f(1,0) = -1$.

Řešení písemné části zkoušky z matematiky B (KMMATB) 15.5.2005

1. Určete rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ v bodě T = [1 , ?]

Řešení:

$f(1)=0 \quad , \quad T=[1,0]$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)-\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2} \quad , \quad f'(1)=\frac{1}{4}$$

tečna t: $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$ normála n: $y=-4x+4$

---

2. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

Řešení:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\cdot\sin x-\cos x}{\sin x+x\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-x\cdot\sin x}{\sin x+x\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x-x\cdot\cos x}{\cos x+\cos+-x\cdot\sin x}=0$$

---

3. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Řešení:

D(f) = **R** – {-1,1}

Funkce je lichá.

Můžeme určit znaménko funkce:

interval	$(-\infty,-1)$	(-1,0)	(0,1)	$(1,\infty)$
f(x)	-	+	-	+

$$f'(x)=\frac{x^2-1-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$$

interval	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	-	-	-
f(x)	klesá	klesá	klesá

$$f''(x)=-\frac{2x\left(x^2-1\right)^2-4x\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

interval	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
f(x)	konkávní	konvexní	konkávní	konvexní

f(0) = 0 je inflexní bod

Asymptoty bez směrnice jsou přímky x = -1 a x = 1 ,

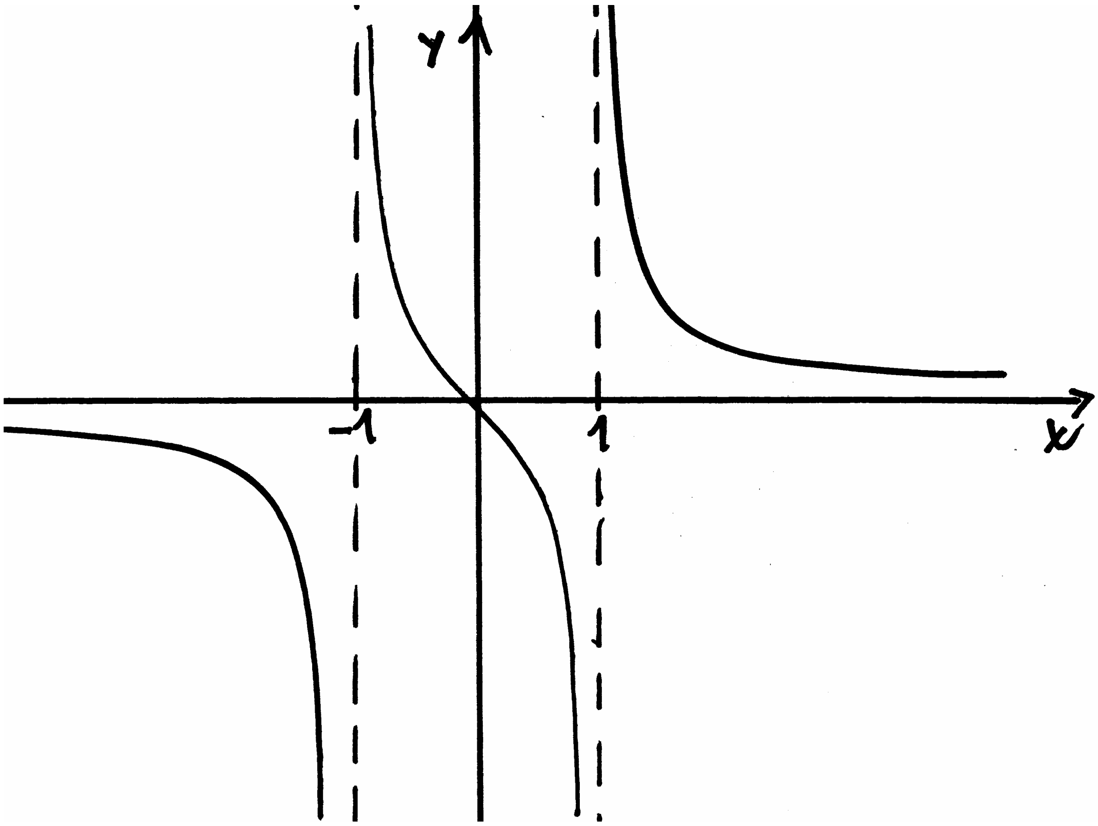
$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x^2-1}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}=\infty$$

Asymptota se směrnicí je přímka y = 0 , neboť

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x}=0$$

Graf:



4. Vypočítejte

a) $\int x \cdot \ln x \, dx$ užitím metody per partes

b) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$ užitím substituce $\sin x = t$.

Řešení:

a) $$\int x \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} u' = x & v = \ln x \\ u = \frac{x^2}{2} & v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

b) $$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cos x \, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1 - t^2}{t^2} dt =$$

$$= \int \frac{1}{t^2} dt - \int dt = -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$$

---

5. Vypočítejte $\int_0^2 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$ užitím substituce $e^x = t$.

Řešení:

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \left| \begin{matrix} e^x = t & & e^x dx = dt \\ x = 0 & \Leftrightarrow & t = 1 \\ x = 2 & \Leftrightarrow & t = e^2 \end{matrix} \right| = \int_1^{e^2} \frac{dt}{1 + t^2} = [\operatorname{arctg} t]_1^{e^2} = \operatorname{arctg} e^2 - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} e^2 - \frac{\pi}{4}$$

---

6. Užitím totálního diferenciálu vhodné funkce dvou proměnných ve vhodném bodě vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

Řešení:

Volíme $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$, $[x_0, y_0] = [1, 2]$, $dx = 0{,}02$, $dy = -0{,}03$

$$f_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \quad , \quad f_x(1,2) = \frac{3}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2}$$

$$f_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \quad , \quad f_y(1,2) = \frac{3 \cdot 4}{2\sqrt{9}} = 2$$

$$f(1,2) = \sqrt{1 + 8} = 3$$

$$df(1,2) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 + 2 \cdot (-0{,}03) = -0{,}05$$

$$\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3} \doteq 3 - 0{,}05 = 2{,}95$$
