Řešené příklady z diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

Pojem funkce více proměnných.

Reálná funkce jedné proměnné je zobrazení z **R** do **R**. Zobecněním tohoto pojmu je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ do **R**, které se nazývá funkce více proměnných.

Definice.
Nechť $M \subseteq \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$ se nazývá ***reálná funkce n reálných proměnných*** a množina M se nazývá ***definiční obor*** této funkce a značí se **D**(f) .

Z definice funkce více proměnných vyplývá, že tato funkce je jednoznačně určena udáním jejího definičního oboru **D**(f) a předpisem, kterým je každému bodu $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbf{D}(f)$ přiřazena funkční hodnota f(x). Pokud je předpis dán vzorcem a není udaný definiční obor, pak definičním oborem rozumíme množinu všech bodů $x \in \mathbf{R}^n$, pro něž má tento vzorec smysl.

Příklady.

1. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

   a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$, **b)** $f(x,y) = \ln[x\ln(y-x)]$

   c) $f(x,y) = \sqrt{(1-x^2-y^2)\left(\frac{x^2}{4}+y^2-2y\right)}$

Řešení:

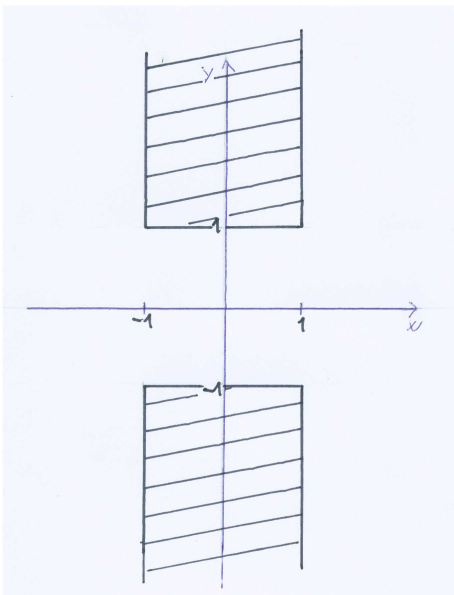
a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$

$1-x^2 \geq 0 \quad \wedge \quad y^2-1 \geq 0$

$|x| \leq 1 \quad \wedge \quad |y| \geq 1$

$-1 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad (y \leq -1 \quad \vee \quad y \geq 1)$

D(f) je znázorněn na vedlejším obrázku



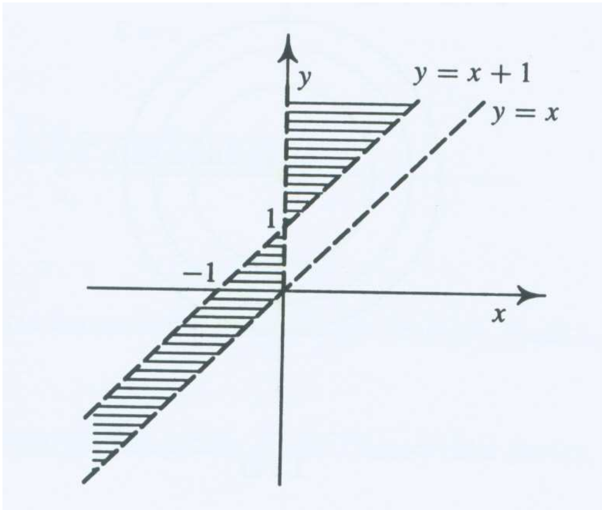
b) $f(x,y)=\ln[x\ln(y-x)]$

$y-x>0 \quad \wedge \quad x\ln(y-x)>0$

$y>x \quad \wedge \quad (x>0 \ \wedge \ y-x>1) \vee (x<0 \ \wedge y-x<1)$

$(x>0 \quad \wedge \quad y>x+1) \vee (x<0 \quad \wedge \quad x<y<x+1)$

D(f) je znázorněn na vedlejším obrázku



c) $f(x,y)=\sqrt{(1-x^2-y^2)\left(\dfrac{x^2}{4}+y^2-2y\right)}$

$1-x^2-y^2 \ge 0 \quad \wedge \quad \dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2 \ge 1$

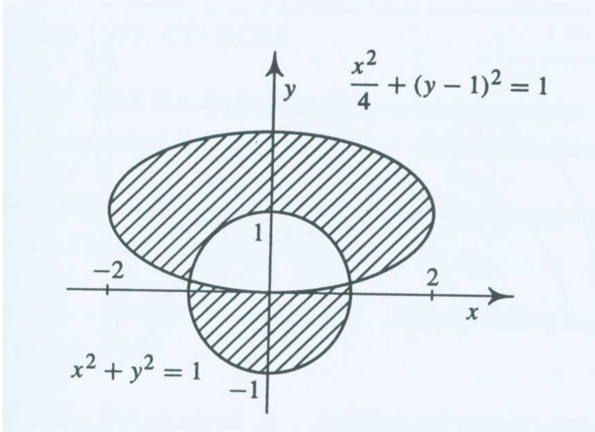
$x^2+y^2 \le 1 \quad \wedge \quad \dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2 \ge 1$

nebo

$1-x^2-y^2 \le 0 \quad \wedge \quad \dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2 \le 1$

$x^2+y^2 \ge 1 \quad \wedge \quad \dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2 \le 1$

D(f) je znázorněn na vedlejším obrázku



Definice.
Nechť f je funkce n proměnných definovaná na množině $M \subseteq \mathbf{R}^n$, $n \ge 2$. ***Grafem funkce*** f nazýváme množinu bodů $G(f) = \{[x,y] \in \mathbf{R}^{n+1} : x=[x_1,...,x_n] \in M,\ y=f(x)\}$.

Pro funkci dvou proměnných, tj. pro $n = 2$ je grafem funkce množina bodů v trojrozměrném prostoru. V příkladech, se kterými se zde setkáme to bude vždy trojrozměrná plocha.
Pro získání názorné představy, jaký je tvar a průběh této plochy nám pomohou řezy rovinami $z = 0$, $y = 0$ a $x = 0$ (tj. řezy souřadnými rovinami čili půdorysnou, nárysnou a bokorysnou) a rovinami rovnoběžnými s rovinou $z = 0$ (vrstevnice).

Definice.
Nechť $M \subseteq \mathbf{R}^2$ a $f: M \to \mathbf{R}$ je funkce dvou proměnných definovaná na M, $c \in \mathbf{R}$. Množina

$$f_c = \{[x,y] \in M : f(x,y)=c\}$$

se nazývá ***vrstevnice funkce f na úrovni c.***

Příklady.

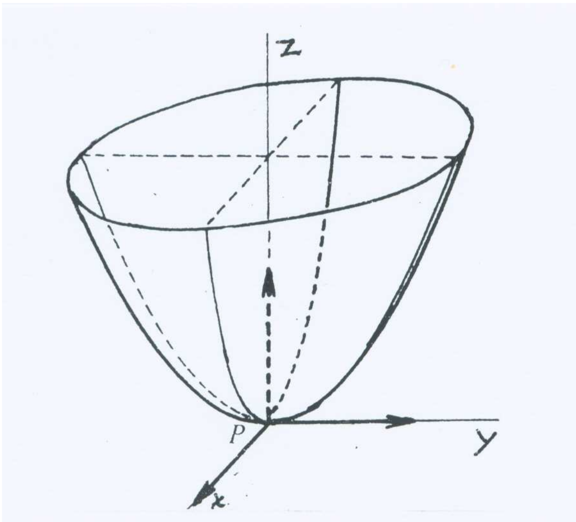
2. Pomocí vrstevnic a řezů rovinami y = 0 a x = 0 znázorněte graf následujících funkcí:

a) $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}$, **b)** $z=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}$, **c)** $z^2=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}-1$, **d)** $z^2=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}+1$

e) $z^2=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}$.

Řešení:

a) $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}$



$z=0: \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=0 \Leftrightarrow [x,y]=[0,0]$

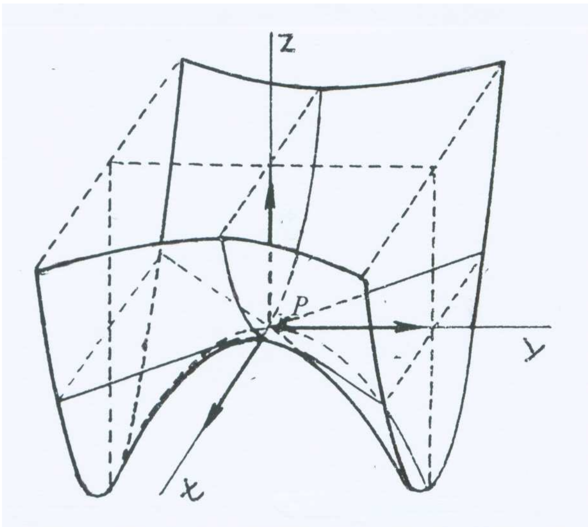
$z=c>0: \frac{x^2}{4c}+\frac{y^2}{3c}=1$ ... elipsa

$x=0: z=\frac{y^2}{4}$ .... parabola

$y=0: \ z=\frac{x^2}{4}$ .... parabola

jedná se o eliptický paraboloid

b) $z=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}$



$z=0: \ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}+\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{\sqrt{3}}\right)=0$

dvojice přímek

$z=c\neq 0: \ \frac{x^2}{4c}-\frac{y^2}{3c}=1$ … hyperbola

$x=0: \ z=-\frac{y^2}{3}$ … parabola

$y=0: \ z=\frac{x^2}{4}$ … parabola

jedná se o hyperbolický paraboloid

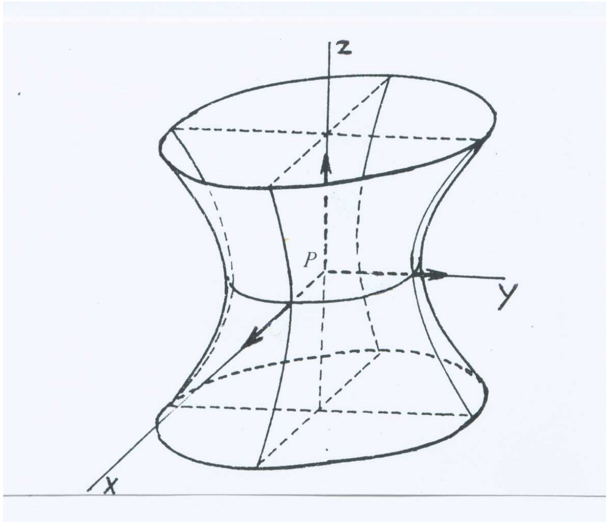
c) $z^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} - 1$

$z = c \in \mathbf{R}: \frac{x^2}{3(c^2+1)} + \frac{y^2}{5(c^2+1)} = 1$ …elipsa

$x = 0: \frac{y^2}{5} - z^2 = 1$… hyperbola

$y = 0: \frac{x^2}{3} - z^2 = 1$ hyperbola

jedná se o jednodílný hyperboloid



d) $z^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} + 1$

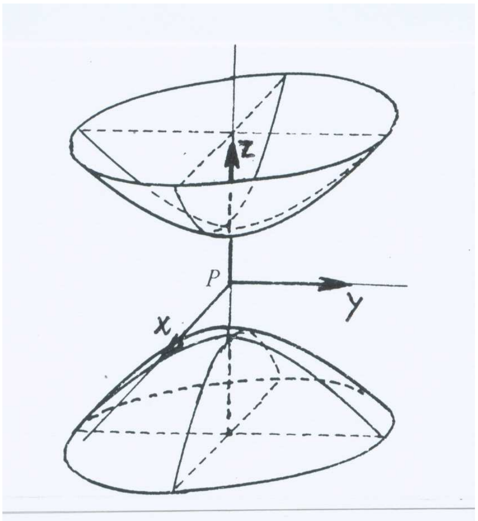
$z = \pm 1: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 0 \iff [x, y] = [0,0]$

$z = c,\ |c| > 1: \frac{x^2}{3(c^2-1)} + \frac{y^2}{5(c^2-1)} = 1$ elipsa

$x = 0: z^2 - \frac{y^2}{5} = 1$ … hyperbola

$y = 0: z^2 - \frac{x^2}{3} = 1$ … hyperbola

jedná se o dvojdílný hyperboloid



e) $z^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5}$

$z = 0: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 0 \iff [x, y] = [0,0]$

$z = c: \frac{x^2}{3c^2} + \frac{y^2}{5c^2} = 1$ … elipsa

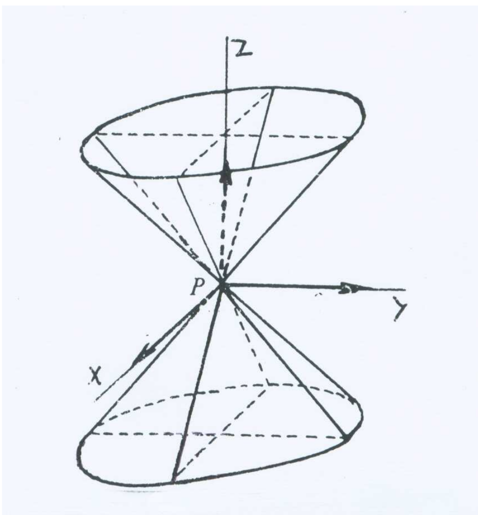
$x = 0: z^2 - \frac{y^2}{5} = 0 \iff \left(z - \frac{y}{\sqrt{5}}\right)\left(z + \frac{y}{\sqrt{5}}\right) = 0$

dvojice přímek

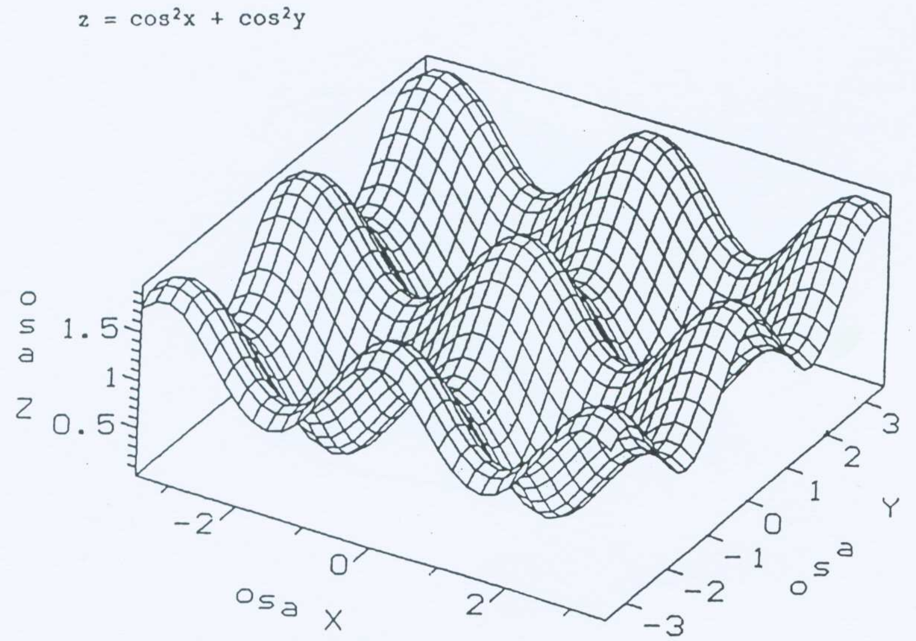
$y = 0: z^2 - \frac{x^2}{5} = 0 \iff \left(z - \frac{x}{\sqrt{5}}\right)\left(z + \frac{x}{\sqrt{5}}\right) = 0$

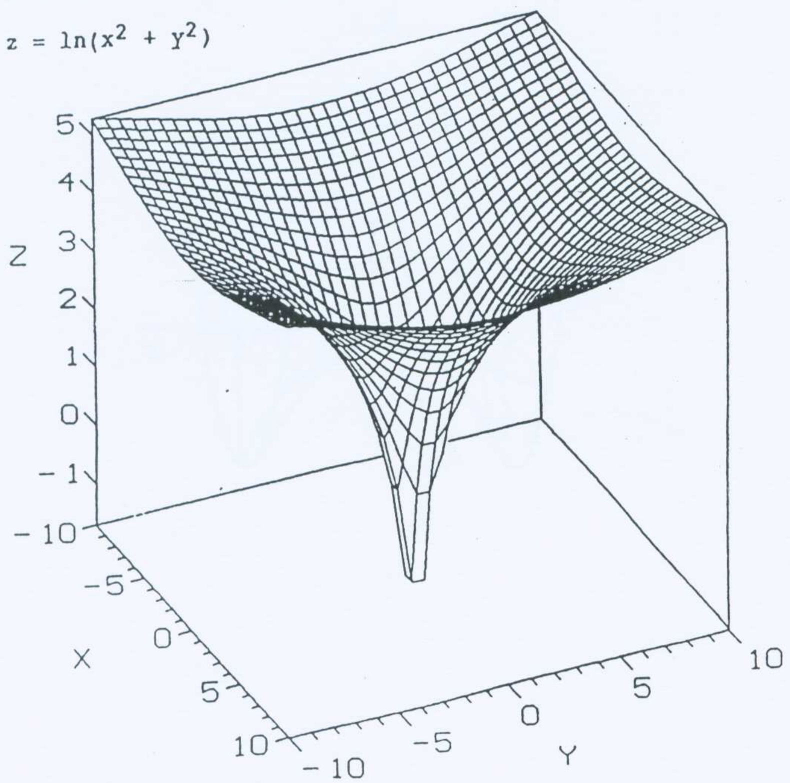
dvojice přímek

jedná se o eliptický kužel



Pro lepší představu uvedeme ještě grafy dvou složitějších ploch vykreslené počítačem.





Důležité pojmy jsou ***okolí bodu, vnitřní bod, hromadný bod a hraniční bod množiny, otevřená množina, uzavřená množina.*** Viz DSO str. 262 – 264. Zde pouze upozorňuji, že podle výběru metriky, kterou použijeme v definici okolí, dostáváme různé typy okolí. Např. v $\mathbf{R}^2$ při volbě euklidovské metriky dostaneme kruhové okolí, při volbě maximové metriky dostaneme čtvercové okolí. Podstatná je *ekvivalentnost těchto metrik* , to znamená že existence (neexistence) limity nezáleží na tom, kterou z metrik zvolíme.

Limita a spojitost.

Dalšími důležitými pojmy jsou pojem limity a pojem spojitosti funkce více proměnných -viz DSO str.264 – 276. Zde uveďme pouze následující definici limity funkce dvou proměnných..

Definice (vlastní limity ve vlastním bodě).
Řekneme, že funkce $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ má v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbf{R}^2$ limitu $L \in \mathbf{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové okolí U_δ bodu $[x_0, y_0]$, že pro všechny body $[x, y] \in U_\delta$, $[x, y] \neq [x_0, y_0]$ platí

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad .$$

Píšeme

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Poznámka.
Vidíme, že definice limity funkce dvou proměnných je formálně stejná jako definice limity funkce jedné proměnné. I věty o vlastnostech limity funkce více proměnných mají formálně stejné znění jako věty o vlastnostech limity funkce jedné proměnné.
Podstatný rozdíl spočívá v „dimenzi“ okolí limitního bodu. U funkce jedné proměnné se k tomuto bodu můžeme blížit jen po jediné přímce to buď zleva nebo zprava.. U funkce více proměnných se můžeme k limitnímu bodu blížit z různých směrů např. po přímkách, parabolách či jakýchkoliv jiných křivkách. Existence limity v daném bodě znamená, že nezáleží na cestě, po které se k tomuto bodu blížíme.

Příklad.

Pokusíme se spočítat $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. Blíží-li se bod [x,y] k bodu [0,0] po přímce $y = kx,\ k \neq 0$

dostaneme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$. Vidíme, že výsledek závisí na konstantě k, tedy na tom, po jaké přímce se k bodu [0,0] blížíme. Daná limita proto neexistuje.

Metodami výpočtů limit funkcí více proměnných se nebudeme zabývat.

Parciální derivace.

Definice.
Nechť funkce $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je definována v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce $\varphi(x)$ derivaci v bodě x_0 , nazýváme tuto derivaci ***parciální derivací*** funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme ji $f_x(x_0, y_0)$ nebo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Poznámky.

1. Podobně se definuje parciální derivace podle y. Analogicky se definují parciální derivace funkce n proměnných.

2. Protože parciální derivace f_{x_i} funkce n proměnných je definována jako „obyčejná" derivace podle proměnné x_i , platí pro počítání parciálních derivací obvyklá pravidla pro derivování.

3. Parciální derivace podle proměnné x_i počítáme tak, že všechny ostatní proměnné považujeme za za konstanty a „obyčejně" derivujeme podle x_i .

Má-li funkce z = f(x,y) parciální derivace podle x a podle y ve všech bodech nějaké množiny $N \subset \mathbf{D}(f)$, jsou tyto parciální derivace funkcemi proměnných x a y. Označujeme je $f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Může se stát, že tyto parciální derivace lze znovu parciálně derivovat podle x a podle y. Tím se dostáváme k pojmu parciálních derivací druhého řádu.

Parciální derivace vyšších řádů.

Definice.
Nechť $[x_0,y_0] \in \mathbf{D}(f_x)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x,y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0,y_0]$, nazýváme tuto derivaci ***parciální derivací 2. řádu*** podle x funkce f v bodě $[x_0,y_0]$ a značíme ji

$f_{xx}(x_0,y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$.

Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x,y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0,y_0]$, nazýváme tuto derivaci ***smíšenou parciální derivací 2. řádu*** podle y funkce f v bodě $[x_0,y_0]$ a značíme ji $f_{xy}(x_0,y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$.

Poznámka.
Podobně se definují parciální derivace f_{yy} a f_{yx} .

Věta (Schwarzova).
Nechť má funkce f v okolí bodu $[x_0,y_0]$ parciální derivace f_x , f_y a smíšenou parciální derivaci f_{xy} , která je v bodě $[x_0,y_0]$ spojitá. Pak existuje také smíšená parciální derivace $f_{yx}(x_0,y_0)$ a platí

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0) .$$

Poznámka.
Analogicky jako parciální derivace 2. řádu se dají zavést parciální derivace vyšších řádů. Tvrzení Schwarzovy věty lze rozšířit na smíšené parciální derivace řádu n. Tedy, pokud jsou smíšené parciální derivace spojité, nezáleží na tom, v jakém pořadí derivujeme, ale pouze na tom, kolikrát derivujeme podle které proměnné.

Poznámka.
Pro funkci jedné proměnné platí, že z existence první derivace v daném bodě vyplývá spojitost funkce v tomto bodě. Pro funkce více proměnných analogické tvrzení neplatí.

Příklady.

1. Vypočítejte parciální derivace 1. a 2.řádu následujících funkcí v obecném bodě.

a) $z = 3x^5 - 7x^2y^2 + 3xy^2 - 2y^2 + 1$ **b)** $z = x \cdot \sin(x+y)$

c) $z = \ln(x+y^2)$ **d)** $z = \mathrm{artcg}\dfrac{y}{x}$ **e)** $z = (1+x^2)^y$

Řešení:

a) $z = 3x^5 - 7x^2y^2 + 3xy^2 - 2y^2 + 1$

$z_x = 15x^4 - 14xy^2 + 3y^2$ $z_{xx} = 60x^3 - 14y^2$ $z_{xy} = -28xy + 6y$

$z_y = -14x^2y + 6xy - 4y$ $z_{yy} = -14x^2 + 6x - 4$ $z_{yx} = -28xy + 6y$

Vidíme, že smíšené parciální derivace jsou si rovny**.** V dalších příkladech již budeme počítat jen jednu z nich.

b) $z = x \cdot \sin(x+y)$

$z_x = \sin(x+y) + x \cdot \cos(x+y)$

$z_y = x \cdot \cos(x+y)$

$z_{xx} = \cos(x+y) + \cos(x+y) - x \cdot \sin(x+y) = 2 \cdot \cos(x+y) - x \cdot \sin(x+y)$

$z_{yy} = -x \cdot \sin(x+y)$

$z_{xy} = \cos(x+y) - x \cdot \sin(x+y) = z_{yx}$

c) $z = \ln(x+y^2)$

$z_x = \dfrac{1}{x+y^2}$ $z_{xx} = -\dfrac{1}{(x+y^2)^2}$ $z_{xy} = \dfrac{-2y}{(1+x^2)^2} = z_{yx}$

$z_y = \dfrac{2y}{x+y^2}$ $z_{yy} = \dfrac{2(x+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x+y^2)^2} = \dfrac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$

d) $z = \mathrm{artcg}\dfrac{y}{x}$

$z_x = \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\dfrac{-y}{x^2}\right) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ $z_{xx} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$z_y = \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ $z_{yy} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$$z_{xy} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

e) $z = (1+x^2)^y$

$z_x = y \cdot (1+x^2)^{y-1} \cdot 2x = 2xy(1+x^2)^{y-1}$

$z_y = (1+x^2)^y \cdot \ln(1+x^2)$

$$z_{xx} = 2y\left(1+x^2\right)^{y-1} + 2xy(y-1)\left(1+x^2\right)^{y-2}\cdot 2x = 2y\left(1+x^2+2x^2y-2x^2\right)\left(1+x^2\right)^{y-2} =$$
$$= 2y\left(1-x^2+2x^2y\right)\left(1+x^2\right)^{y-2}$$
$$z_{yy} = \left(1+x^2\right)^y \ln^2\left(1+x^2\right)$$
$$z_{xy} = 2x\left(1+x^2\right)^{y-1} + 2xy\left(1+x^2\right)^{y-1}\cdot\ln\left(1+x^2\right) = 2x\left(1+y\cdot\ln\left(1+x^2\right)\right)\cdot\left(1+x^2\right)^{y-1}$$

2. Vypočítejte parciální derivace prvního řádu v daném bodě.

a) $z = y^2 + y\cdot\sqrt{1+x^2}$ v bodě $[2,5]$ **b)** $z = \ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$ v bodě $[1,2]$

c) $z = \operatorname{arctg}(x-y)^2$ v bodě $[3,1]$ **d)** $z = x\cdot\operatorname{tg}y$ v bodě $\left[1,\dfrac{\pi}{4}\right]$

Řešení:

a) $z = y^2 + y\cdot\sqrt{1+x^2}$ v bodě $[2,5]$

$$z_x = y\cdot\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} \qquad z_x(2,5) = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$
$$z_y = 2y + \sqrt{1+x^2} \qquad z_y(2,5) = 10+\sqrt{5}$$

b) $z = \ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$ v bodě $[1,2]$

funkci upravíme na tvar $z = \ln\dfrac{2x^2+y}{2x}$, který je výhodnější pro derivování vnější složky složené funkce. Pro derivování vnitřní složky je naopak výhodnější původní tvar.

$$z_x = \frac{2x}{2x^2+y}\cdot\left(1-\frac{y}{2x^2}\right) = \frac{2x^2-y}{x\left(2x^2+y\right)} \qquad z_x(1,2) = 0$$
$$z_y = \frac{2x}{2x^2+y}\cdot\frac{1}{2x} = \frac{1}{2x^2+y} \qquad z_y(1,2) = 0{,}25$$

c) $z = \operatorname{arctg}(x-y)^2$ v bodě $[3,1]$

$$z_x = \frac{2(x-y)}{1+(x-y)^4} \qquad z_x(3,1) = \frac{2\cdot 2}{1+2^4} = \frac{4}{17}$$
$$z_y = \frac{-2(x-y)}{1+(x-y)^4} \qquad z_y(3,1) = \frac{-2\cdot 2}{1+2^4} = -\frac{4}{17}$$

d) $z = x\cdot\operatorname{tg}y$ v bodě $\left[1,\dfrac{\pi}{4}\right]$

$$z_x = \operatorname{tg}y \qquad z_x\left(1,\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$
$$z_y = \frac{x}{\cos^2 y} \qquad z_y\left(1,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$$

Totální diferenciál.

Definice.
Nechť z = f(x,y) je funkce definovaná v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ a nechť má v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace prvního řádu. Potom funkci

$$df(x_0, y_0, h, k) = f_x(x_0, y_0)\cdot h + f_y(x_0, y_0)\cdot k$$

nazýváme ***totálním diferenciálem*** funkce f(x,y) v bodě $[x_0, y_0]$.

Poznámky.

1. Podobně jako při zavedení diferenciálu funkce jedné proměnné znamenají h, k přírůstky neodvisle proměnných x,y a často je značíme dx, dy. Totální diferenciál je lineární funkcí přírůstků neodvisle proměnných.

2. Označíme-li $\Delta f(x_0, y_0, h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ přírůstek funkce při přechodu z bodu $[x_0, y_0]$ do bodu $[x_0 + h, y_0 + k]$, platí pro dostatečně malé hodnoty $|h|, |k|$ přibližný vztah

$$\Delta f(x_0, y_0 h, k) \doteq df(x_0, y_0, h, k)$$

Toho využíváme při přibližném výpočtu funkčních hodnot některých funkcí.

Příklady.

1. Vypočtěte totální diferenciál fukce f(x,y) v daném bodě při daných přírůstcích neodvisle proměnných:

a) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$, $[x_0, y_0] = [1,1]$, $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}2$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $[x_0, y_0] = [3,4]$ při obecných přírůstcích neodvisle proměnných

c) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy}$, $[x_0, y_0] = [\sqrt{3},1]$, $dx = -0{,}1$, $dy = 0{,}4$

Řešení:

a) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$, $[x_0, y_0] = [1,1]$, $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}2$

$f_x = y + \frac{1}{y}$ $\qquad f_x(1,1) = 2$

$f_y = x - \frac{x}{y^2}$ $\qquad f_y(1,1) = 0$

$df = 2\cdot dx + 0\cdot dy = 2\cdot 0{,}1 = 0{,}2$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $[x_0, y_0] = [3,4]$ při obecných přírůstcích neodvisle proměnných

$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\qquad f_x(3,4) = \frac{3}{5}$

$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\qquad f_y(3,4) = \frac{4}{5}$

$df = 0{,}6\cdot dx + 0{,}8\cdot dy$

c) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$, $[x_0,y_0]=[\sqrt{3},1]$, $dx=-0{,}1$, $dy=0{,}4$

$$f_x=\frac{1}{1+\dfrac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}}\cdot\frac{1\cdot(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}=\frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2}=$$

$$=\frac{1+y^2}{1+y^2+x^2(1+y^2)}=\frac{1+y^2}{(1+y^2)(1+x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$

vzhledem k „symetričnosti“ funkce dostaneme parciální derivaci podle y prostou záměnou proměnných, tedy

$$f_y=\frac{1}{1+y^2} \qquad f_x(\sqrt{3},1)=\frac{1}{4} \quad , \quad f_y(\sqrt{3},1)=\frac{1}{2}$$

$$df=\frac{1}{4}\cdot(-0{,}1)+\frac{1}{2}\cdot 0{,}04=-0{,}025+0{,}02=-0{,}005$$

2. Pomocí totálního diferenciálu vhodné funkce ve vhodném bodě vypočtěte přibližně:

a) $1{,}04^{2{,}02}$ **b)** $\sqrt{(2{,}98)^2+(4{,}05)^2}$

Řešení:

a) $1{,}04^{2{,}02}$

K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f(x,y)=x^y$ v bodě $[x_0,y_0]=[1,2]$ při přírůstcích neodvisle proměnných $dx = 0{,}04$, $dy=0{,}02$.

$f_x=yx^{y-1}$ $\qquad f_x(1,2)=2$

$f_y=x^y\cdot\ln x$ $\qquad f_y(1,2)=0$

$df(1,2)=2\cdot dx+0\cdot dy=2.0{,}04=0{,}08$

$1{,}04^{2{,}02}=f(1{,}04;2{,}02)\doteq f(1,2)+df(1,2)=1+0{,}08=1{,}08$

b) $\sqrt{(2{,}98)^2+(4{,}05)^2}$

K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $[x_0,y_0]=[3,4]$ při přírůstcích neodvisle proměnných $dx = -0{,}02$, $dy=0{,}05$.

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f_x(3,4)=\frac{3}{5} \qquad f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f_y(3,4)=\frac{4}{5}$$

$$df(3,4)=\frac{3}{5}\cdot(-0{,}02)+\frac{4}{5}\cdot 0{,}05=0{,}028$$

$$\sqrt{(2{,}98)^2+(4{,}05)^2}\doteq f(3,4)+df(3,4)=5+0{,}028=5{,}028$$

Taylorova věta.

Podobně jako u funkce jedné proměnné umožňuje Taylorova věta nahradit s jistou přesností v okolí určitého bodu danou funkci n proměnných polynomem n proměnných. Formulace věty viz DSO str. 290 – 293. Zde uvedeme Taylorovu větu pro funkci dvou proměnných.

Taylorova věta.

Nechť funkce f(x,y) má v bodě $[x_0, y_0]$ *a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu n+1 včetně. Pak pro každý bod tohoto okolí platí*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x-x_0)^{n-j}(y-y_0)^j + R_n(x,y) \ ,$$

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f(\xi,\eta)}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(x-x_0)^{n+1-j}(y-y_0)^j \ ,$$

kde ξ *leží mezi* x_0 *a x ,* η *leží mezi* y_0 *a y.*

Poznámky.

1. Při vyjádření funkce polynomem z předchozí věty mluvíme též o ***aproximaci funkce Taylorovým polynomem o středu*** $[x_0, y_0]$.

2. V Taylorově větě můžeme také psát $x - x_0 = dx$, $y - y_0 = dy$.

Příklady.

1. Určete Taylorův polynom 2. stupně se středem v bodě $[x_0, y_0] = [1,1]$ pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

Řešení:

Nejprve spočteme všechny potřebné parciální derivace.

$f_x = \dfrac{1}{y}$, $f_y = -\dfrac{x}{y^2}$, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = -\dfrac{1}{y^2}$, $f_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$ a jejich hodnoty v bodě [1,1]

$f_x(1,1) = 1$, $f_y(1,1) = -1$, $f_{xx}(1,1) = 0$, $f_{xy}(1,1) = -1$, $f_{yy}(1,1) = 2$

Pro vyjádření zbytku potřebujeme ještě třetí parciální derivace.

$f_{xxx} = 0$, $f_{xxy} = 0$, $f_{xyy} = \dfrac{2}{y^3}$, $f_{yyy} = -\dfrac{6x}{y^4}$

$$f(x,y) = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + f_{yy}(1,1)(y-1)^2\right] + R_2$$

$$= 1 + (x-1) - (y-1) - (x-1)(y-1) + (y-1)^2 + R_2(x,y)$$

$$R_2(x,y) = \frac{1}{6}\left[\frac{6}{\eta^3}(x-1)(y-1)^2 - \frac{6\xi}{\eta^4}(y-1)^3\right] = \frac{1}{\eta^3}(x-1)(y-1)^2 - \frac{\xi}{\eta^4}(y-1)^3 \quad \text{, kde}$$

ξ leží mezi 1 a x , η leží mezi 1 a y

2. Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně vypočtěte přibližně $\operatorname{arctg}\dfrac{1{,}04}{0{,}98}$.

Řešení:

Napíšeme Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $[x_0,y_0]=[1,1]$,

$x-x_0=dx=0{,}04$, $y-y_0=dy=-0{,}02$.

Nejprve spočteme potřebné parciální derivace. Tvar zbytku vyjadřovat nebudeme.

$$f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

$$f_x(x,y)=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2} \qquad f_y(x,y)=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\div\frac{-x}{y^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}(x,y)=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad f_{yy}(x,y)=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Nyní vypočteme hodnoty parciálních derivací v bodě [1,1] .

$$f(1,1)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4} \quad f_x(1,1)=\frac{1}{2} \quad f_y(1,1)=-\frac{1}{2} \quad f_{xx}(1,1)=-\frac{1}{2} \quad f_{xy}(1,1)=0 \quad f_{yy}(1,1)=\frac{1}{2}$$

Podle Taylorovy věty dostáváme:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\doteq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy-\frac{1}{4}(dx)^2+\frac{1}{4}(dy)^2$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1{,}04}{0{,}98}\doteq\frac{\pi}{4}+0{,}02+0{,}01-0{,}0004+0{,}0001=\frac{\pi}{4}+0{,}0297=0{,}815098$$

3.Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně vypočtěte přibližně $e^{-0{,}1}\operatorname{tg}(0{,}01)$.

Řešení:

Volíme $f(x,y)=e^x\operatorname{tg}y$, $[x_0,y_0]=[0,0]$, $dx=-0{,}1$, $dy=0{,}01$

Spočteme potřebné parciální derivace :

$$f_x=e^x\operatorname{tg}y \ , \ f_y=\frac{e^x}{\cos^2 y} \ , \ f_{xx}=e^x\operatorname{tg}y \ , \ f_{xy}=\frac{e^x}{\cos^2 y} \ , \ f_{yy}=\frac{2e^x\sin y}{\cos^3 y}$$

$$f(0,0)=0 \ , \ f_x(0,0)=0 \ , \ f_y(0,0)=1 \ , \ f_{xx}(0,0)=0 \ , \ f_{xy}(0,0)=1 \ , \ f_{yy}(0,0)=0$$

$$f(x,y)\doteq f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(dx)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)dxdy+f_{yy}(x_0,y_0)(dy)^2\right]$$

a dosazením dostaneme

$$e^{-0{,}1}\operatorname{tg}(0{,}01) = 1\cdot 0{,}01+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1(-0{,}1)\cdot 0{,}01=0{,}009$$

Lokální a globální extrémy.

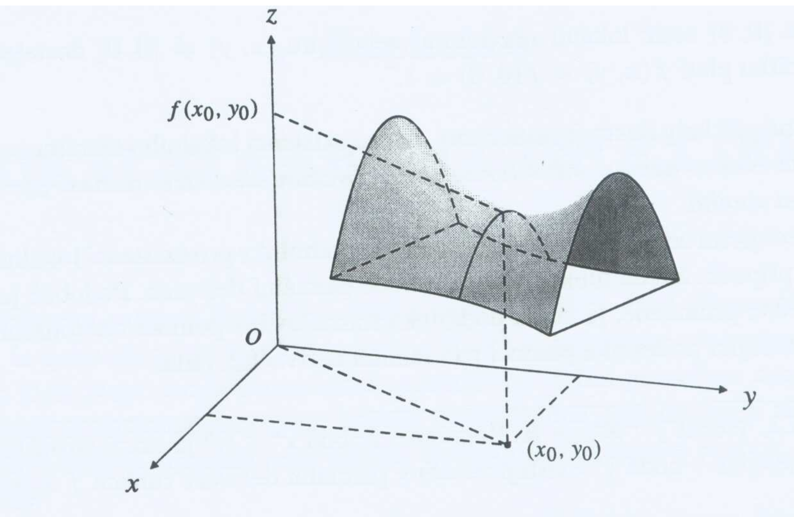
Vyšetřování extrémů je jednou z nejdůležitějších částí diferenciálního počtu. Je tomu tak proto, že v každodenním životě se setkáváme s řešením extremálních úloh. Např. ekonomická rozhodování se řídí pravidlem minimalizace nákladů a maximalizace zisku.
Uvedeme zde jen definici a nejdůležitější věty o extrémech. Podrobněji viz DSO str. 293-298.

Definice.
Řekneme, že funkce $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ nabývá v bodě $x^* \in \mathbf{R}^n$ ***lokálního maxima*** [respektive ***lokálního minima***] , jestliže existuje okolí U bodu x^* takové, že pro každé $x \in U$ platí $f(x) \le f(x^*)$ [respektive $f(x) \ge f(x^*)$. Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $x \ne x^*$ ostré, mluvíme o ***ostrých lokálních maximech a minimech*** nebo též o ***vlastních lokálních maximech a minimech.*** Společný název pro lokální maxima a minima je ***lokální extrémy.***

Definice.
Nechť je dána funkce $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Řekneme , že bod $x^* \in \mathbf{R}^n$ je ***stacionární bod funkce f*** jestliže v bodě x^* existují všechny parciální derivace prvního řádu a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \ , \ i = 1,2,...,n \ .$$

Věta.
Nechť funkce $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *má v bodě* $x^* \in \mathbf{R}^n$ *lokální extrém. Pak všechny parciální derivace, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.*
Poznámka.
Funkce může mít lokální extrém pouze ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.



Stacionární bod může, ale nemusí být bodem lokálního extrému. Na vedlejším obrázku je znázorněn graf funkce, která má v bodě $[x_0, y_0]$ stacionární bod, avšak lokální extrém zde nemá. Takový bod se nazývá ***sedlo.***

Věta.
Nechť funkce $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť* $[x_0, y_0]$ *je její stacionární bod.*
Jestliže

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0 \ ,$$

pak má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ *ostrý lokální extrém. Je-li přitom* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ *jde o minimum, je-li* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ *, jde o maximum.*
Jestliže $\Delta(x_0, y_0) < 0$*, pak v bodě* $[x_0, y_0]$ *lokální extrém nenastává.*
Je-li $\Delta(x_0, y_0) = 0$*, nelze touto metodou o existenci lokálního extrému rozhodnout.*

Poznámka.
Věta , udávající postačující podmínku pro existenci lokálního extrému funkce n proměnných, $n \geq 3$ viz DSO str. 297. Zde příslušnou větu zformulujeme pro funkci tří proměnných.

Věta.
Nechť funkce f(x,y,z) je definována na oblasti Ω *a nechť bod* $[x_0, y_0, z_0]$ *je stacionárním bodem funkce f. Nechť v jistém okolí bodu* $[x_0, y_0, z_0]$ *má funkce f spojité všechny parciální derivace druhého řádu.*
Položme $D_1(x,y,z) = f_{xx}(x,y,z)$, $D_2(x,y,z) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) \\ f_{xy}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) \end{vmatrix}$,

$$D_3(x,y,z) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{xy}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{xz}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{vmatrix} .$$

Je-li $D_1(x_0, y_0, z_0) > 0$, $D_2(x_0, y_0, z_0) > 0$, $D_3(x_0, y_0, z_0) > 0$ *má funkce f v bodě* $[x_0, y_0, z_0]$ *ostré lokální minimum.*
Je-li $D_1(x_0, y_0, z_0) < 0$, $D_2(x_0, y_0, z_0) > 0$, $D_3(x_0, y_0, z_0) < 0$ *má funkce f v bodě* $[x_0, y_0, z_0]$ *ostré lokální maximum.*

Definice.
Nechť je dána funkce $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\mathbf{M} \subset \mathbf{D}(f)$ Řekneme , že bod $x^* \in \mathbf{M}$ je bodem ***absolutního maxima*** [respektive ***absolutního minima***] ***funkce f na množině M*** , jestliže pro každé $x \in \mathbf{M}$ platí $f(x^*) \leq f(x)$ [respektive $f(x^*) \geq f(x)$]. Jsou-li tyto nerovnosti pro $x \neq x^*$ ostré, mluvíme o ***ostrých absolutních extrémech.*** Místo termínu absolutní extrém se též používá termín ***globální extrém.***

Věta.
Nechť $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^n$ *je uzavřená a ohraničená množina a funkce* $f : \mathbf{M} \to \mathbf{R}$ *je spojitá na **M**. Pak f nabývá svých absolutních extrémů (na množině **M**) buď v bodech lokálního extrému, které leží uvnitř **M** nebo v některém hraničním bodě množiny **M**.*

Poznámka.
Při vyšetřování absolutních extrému tedy nejprve vyšetříme lokální extrémy, vybereme z nich ty, které lží uvnitř množiny M. Potom vyšetříme chování funkce v hraničních bodech . V případě funkce dvou proměnných je často hranice tvořena grafem nějakých funkcí jedné proměnné a vyšetřit funkci na hranici znamená dosadit do funkce rovnici křivky, která tvoří část hranice. Tím je hledání extrémů na hranici množiny M převedeno na hledání extrémů funkce jedné proměnné.

Příklady.

1. Určete lokální extrémy funkce

a) $f(x,y)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+4xy+y^2$ **b)** $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$

c) $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$

Řešení:

Nejprve spočítáme první parciální derivace a najdeme stacionární body:

$f_x=x^3-2x^2+4y=0$

$f_y=4x+2y=0 \qquad \Rightarrow \quad y=-2x$

a dosazením do první rovnice dostaneme: $x^3-2x^2-8x=0$

$$x\left(x^2-2x-8\right)=0$$

$$x(x-4)(x+2)=0$$

Stacionární body jsou $[0,0]$, $[4,-8]$, $[-2,4]$.

Nyní spočítáme druhé parciální derivace:

$f_{xx}=3x^2-4x \quad f_{yy}=2 \quad f_{xy}=4$

a zjistíme, ve kterých stacionárních bodech nastanou lokální extrémy a jaké

	$[0,0]$	$[4,-8]$	$[-2,4]$
f_{xx}	0	32	20
f_{yy}	2	2	2
f_{xy}	4	4	4
Δ	-4	48	24

V bodě $[0,0]$ funkce nemá lokální extrém – je zde sedlový bod.

$f(4,-8)=-\frac{128}{3}$ je ostré lokální minimum

$f(-2,4)=-\frac{20}{3}$ je ostré lokální minimum

b) $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$

Definiční obor je $x>0$, $y>0$

Nyní spočítáme první parciální derivace a najdeme stacionární body:

$f_x=2x+y-\frac{4}{x}=0 \qquad \Rightarrow \quad y=\frac{4}{x}-2x=\frac{4-2x^2}{x}$ a dosazením do druhé rovnice

$f_y=x+2y-\frac{10}{y}=0$ dostaneme $x+\frac{8-4x^2}{x}=\frac{10x}{4-2x^2}\ \Big|\cdot x\left(4-2x^2\right)\neq 0$

$$4x^2-2x^4+2\left(4-2x^2\right)^2=10x^2$$

$$-6x^2-2x^4+32-32x^2+8x^4=0$$

$$3x^4-19x^2+16=0$$

$\left(x_{1,2}\right)^2=\frac{19\pm\sqrt{361-192}}{6} \quad \Rightarrow \quad x_1^2=\frac{16}{3}$, $x_2^2=1$ a za podmínek $x>0$, $y>$ 0 odtud

dostáváme $x_1=\frac{4}{\sqrt{3}}$ a odtud $y_1=\sqrt{3}-\frac{8}{\sqrt{3}}=-\frac{5}{\sqrt{3}}<0$ - nevyhovuje podmínce $y>0$

a dále $x_2 = 1$ a odtud $y_2 = 4 - 2 = 2$
Jediný stacionární bod je bod [1,2].

Spočítáme druhé parciální derivace a zjistíme, zda ve stacionárním bodě nastane lokální extrém.

$f_{xx} = 2 + \dfrac{4}{x^2}$ $\quad f_{xx}(1,2) = 6 > 0$

$f_{yy} = 2 + \dfrac{10}{y^2}$ $\quad f_{yy}(1,2) = 4{,}5$ $\quad \Delta(1,2) = 6 \cdot 4{,}5 - 1^2 = 26 > 0$

$f_{xy} = 1$ $\quad f_{xy}(1,2) = 1$

$f(1,2) = 7 - 10 \cdot \ln 2$ je ostré lokální minimum

c) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

Nejprve spočítáme první parciální derivace a určíme stacionární body:

$f_x = 3x^2 + 12y = 0$

$f_y = 2y + 12x = 0$

$f_z = 2z + 2 = 0$

$z = -1$, $\quad y = -6x$, $\quad 3x^2 - 72x = 0$

$3x(x - 24) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 24 \Rightarrow y_1 = 0$, $y_2 = -144$

Stacionární body jsou $[0,0,-1]$ a $[24,-144,-1]$
Druhé parciální derivace jsou

$f_{xx} = 6x$ $\quad f_{xy} = 12$ $\quad f_{xz} = 0$

$f_{xy} = 12$ $\quad f_{yy} = 2$ $\quad f_{yz} = 0$

$f_{xz} = 0$ $\quad f_{yz} = 0$ $\quad f_{zz} = 2$

$$D_1(x,y,z) = 6x \qquad D_2(x,y,z) = \begin{vmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 144 \qquad D_3(x,y,z) = \begin{vmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24x - 288$$

	[0,0,-1]	[24,-144,-1]
D_1	0	144
D_2	-144	144
D_3	-288	288

V bodě [0,0,-1] nemá funkce lokální extrém.
V bodě [24,-144,-1] má funkce ostré lokální minimum.

2. Určete absolutní extrémy funkce

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ v kruhu $x^2 + y^2 \le 4$

b) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ v obdélníku $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

Řešení:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ v kruhu $x^2 + y^2 \le 4$

Nejprve určíme lokální extrémy:

$f_x = 2x = 0 \quad f_y = -2y = 0$ jediný stacionární bod [0,0] leží v daném kruhu

Druhé parciální derivace jsou: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 0$

$\Delta(x, y) = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$ a ve stacionárním bodě lokální extrém nenastane.

Absolutní extrémy nastanou na hranici.

Hranice je kružnice $x^2 + y^2 = 4$, tedy $y^2 = 4 - x^2$ a dosazením do f(x,y) obdržíme funkci jedné proměnné: $g(x) = x^2 - 4 + x^2 = 2x^2 - 4$, $x \in < -2,2 >$ a hledáme nejprve lokální extrémy funkce g(x)

$g'(x) = 4x = 0$, $g''(x) = 4 > 0$ a funkce g(x) má v bodě 0 lokální minimum $g(0) = -4$

v krajních bodech intervalu dostáváme g(-2) = g(2) = 4

Je-li x = 0, je y = ± 2 . Je-li x = ± 2 , je y = 0.

Tedy celkem $f(2,0) = f(-2,0) = 4$ jsou absolutní maxima, f(0,-2) = f(0,2) = -4 jsou absolutní minima.

b) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ v obdélníku $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

Nejprve určíme lokální extrémy:

$f_x = 2x + 2y - 4 = 0$

$f_y = 2x + 8 = 0$

x = -4 , y = 6 Jediný stacionární bod [-4,6] neleží v daném obdélníku.

Absolutní extrémy nastanou na hranici.

α) $x = 0$, $y \in < 0,2 >$ f(0,y) = g(y) = 8y , $g'(y) = 8 \ne 0$ funkce nemá lokální extrém,

g(0) = f(0,0) = 0 , g(2) = f(0,2) = 16 jsou hodnoty v krajních bodech intervalu

β) $y = 0$, $x \in (0,1>$ f(x,0) = g(x) = $x^2 - 4x$, $g'(x) = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 2 \notin (0,1>$

g(1) = f(1,0) = -3 je hodnota v krajnim bodě intervalu

γ) $x = 1$, $y \in (0,2>$ f(1,y) = g(y) = 10y – 3 , $g'(y) = 10 \ne 0$ lok. extrém není

g(2) = f(1,2) = 17 je hodnota v krajním bodě intervalu

δ) $y = 2$, $x \in (0,1)$ f(x,2) = g(x) = $x^2 + 16$, $g'(x) = 2x = 0$ což je krajní bod intervalu - viz α)

Ze všech zjištěných hodnot najdeme nejmenší a největší a zjistíme, že

f(1,2) = 17 je absolutní maximum , f(1,0) = -3 je absolutní minimum