Informace o písemné části zkoušky.
platí pro skupinu tutora RNDr. Mikoláše

témata na písemku**:**

- limity funkce jedné reálné proměnné
- tečny a normály ke grafu funkce jedné reálné proměnné
- průběh funkce jedné reálné proměnné
- diferenciál funkce jedné proměnné a jeho použití
- neurčitý integrál , metoda per partes a substituce
- určitý integrál a nevlastní integrál
- definiční obor funkce dvou proměnných
- extrémy funkce dvou proměnných
- totální diferenciál funkce dvou proměnných a jeho použití

Písemka bude trvat 90 minut a bude mít šest příkladů. Každý příklad bude hodnocen maximálně 10 body.
Od bodového zisku se bude odvíjet návrh známky takto:

<0,30)	<30,35)	<35,40)	<40,45)	<45,50)	<50,60>
F	E	D	C	B	A

Ústní zkouškou je možno si navrženou klasifikaci zlepšit, ale i zhoršit.
Minimální počet bodů, nutný k vykonání ústní zkoušky je 25.

Diferenciál funkce.

Definice.

Nechť funkce f(x) je spojitá v okolí U bodu x_0 a nechť existuje derivace $f'(x_0)$.
Potom výraz

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot h \quad , \text{ kde } \quad h \in \mathbf{R} \text{ je proměnná}$$

nazýváme ***diferenciálem funkce f(x)*** v bodě x_0 .

Poznámka.

Pro různé hodnoty h dostáváme různé hodnoty diferenciálu $df(x_0)$. Diferenciál je tedy funkcí proměnné h. Jestliže místo pevného bodu x_0 uvažujeme obecný bod x, v němž existuje derivace $f'(x)$, závisí df(x) nejen na h, ale také na x. Zvolme f(x) = x. Pak je df(x) =1.h, tedy dx = h.
Proto můžeme h, což je přírůstek neodvisle proměnné považovat za diferenciál dx proměnné x.
Vzhledem k tomu píšeme obvykle diferenciál funkce y = f{x} v obecném bodě ve tvaru

$$df(x) = dy = f'(x) \cdot dx$$

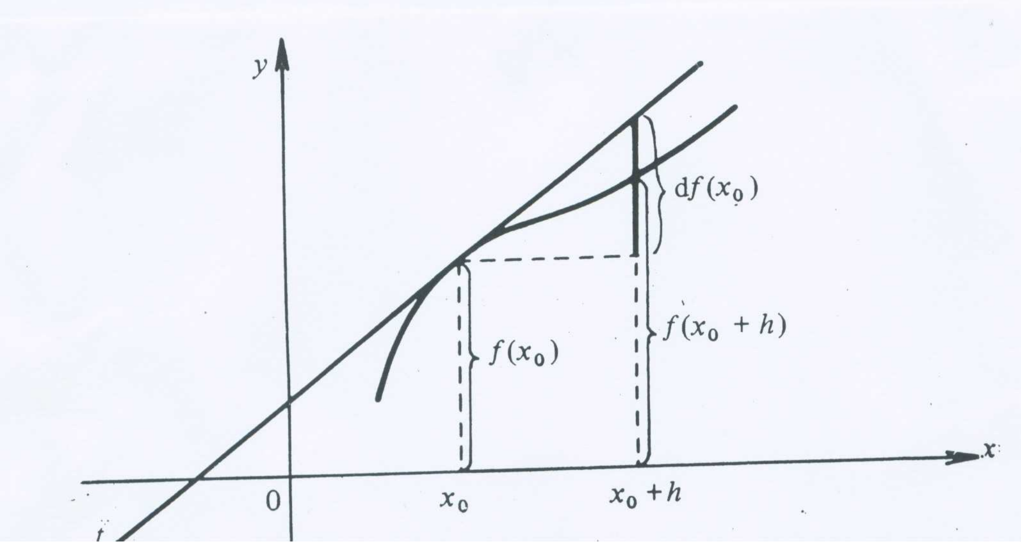
Odtud plyne

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad .$$

Proto můžeme derivaci $f'(x)$ považovat za podíl diferenciálu funkce f(x) a diferenciálu neodvisle proměnné x.

Geometrický význam diferenciálu.

Rovnice tečny ke grafu funkce y = f{x) v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$ má tvar
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Položíme-li $x - x_0 = h$, dostaneme odtud
$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h = df(x_0)$. Diferenciál je tedy přírůstek na tečně, sestrojené v bodě T při přechodu z bodu x_0 do bodu $x_0 + h$.



Označíme-li $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ přírůstek fukce v bodě x_0 a $df(x_0)$ diferenciál funkce f(x) v bodě x_0, je

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{df(x_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{hf'(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{1}{f'(x_0)}\cdot f'(x_0) = 1$$

Proto můžeme pro dostatečně malá $|h|$ klást $\Delta f(x_0) \doteq df(x_0)$.

Platí tedy $f(x_0+h) = f(x_0) + \Delta f(x_0) \doteq f(x_0) + df(x_0)$. Tohoto vztahu využíváme k přibližnému výpočtu funkčních hodnot funkce f(x).

Příklady.

1. Vypočtěte diferenciál funkce $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ v bodě $x_0 = 1$ při přírůstku neodvisle proměnné dx = 0,01.

Nejprve vypočteme derivaci funkce f(x):

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1-\frac{1}{2}\ln x}{x\sqrt{x}}$$ a její hodnotu v bodě $x_0 = 1$

$f'(1) = 1$

Poté spočítáme diferenciál df(1) = $f'(1)\cdot dx = 1\cdot 0{,}01 = 0{,}01$

2. Vypočítejte diferenciál funkce f(x) = $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)$ v obecném bodě.

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)} = -\frac{1}{2\sin\left(\pi-\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$df(x) = -\frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx$$

3. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně $\cos 61^\circ$.

K výpočtu zvolíme funkci $f(x) = \cos x$ a její diferenciál v bodě $x_0 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

Úhly musíme při výpočtech vyjadřovat v obloukové míře.

Přírůstek neodvisle proměnné je $dx = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$.

$$f'(x) = -\sin x \quad , \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 61^\circ \doteq \cos 60^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}866602\cdot 0{,}01745 = 0{,}484877795$$

4. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně $\sqrt{\dfrac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$.

Pro výpočet zvolíme funkci $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+5}}$ a její diferenciál v bodě $x_0=2$ při přírůstku neodvisle proměnné dx = 0,37 .

Nejprve spočteme funkční hodnotu f(2) = $\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{3}$ a potom derivaci

$$f'(x)=\left[\left(\frac{x^2-3}{x^2+5}\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-3}{x^2+5}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2x\left(x^2+5\right)-2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+5\right)^2}=\frac{8x}{\left(x^2+5\right)^2}\sqrt{\frac{x^2+5}{x^2-3}}$$

$$f'(2)=\frac{16}{81}\cdot\sqrt{\frac{9}{1}}=\frac{16}{27}$$

$$\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}=.f(2{,}037)\doteq f(2)+df(2)=\frac{1}{3}+\frac{16}{27}\cdot 0{,}037=0{,}333333+0{,}021925=0{,}355259$$

Poznámka. Použití diferenciálu na řešení podobných úloh je sice v dnešní době archaismem, použitý vzorec ovšem neztrácí smysl, pokud neznáme analytické vyjádření funkce f(x) a hodnoty $f(x_0)$ a $f'(x_0)$ jsme získali například měřením.

Taylorova věta.

Užitím následující věty lze vyjádřit přírůstek funkce přesněji, než užitím diferenciálu.

Věta (Taylorova)
Nechť funkce f(x) *má v okolí bodu* x_0 *derivace až do řádu* n+1, *kde* $n\in\mathbf{N}$. *Pak pro všechna* x *z tohoto okolí platí:*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\ ,$$

$$\textit{kde}\quad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ ,$$

přičemž ϑ *je vhodné číslo, ležící mezi* x_0 *a* x. *Chyba* $R_n(x)$ *se nazývá zbytek a vzorec uvedený v této větě se nazývá Taylorův vzorec.*

Poznámka.
Je-li v předchozí větě $x_0=0$, nazývá se vzorec Maclaurinův a má tvar

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}}{n!}x^n+R_n(x)\ ,$$

kde $R_n(x)=\dfrac{f^{n+1}(\vartheta)}{(n+1)!}x^{n+1}$, kde ϑ je vhodné číslo mezi 0 a x .

Příklady.

1. Napište rozvoj funkce $f(x)=\sqrt{x}$ podle mocnin (x – 1) do třetího stupně a vyjádřete zbytek.

V tomto případě $x_0 = 1$ n = 3. Spočítáme hodnotu funkce a jejích prvních tří derivací v bodě 1. Pro tvar zbytku budeme potřebovat čtvrtou derivaci.

$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad f(1)=1$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad f'(1)=\frac{1}{2}$

$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ $\qquad f''(1)=-\frac{1}{4}$

$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ $\qquad f'''(1)=\frac{3}{8}$

$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{\frac{-7}{2}}$ $\qquad f^{(4)}(\vartheta)=-\frac{15}{16}\vartheta^{\frac{-7}{2}}$

$$f(x)=\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{16}+R_3(x) \quad \text{, kde}$$

$R_3(x)=-\frac{5}{128}\vartheta^{\frac{-7}{2}}(x-1)^4$, přičemž ϑ je vhodné číslo ležící mezi 1 a x.

2. Rozvojem vhodné funkce f(x) podle mocnin x až do pátého stupně vypočtěte přibližnou hodnotu $\sqrt{e}$.

V tomto případě použijeme Maclaurinův rozvoj funkce $f(x)=e^x$, n = 5, $x_0=0$.

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=f^{(4)}(x)=f^{(5)}(x)=f^{(6)}(x)=e^x$$

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=f^{(4)}(0)=f^{(5)}(0)=e^0=1,\ f^{(6)}(\vartheta)=e^{\vartheta}$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+R_5(x),$$

kde $R_5(x)=\frac{x^6}{6!}e^{\vartheta}$, kde ϑ je vhodné číslo mezi 0 a x.

Dosazením x = 0,5 dostaneme

$$\sqrt{e}=e^{0,5}=1+0,5+\frac{0,5^2}{2}+\frac{0,5^3}{6}+\frac{0,5^4}{24}+\frac{0,5^5}{120}+R_5(0,5)=1+0,5+0,125+0,02083+$$

$$+0,00260+0,00026+R_5(0,5)=1,64869+R_5(0,5)$$

Číslo ϑ leží mezi 0 a x = 0,5. Proto můžeme zbytek odhadnout takto:

$$R_5(0,5)=\frac{(0,5)^6}{6!}e^{\vartheta}\le\frac{(0,5)^6}{6!}e^{0,5}<\frac{(0,5)^6}{6!}\cdot 4^{0,5}=\frac{0,5^6}{720}\cdot 2=0,0000434$$

Při výpočtu $\sqrt{e}$ jsme se dopustili chyby menší než 0,0000217.

Posloupnosti.

Teoretické poznatky o posloupnostech viz DSO str. 14-37. Zde pouze stručně shrneme nejzákladnější pojmy.

Definice.
Nechť M je možina nějakých objektů. Každé zobrazení množiny **N** přirozených čísel do množiny M nazveme ***(nekonečnou) posloupností v M.*** Každé zobrazení množiny {1,2,…,n} do množiny M nazveme ***konečnou posloupností.*** Jestliže je M množina čísel, budeme mluvit o ***číselné posloupnosti.*** Prvky posloupnosti budeme značit a_n .

Poznámky.

1. Posloupnost lze psát jako $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nebo jako $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ popřípadě $\{a_n\}$.

2. V dalším se budeme zabývat pouze číselnými posloupnostmi, popřípadě posloupnostmi reálných funkcí.

3. Posloupnost, jejíž limita je rovna nule se nazývá ***nulová posloupnost.***

Definice.
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je ***shora ohraničená*** [respektive ***zdola ohraničená***], když existuje takové číslo K, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n \le K$ [respektive $a_n \ge K$].

Definice (vlastní limity).
Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu α a píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Definice (nevlastní limity).
Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu rovnou ∞ [respektive $-\infty$], píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ [respektive $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$] právě když ke každému číslu A existuje číslo $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n > A$ [respektive $a_n < A$]].

Definice.
Nechť $\{a_n\}$ je taková posloupnost reálných čísel,že platí $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le ...$
[respektive $a_1 < a_2 < ... < a_n < ...$] . Potom říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je ***neklesající*** [respektive ***rostoucí***].

Definice.
Nechť $\{a_n\}$ je taková posloupnost reálných čísel,že platí $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \ge ...$
[respektive $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$] . Potom říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je ***nerostoucí*** [respektive ***klesajícící***].

Pro limity posloupností platí řada tvrzení, z nichž zde připomeneme následující:

1. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*
2. *Má-li posloupnost vlastní limitu, pak je ohraničená.*
3. *Každá neklesající, shora ohraničená posloupnost má vlastní limitu.*
4. *Každá nerostoucí, zdola ohraničená posloupnost má vlastní limitu.*
5. *Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$. *Pak platí*

   $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$

   a je-li $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$ *platí* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ **.**

Ze střední školy znáte aritmetickou a geometrickou posloupnost. Nyní je připomeneme.

Definice (aritmetické posloupnosti).
Číselnou posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme ***aritmetickou***, jestliže existuje takové číslo d, zvané ***diference***, že

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{pro} \quad n = 1,2,\ldots \, .$$

Poznámky.

1. Aritmetická posloupnost je určena např. prvním členem a_1 a diferencí d.

2. Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti platí $s_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

3. Platí $a_n = a_1 + (n-1)d$.

4. Platí $a_r = a_s + (r-s)d$, kde a_r , a_s jsou libovolné členy posloupnosti $\{a_n\}$.

5. Pro $n \neq 1$ platí $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Definice (geometrické posloupnosti).
Číselnou posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme ***geometrickou***, jestliže existuje takové číslo q, zvané ***kvocient, že***

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \text{pro } n = 1,2,\ldots \, .$$

Poznámky.

1. Geometrická posloupnost je určena např. prvním členem a_1 a kvocientem q.

2. Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{pro} \quad q \neq 1 \, .$$

3. $a_n = a_1 q^{n-1}$ **.**

4. Platí $a_r = a_s q^{r-s}$, kde a_r , a_s jsou libovolné členy posloupnosti $\{a_n\}$.

5. Pro $n \neq 1$ platí $|a_n| = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$.

Příklady.

1. V aritmetické posloupnosti je dáno $a_4 = 0$, $a_6 = -4$, $s_n = 12.$ Určete n.

Řešení:

Ze vztahu $a_r = a_s + (r - s)d$ dostáváme $a_6 = a_4 + 2d$ to je -4 = 2d a tedy d = -2.

Dále platí $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ a $a_n = a_1 + (n-1)d$. Odtud dostaneme

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1)d]$$

a_1 vypočítáme ze vztahu $a_4 = a_1 + 3d$. Dosazením za a_4 a d dostaneme

$0 = a_1 + 3 \cdot (-2)$ tedy $a_1 = 6$

Dosazením do vztahu pro s_n dostaneme

$$12 = \frac{n}{2}(2 \cdot 6 - 2n + 2) \quad \Leftrightarrow \quad 24 = 12n - 2n^2 + 2n \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 - 14n + 24 = 0$$

Řešením této rovnice vyjde

$$n_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \quad , \quad n_1 = 4 \ , \ n_2 = 3$$

2. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, je-li

$a_1 - a_2 + a_3 = 15$ a $a_4 - a_5 + a_6 = 120$

Řešení:

Užitím vztahu $a_n = a_1 q^{n-1}$ dostáváme

$a_1 - a_1 q + a_1 q^2 = 15 \quad \wedge \quad a_1 q^3 - a_1 q^4 + a_1 q^5 = 120$

$a_1(1 - q + q^2) = 15 \quad \wedge \quad a_1 q^3 (1 - q + q^2) = 120$ a odtud

$\frac{a_1 q^3 (1 - q + q^2)}{a_1 (1 - q + q^2)} = \frac{120}{15} \quad \Leftrightarrow \quad q^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad q = 2$ a dosazení do první rovnice dává

$$a_1(1 - 2 + 2^2) = 15 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{15}{3} = 5$$

3. Připočteme-li k číslům 2, 7, 17 totéž číslo, vzniknou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete je,

Řešení:

Přičtené číslo označme x.

Hledané členy geometrické posloupnosti jsou 2+x , 7+x , 17+x.. Platí

$$\frac{17 + x}{7 + x} = \frac{7 + x}{2 + x} \quad \Big| \ .(2 + x)(7 + x)$$

$$(17 + x)(2 + x) = (7 + x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 19x + 34 = x^2 + 14x + 49 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

4. Spočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4}$.

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{1}{3}$$

5. Spočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + 1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

6. Spočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

Řešení:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(1 + 2 + \ldots + (n-1)\right) = \frac{1}{n^2}\,\frac{1 + (n-1)}{2}\cdot(n-1) = \frac{n-1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

.

7.Zkoumejte monotonii a ohraničenost posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n+9}{2n-1}$.

Řešení:

Posloupnost je rostoucí právě tehdy když platí $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}\cdot\frac{n+10}{2n+1}}{\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}} = \frac{n+10}{2n+1} \qquad ,$$

$$\frac{n+10}{2n+1} > 1 \iff n + 10 > 2n + 1 \iff n < 9$$

Posloupnost je pro $n < 9$ rostoucí, pro $n > 9$ klesající.

Shora je ohraničena číslem a_9 , zdola je ohraničena číslem 0 (neboť součin kladných čísel je vždy kladný).

Neurčitý integrál.

Definice.
Buď I otevřený interval a buďte F(x) , f(x) dvě funkce, definované v intervalu I. Nechť pro každé $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. Pak říkáme, že funkce F(x) je v intervalu I ***primitivní*** k funkci f(x).

Věta. *Pro primitivní funkci platí:*

1. *Buď F(x) funkce primitivní k funkci f(x) v intervalu I a nechť c je libovolné číslo. Pak funkce F(x) + c je také primitivní k funkci f(x) v intervalu I.*
2. *Buďte F(x), G(x) dvě funkce primitivní k funkci f(x) v intervalu U . Pak existuje číslo c tak, že G(x) = F(x) + c .*
3. *Buď f(x) funkce spojitá v intervalu I. Pak k ní v intervalu I existuje funkce primitivní.*

Definice.
Množinu všech funkcí primitivních v intervalu I k funkci f(x) nazýváme ***neurčitý integrál*** funkce f(x) v intervalu I a značíme $\int f(x)dx$. Píšeme $\int f(x)dx = F(x) + c$, $x \in I$.

Poznámka.

Funkci f(x) nazýváme ***integrandem,*** symbol $\int$ ***integračním znakem ,*** konstantu c ***integrační konstantou.*** Výkon, kterým určujeme neurčitý integrál F(x) + c k dané funkci f(x) nazýváme ***integrováním (integrací)*** funkce f(x)

Věta.
Buď I otevřený interval a nechť v něm existují neurčité integrály funkcí $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$.
Buďte $c_1, c_2, ..., c_n$ *čísla. Pak v intervalu I existuje také neurčitý integrál k funkci*
$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x)$ *a platí* $\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x)]dx =$

$$= c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + ... + c_n \int f_n(x)dx + c \ .$$

Na následující straně uvedeme v tabulce přehled vzorců, které plynou ze základních vzorců pro derivace.
Zde pro úsporu místa uvedeme větu o integraci per partes..

Věta (o integraci per partes)
Nechť funkce u(x), v(x) mají v otevřeném intervalu I spojité derivace $u'(x), v'(x)$.
Potom v intervalu I platí:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \ .$$

Poznámka.
Věta o integraci per partes plyne přímo z věty o derivaci součinu dvou funkcí.

$\int 0\,dx = c \quad$ pro $\quad x \in (-\infty, \infty)$

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c \quad$ pro $\; n \neq -1 \quad$ a $\quad x \in (-\infty, \infty),\; n \geq 0$ celé

nebo $\; x \in (0, \infty),\; n < 0$ celé

nebo $\; x \in (-\infty, 0),\; n < 0$ celé

nebo $\; x \in (0, \infty),\; n$ necelé

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad$ pro $\quad x \in (-\infty, 0)\quad$ nebo $\quad x \in (0, \infty)$

$\int e^x dx = e^x + c \quad$ pro $\quad x \in (-\infty, \infty)$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad$ pro $\quad x \in (-\infty, \infty)$

$\int \cos x\,dx = \sin x + c \quad$ pro $\quad x \in (-\infty, \infty)$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + c \quad$ pro x, pro něž je $\cos x \neq 0$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\,x + c \quad$ pro x, pro něž je $\sin x \neq 0$

$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \mathrm{arctg}\frac{x}{a} + c \quad$ pro $\; x \in (-\infty, \infty)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c \quad$ pro $\; x \in (-a, a)$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c \quad$ pro x, pro která existuje $f'(x)$ a pro něž je $f(x) \neq 0$

$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c \quad$ pro x, pro která existuje $f'(x)$ a pro něž je $f(x) > 0$

$\int f(x)dx = F(x) + c \quad \Rightarrow \quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$

Následující dva neurčité integrály se v dalším naučíme počítat, ale je velmi užitečné znát výsledek zpaměti:

$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + c \quad$ pro x, pro která je $\sin x \neq 0$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + c \quad$ pro x, pro která je $\left(x^2 + k\right) > 0$

Příklady.

V následujících příkladech vypočtěte neurčité integrály.

1. $\int\left(x^4+\sqrt{x}-\cos x+1\right)dx=\int x^4dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int\cos x\,dx+\int dx=\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\sin x+x+c$

2. $\int\left(\frac{3}{4+x^2}+\frac{5}{2x}-e^x\right)dx=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\ln|x|-e^x+c$

3. $\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx=\int\frac{x-1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx=\int(x-1)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}(x-1)^{\frac{1}{3}+1}+c=\frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}+c=\sqrt[3]{(x-1)^4}+c$

4. $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$

5. $\int\operatorname{tg}^2x\,dx=\int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx=\operatorname{tg}x-x+c$

6. $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}dx+\frac{1}{2}\int\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx=\int\frac{-\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)'}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}dx+$

$+\int\frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)'}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx=-\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\ln\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c=\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right|+c=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

7. $\int\frac{1+\cos^2x}{1+\cos(2x)}dx=\int\frac{1+\cos^2x}{1+\cos^2x-\sin^2x}dx=\int\frac{1+\cos^2x}{2\cos^2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2x}+\frac{1}{2}\int dx=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{x}{2}+c$

8. $\int\frac{3x+5}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{\left(\frac{3}{2}\right)(2x+2)+2}{x^2+2x+5}dx=\frac{3}{2}\int\frac{\left(x^2+2x+5\right)'}{x^2+2x+5}dx+2\int\frac{dx}{(x+1)^2+2^2}=$

$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+c=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)+\operatorname{artcg}\frac{x+1}{2}+c$

9. $\int\frac{x+3}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx=\int\frac{\frac{-1}{2}(-2x+4)+5}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{\left(5+4x-x^2\right)'}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx+5\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}=$

$=-\sqrt{5+4x-x^2}+5\arcsin\frac{x-2}{3}+c$

Následující příklady vypočtěte metodou per partes.

10. $\displaystyle\int \ln x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \dfrac{1}{x} & v = x \end{array}\right| = x\cdot\ln x - \int \frac{x}{x}\,dx = x\cdot\ln x - \int dx = x\cdot\ln\, -\, x\, +\, c$

11. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & v' = 1 \\ u' = \dfrac{1}{1+x^2} & v = x \end{array}\right| = x\cdot\operatorname{artcg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$

$$= x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$$

12. $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{x^2}\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = \ln(2x) & v' = \dfrac{1}{x^2} \\ u' = \dfrac{2}{2x} & v = \dfrac{-1}{x} \end{array}\right| = -\frac{\ln(2x)}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln(2x)}{x} - \frac{1}{x} + c = -\frac{1+\ln(2x)}{x} + c$

13. $\displaystyle\int x^2 e^{4x}\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = x^2 & v' = e^{4x} \\ u' = 2x & v = \dfrac{e^{4x}}{4} \end{array}\right| = \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{2}\int x e^{4x}\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = e^{4x} \\ u' = 1 & v = \dfrac{e^{4x}}{4} \end{array}\right| = \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{8}x e^{4x} +$

$$+\frac{1}{8}\int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{8}x e^{4x} + \frac{1}{32}e^{4x} + c$$

14. $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = e^{2x} & v' = \sin 3x \\ u' = 2e^{2x} & v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right| = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx =$

$$= \left|\begin{array}{ll} u = e^{2x} & v' = \cos 3x \\ u' = 2e^{2x} & v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right| = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx$$

porovnáním levé a pravé strany odtud dostaneme

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x \quad \text{a tedy}$$

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x\ +$$

15. $\displaystyle\int x\cdot\operatorname{arctg} x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = x & v = \operatorname{arctg} x \\ u = \dfrac{x^2}{2} & v' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}\right| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$$

Nyní přejdeme k výpočtu neurčitého integrálu metodou substituce. Přesné znění vět o substituci viz DSO str. 183 – 187. Nám se zde stačí omezit na dva způsoby, kterými obvykle větu o substituci používáme.

A. ***Substituce typu*** $\varphi(x) = t$ **.**

Pro zjednodušení výpočtu integrálu $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$, provedeme substituci $\varphi(x) = t$.

Přechodem k diferenciálu na obou stranách substituční rovnice obdržíme:

$\varphi'(x)dx = dt$ a dosazením do integrálu odtud plyne $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)\,dt$.

Ve výsledku na pravé straně pak píšeme $t = \varphi(x)$.

B. ***Substituce typu*** $x = g(t)$.

V některých případech je výhodnější použít substituce $x = g(t)$. Přechodem k diferenciálu dostaneme $dx = g'(t)dt$ a dosazením do integrálu odtud plyne $\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]g'(t)dt$.

Ve výsledku na pravé straně pak píšeme za t funkci inverzní k funkci g, tedy $t = g^{-1}(x)$.

Příklady.

16. $$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \left| \begin{matrix} 1+\ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$$

17. $$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}dx = \left| \begin{matrix} x^2+4 = t \\ 2xdx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+4)^2} + c$$

18. $$\int tg^4 x\,dx = \left| \begin{matrix} x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^4}{1+t^2}dt = \int \frac{t^4+t^2-t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{t^2(t^2+1)}{1+t^2}dt - \int \frac{t^2}{1+t^2}dt =$$
$$= \int t^2\,dt - \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt = \frac{1}{3}t^3 - \int dt + \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}t^3 - t + \operatorname{artcg} t + c =$$
$$= \frac{1}{3}tg^3 x - tg\,x + \operatorname{arctg}(tgx) + c = \frac{1}{3}tg^3 x - tg\,x + x + c$$

19. $$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^{2x}e^x}{e^{2x}+1}dx = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x\,dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \int dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt =$$
$$= t - \operatorname{arctg} t + c = e^x - \operatorname{arctg} e^x + c$$

20. $$\int \sqrt{1-\sin x}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \arcsin t \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{matrix} \right| = \int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}dt = \int (1+t)^{-\frac{1}{2}}dt = 2(1+t)^{\frac{1}{2}} + c =$$
$$= 2\sqrt{1+t} + c = 2\sqrt{1+\sin x} + c$$

Některé typy neurčitých integrálů.

V předchozích příkladech patrně největší potíže činilo určit vhodnou substituci. V dalším uvedeme některé typy integrálů, u nichž podle jejich tvaru lze přímo určit, která metoda či substituce je vhodná k jejich řešení.
Prvním z nich bude integrál z racionální funkce lomené.
Nejprve připomeneme některé poznatky o racionální funkci lomené (viz DSO A str. 96 a DSO B str. 190 – 200) a tedy i o polynomech.

Definice.
Buďte $a_0, a_1, ..., a_n$, $a_n \neq 0$ reálná čísla. Funkci $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ nazýváme ***polynom stupně n.*** Čísla $a_0, a_1, ..., a_n$ jsou ***koeficienty*** polynomu f(x). Koeficient a_0 se nazývá ***absolutní člen.*** Číslo α, pro které platí $f(\alpha) = 0$ se nazývá ***kořen polynomu***.

Poznámky..

1. Polynom stupně n často značíme $P_n(x)$ případně $Q_n(x)$ čímž zdůrazníme, že se jedná právě o polynom stupně n.
2. Je-li α kořen polynomu, pak existuje polynom g(x) takový, že platí $f(x) = (x - \alpha)g(x)$.
3. Je-li komplexní číslo $\alpha = a + ib$ kořenem polynomu f(x), je jeho kořenem i číslo komplexně sdružené $\overline{\alpha} = a - ib$.

Definice.
Řekneme, že číslo α je ***k-násobným kořenem*** polynomu f(x), právě když existuje polynom g(x) takový, že $f(x) = (x - \alpha)^k \cdot g(x)$ a $g(\alpha) \neq 0$.

Věta (o rozkladu polynomu v kořenové činitele).
Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* $n \geq 2$*, který má reálné kořeny* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ *s násobnostmi* $k_1, k_2, ..., k_r$ *a dvojice komplexně sdružených kořenů* $a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, ..., a_s \pm ib_s$ *s násobnostmi* $l_1, l_2, ..., l_s$*. Potom platí:*

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1} ... (x - \alpha_r)^{k_r} [(x - a_1)^2 + b_1^2]^{l_1} ... [(x - a_s)^2 + b_s^2]^{l_s}.$$

Toto vyjádření se nazývá ***rozklad na kořenové činitele.***

Definice (racionální funkce lomené).
Buďte $P_n(x)$, $Q_m(x)$ polynomy. Funkce $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ se nazývá ***racionální funkce lomená.***
Je-li m > n, nazývá se funkce R(x) ***ryze lomená***, je-li $m \leq n$ nazývá se R(x) ***neryze lomená.***

Poznámky.

1. Obvykle budeme předpokládat, že polynomy v čitateli a ve jmenovateli nemají společné kořeny.
2. Každá neryze lomená racionální funkce se dá vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce (provedením dělení).
3. Abychom dokázali racionální funkci lomenou integrovat, musíme ji převést tvar, který je pro integraci jednodušší. Jedná se o rozklad parciální zlomky.

Úplné znění věty o rozkladu racionální fukce lomené v parciální zlomky viz DSO str.197-198.

Je-li dána ryze lomená racionální funkce $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, rozložíme nejprve jmenovatele $Q_m(x)$ v kořenové činitele. V rozkladu funkce R(x) na parciální zlomky odpovídá r-násobnému reálnému kořeni jmenovatele α_i součet r parciálních zlomků

$$\frac{A_1}{x-\alpha_i}+\frac{A_2}{(x-\alpha_i)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-\alpha_i)^r}$$

a každé dvojici s-násobných komplexně sdružených kořenů jmenovatele $a_j \pm ib_j$ odpovídá součet s parciálních zlomků:

$$\frac{B_1x+C_1}{(x-a_j)^2+b_1^2}+\frac{B_2x+C_2}{\left[(x-a_j)^2+b_1^2\right]^2}+\ldots+\frac{B_sx+C_s}{\left[(x-a_j)^2+b_1^2\right]^s}$$

Koeficienty $A_1,\ldots,A_r,B_1,C_1,\ldots,B_s,C_s$ jsou jednoznačně určeny a spočteme je metodou neurčitých koeficientů, kterou vysvětlíme na následujících příkladech.

Příklady.

V následujících příkladech rozložte racionální funkci lomenou v parciální zlomky.

21. $R(x)=\dfrac{2x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

Řešení: jmenovatel má pouze jednonásobné reálné kořeny, rozklad na parciální zlomky má proto tvar

$$\frac{2x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}\quad\Bigg|\cdot(x+1)(x+2)(x+3)$$

$$2x=A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2)$$

Dostali jsme rovnost dvou polynomů. Ta musí být splněna pro všechna čísla x, tedy i pro kořeny jmenovatele, což jsou čísla -1, -2, -3. Dosazením kořenů jmenovatele do předchozí rovnosti obdržíme:

$x=-1:\quad -2=2A \quad\Leftrightarrow\quad A=-1$

$x=-2:\quad -4=-B \quad\Leftrightarrow\quad B=4$

$x=-3:\quad -6=2C \quad\Leftrightarrow\quad C=-3$

a rozklad funkce R(x) na parciální zlomky je

$$R(x)=-\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x+3}$$

22. $R(x)=\dfrac{2x^3+6x^2+x-2}{x^3(x-2)}$

Řešení: jmenovatel má jednonásobný reálný kořen 2 a trojnásobný reálný kořen 0. Rozklad na parciální zlomky má proto tvar

$$\frac{2x^3+6x^2+x-2}{x^3(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x^3}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x}\quad\Bigg|\cdot x^3(x-2)$$

$$2x^3+6x^2+x-2=Ax^3+B(x-2)+Cx(x-2)+Dx^2(x-2)=$$
$$=Ax^3+Bx-2B+Cx^2-2Cx+Dx^3-2Dx^2$$

dosazením kořenů jmenovatele dostaneme:

$x=0:\quad -2=-2B \quad\Leftrightarrow\quad B=1$

$x=2:\quad 40=8A \quad\Leftrightarrow\quad A=5$

protože jmenovatel nemá více kořenů, budeme dále postupovat meodou porovnání koeficientů u stejných mocnin x

u $x^3:\quad 2=A+D \quad\Rightarrow\quad D=2-A=2-5=-3$

u $x^2:\quad 6=C-2D \quad\Rightarrow\quad C=6+2D=6-6=0$

a rozklad R(x) na parciální zlomky je

$$R(x)=\frac{5}{x-2}+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x}$$

23. $R(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

Řešení: jmenovatel má jednonásobný reálný kořen 1. Kvadratický trojčlen x^2+x+1 nemá reálné kořeny a odpovídá v rozkladu jmenovatele na kořenové činitele dvojici jednonásobných komplexně sdružených kořenů. Rozklad R(x) na parciální zlomky má tvar:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\ \Bigg|\cdot(x-1)(x^2+x+1)$$

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)=Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

dosazením reálného kořene jmenovatele obdržíme

$x=1:\quad 1=3A \quad\Leftrightarrow\quad A=\dfrac{1}{3}$

a dále porovnáme koeficienty u stejných mocnin x:

$x^2:\quad 0=A+B \quad\Rightarrow\quad B=-A=-\dfrac{1}{3}$

$x^0:\quad 1=A-C \quad\Rightarrow\quad C=A-1=-\dfrac{2}{3}$

a rozklad R(x) na parciální zlomky je

$$R(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

A. Integrace racionální funkce lomené.

Racionální funkci neryze lomenou nejprve převedeme na součet polynomu a racionální funkce ryze lomené. Z věty o rozkladu ryze lomené racionální funkce je vidět, že půjde o integrály následujících typů:

I. $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^r} = \begin{cases} \dfrac{(x-\alpha)^{1-r}}{1-r} + c & \text{pro } r \neq 1 \\ \ln|x-\alpha| + c & \text{pro } r = 1 \end{cases}$$

II. $$\int \frac{Mx+N}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^s}\,dx = \begin{vmatrix} x-a = bt \\ dx = b\,dt \end{vmatrix} = \int \frac{At+B}{(t^2+1)^s}\,dt$$

Poslední integrál vede na dva typy:

1. $$\int \frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx = \begin{vmatrix} x^2+1 = t \\ 2x\,dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{1}{2t^n}\,dt$$

2. Integrál $K_n = \int \dfrac{dx}{(1+x^2)^n}$.

pro n=1 je zřejmě $K_1 = \int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$

pro $n \geq 1$ lze odvodit rekurentní vzorec

$$K_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot K_n$$

V následujícím příkladu si předvedeme odvození rekurentního vzorce pro případ n = 2.

Příklady.

24. Vypočtěte $K_2 = \int \dfrac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Víme, že $K_1 = \int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$ a budeme počítat K_1 metodou per partes:

$$K_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{vmatrix} u = \dfrac{1}{1+x^2} & v' = 1 \\ u' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} & v = x \end{vmatrix} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2K_1 - 2K_2$$

Porovnáním levé a pravé strany dostáváme

$$2K_2 = \frac{x}{1+x^2} + K_1$$

$$K_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$$

25. $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$

Jedná se o integrál z ryze lomené racionální funkce, jejíž rozklad na parciální zlomky jsme odvodili v př. 21 na str. 35. Tedy

$$\int \frac{2x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx = \int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x+3}\right)dx = -\ln|x+1| + 4\ln|x+2| - 3\ln|x+3| + c$$

$$= \ln\frac{(x+2)^4}{\left|(x+1)(x+3)^3\right|} + c$$

26. $\displaystyle\int \frac{2x^3+6x^2+x-2}{x^3(x-2)}\,dx$

Jedná se o integrál z ryze lomené racionální funkce, jejíž rozklad na parciální zlomky jsme odvodili v př. 22 na str. 35-36. Tedy

$$\int \frac{2x^3+6x^2+x-2}{x^3(x-2)}\,dx = \int\left(\frac{5}{x-2}+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x}\right)dx = 5\ln|x-2| - \frac{1}{2x^2} - 3\ln|x| + c =$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + \ln\frac{|x-2|^5}{|x|^3} + c$$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx$

Jedná se o integrál z ryze lomené racionální funkce, jejíž rozklad na parciální zlomky jsme odvodili v př. 23 na str. 36. Tedy

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

B. Integrály obsahující goniometrické funkce.

Poznámka. Racionální funkcí lomenou R(u,v) dvou proměnných budeme rozumět funkci s touto vlastností: považujeme-li v za konstantu, je tato funkce racionální lomenou funkcí proměnné u a považujeme-li u za konstantu, je tato funkce racionální lomenou funkcí proměnné v.

a) $\int \cos^m x \cdot \sin^n x \, dx$ **,** $m, n \geq 0$ jsou celá čísla

1. Je-li (m+n) sudé, užijeme vzorců

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad , \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

2. Je-li (m+n) liché, užijeme substituce

α) pro m liché $\sin x = t$

β) pro n liché $\cos x = t$

b) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, kde R je racionální funkce lomená dvou proměnných

Je-li

1. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ použijeme substituci $\cos x = t$.

2. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ použijeme substituci $\sin x = t$

3. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ použijeme substituci $\operatorname{tg} x = t$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad dx = \frac{1}{1+t^2}$$

4. v ostatních případech použijeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Příklady.

28. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$

s odkazem na **a)1.** užijeme uvedených vzorců a obdržíme

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2(2x)dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos(4x))dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin(4x) + c$$

29. $\int \cos^4 x \, dx$

opět s odkazem na **a)1.** užijeme uvedených vzorců a obdržíme

$$\int \cos^4 x \, dx \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x))dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\int (1+\cos(4x))dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin(4x) + c =$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + c$$

30. $\int \sin^5 x\, dx$

s odkazem na **a)2.β)** užijeme substituce $\cos x = t$

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x\, dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x\, dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{array} \right| = \int -\left(1-t^2\right)^2 dt =$$

$$= -\int (1-2t^2+t^4)\, dt = -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + c = -\cos t + \frac{2}{3}\cos^3 t - \frac{1}{5}\cos^5 t + c$$

31. $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2-1}{t^2} dt = \int \left(1-\frac{1}{t^2}\right) dt = t + \frac{1}{t} + c =$$

$= \cos x + \dfrac{1}{\cos x} + c$ **,** kde jsme použili substituce podle **b)1.**

32. $\int \dfrac{dx}{1+3\cos^2 x}$

s odkazem na **b)3.** a užijeme substituce $\operatorname{tg} x = t$

$$\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg} x = t & \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} & \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{3}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} + c$$

33. $\int \dfrac{\cos x}{1+\cos x} dx$

s odkazem na **b)4.** užijeme substituce $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} dt =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = -\int \frac{t^2+1-2}{1+t^2} dt = -\int \left(1-\frac{2}{1+t^2}\right) dt = -t - 2\operatorname{arctg} t + c =$$

$$= -\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + c = x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c$$

C. Některé další typy integrálů.

a) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ řešíme substitucí $x = a \cdot \sin t$

b) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$ řešíme substitucí $x = a \cdot \mathrm{tg}\, t$

c) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ řešíme substitucí $x = \dfrac{a}{\sin t}$

d) $\int R(e^x)\,dx$ řešíme substitucí $e^x = t$

Příklady.

34. $$\int \sqrt{3 - x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \sqrt{3}\sin t \\ dx = \sqrt{3}\cos t\,dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{3 - 3\sin^2 t}\sqrt{3}\cos t\,dt = \int \sqrt{3\cos^2 t}\sqrt{3}\cos t\,dt =$$

$$= \int 3\cos^2 t\,dt = \frac{3}{2}\int (1 + \cos(2t))dt = \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin(2t) + c = \frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

35. $$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}} = \left| \begin{matrix} x = 2\mathrm{tg}\,t \\ dx = \dfrac{2\,dt}{\cos^2 t} \end{matrix} \right| = \int \frac{2\,dt}{\sqrt{\left(4\,\mathrm{tg}^2 t + 4\right)^3}\cos^2 t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1\right)^3}\cos^2 t} =$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\dfrac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^3}\cos^2 t} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos^3 t}{\sqrt{1^3}\cos^2 t}dt = \frac{1}{4}\int \cos t\,dt = \frac{1}{4}\sin t + c =$$

$$= \frac{1}{4}\arcsin\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right) + c$$

36. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} = \left| \begin{matrix} x = \dfrac{1}{\sin t} \\ dx = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\dfrac{-\cos t}{\sin^2 t}}{\dfrac{1}{\sin^2 t}\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t} - 1}}dt = \int \frac{-\cos t}{\sqrt{\dfrac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t}}}dt = \int -\sin t\,dt =$$

$$= \cos t + c = \cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right) + c$$

37. $$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1}dx = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \mathrm{artcg}\, t + c = \mathrm{arctg}\, e^x + c$$

Určitý integrál.

V DSO na straně 218 – 236 je přesně definován Riemanův určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$.

Zde uvedeme jenom nejzákladnější poznatky a budeme se zabývat výpočtem určitého integrálu.

Poznámka.

Existuje-li Riemanův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, říkáme, že funkce f(x) je ***integrovatelná*** v intervalu <a,b>.

Věta.

Nechť $a, b \in \boldsymbol{R}$ *, a < b. Nechť f(x) je funkce spojitá na <a,b> a nechť F(x) je funkce primitivní k funkci f(x) na <a,b> a nechť je zde spojitá. Pro určitý integrál z funkce f(x) od a do b platí*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Poznámky.

1. Nechť funkce f(x) je omezená na intervalu *<a,b>* a je na něm spojitá s výjimkou konečného počtu bodů nespojitosti. Potom je na *<a,b>* integrovatelná.
2. Nechť $c_1, ..., c_{n+1} \in < a, b >$ taková čísla, že $a = c_1 < c_2 < ... < c_n < c_{n+1} = b$ a nechť f(x) je omezená na <a,b> a spojitá v každém intervalu (c_i, c_{i+1}), i = 1,2,…,n. Nechť $F_i(x)$ je primitivní k funkci f(x) na (c_i, c_{i+1}), i = 1,2,…,n a nechť je spojitá na $< c_i, c_{i+1} >$.

   Potom $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} (F_i(c_{i+1}) - F_i(c_i)).$$
3. Klademe $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ a je-li a < b, klademe $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ pokud integrál na pravé straně existuje.
4. Pokud je f(x) nezáporná integrovatelná funkce na <a,b>, potom P obsah obrazce, ohraničeného osou x, přímkami x = a a x = b a grafem funkce y = f(x) je roven

$$P = \int_a^b f(x)\,dx \ .$$

Věta (o integraci per partes).

Nechť funkce u(x), v(x) mají na intervalu <a,b> spojité derivace $u'(x), v'(x)$. *Potom platí*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx \ .$$

Věta (I. věta o substituci),

Nechť funkce f(x) je spojitá na intervalu $\langle A, B\rangle$. *Nechť funkce* $x=\varphi(t)$ *má na intervalu* $\langle \alpha,\beta\rangle$ *spojitou derivaci a nechť pro* $t\in\langle \alpha,\beta\rangle$ *je* $\varphi(t)\in\langle A,B\rangle$ *a* $\varphi(\alpha)=A$, $\varphi(\beta)=B$, *kde* $A\le a<b\le B$.
Potom platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Věta (II. věta o substituci).

Nechť funkce $x=\varphi(t)$ *má na intervalu* $\langle \alpha,\beta\rangle$ *spojitou derivaci a nechť k ní existuje inverzní funkce* $\varphi^{-1}(x)$ *na intervalu o koncových bodech* $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. *Potom platí*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\ .$$

Poznámka.

Tvrzení obou vět o substituci lze jednoduše shrnout takto: Pokud při výpočtu určitého integrálu použijeme substituci, můžeme transformovat meze, v nichž integrujeme a nemusíme se po výpočtu příslušné primitivní funkce vracet k původní proměnné.

Příklady.

1. $\displaystyle\int_2^5\frac{\mathrm{d}x}{3x-2}=\frac{1}{3}\big[\ln|3x-2|\big]_2^5=\frac{1}{3}(\ln 13-\ln 4)=\frac{1}{3}\ln\frac{13}{4}$

2. $\displaystyle\int_0^2\frac{x+3}{x^2+4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{2x}{x^2+4}\mathrm{d}x+3\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}=\frac{1}{2}\big[\ln(x^2+4)\big]_0^2+\frac{3}{2}\left[\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^2=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 4)+$
$\displaystyle+\frac{3}{2}(\mathrm{arctg}1-\mathrm{arctg}0)=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{8}\pi$

3. $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x+9}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\mathrm{arctg}\frac{x+\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\right]_1^2=\left[\frac{2}{\sqrt{11}}\mathrm{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}}\right]_1^2=$
$\displaystyle=\frac{2}{\sqrt{11}}\left(\mathrm{artcg}\frac{9}{\sqrt{11}}-\mathrm{artcg}\frac{7}{\sqrt{11}}\right)$

4. $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\big[x-\mathrm{arctg}x\big]_0^1=1-\frac{\pi}{4}$

5. $$\int_1^e x^2\ln^2 x\,dx = \left|\begin{matrix} u' = x^2 & v = \ln^2 x \\ u = \dfrac{x^3}{3} & v' = \dfrac{2\ln x}{x}\end{matrix}\right| = \left[\frac{x^3}{3}\ln^2 x\right]_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u' = x^2 & v = \ln x \\ u = \dfrac{x^3}{3} & v' = \dfrac{1}{x}\end{matrix}\right| =$$
$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e + \frac{2}{9}\int_1^e x^2\,dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{9}\cdot\frac{e^3}{3} + \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{9} + \frac{2e^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5e^3-2}{27}$$

6. $$\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^2 & v' = \cos x \\ u' = 2x & v = \sin x\end{matrix}\right| = \left[x^2\sin x\right]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x\end{matrix}\right| =$$
$$= 2\left[x\cos x\right]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi}\cos x\,dx = 4\pi - 2\left[\sin x\right]_0^{2\pi} = 4\pi$$

7. $$\int_1^2 (1-\ln x)^2\,dx = \left|\begin{matrix} u' = 1 & v = (1-\ln x)^2 \\ u = x & v' = \dfrac{2(1-\ln x)}{-x}\end{matrix}\right| = \left[x(1-\ln x)\right]_1^e + 2\int_1^e (1-\ln x)\,dx = -1 + 2\left[x\right]_1^e - 2\int_1^e \ln x =$$
$$= \left|\begin{matrix} u' = 1 & v = \ln x \\ u = x & v' = \dfrac{1}{x}\end{matrix}\right| = -1 + 2e - 2 - 2\left[x\ln x\,dx\right]_1^e + 2\int_1^e dx = -3 + 2e - 2e + 2\left[x\right]_1^e - 3 + 2e - 2 = 2e - 5$$

8. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} \sin x = t & \cos x\,dx = dt \\ x = 0 \;\Leftrightarrow & t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{4} \;\Leftrightarrow & t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right| = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^3\,dt = \frac{1}{4}\left[t^4\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{16} = \frac{1}{16}$$

9. $$\int_1^e \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}} = \left|\begin{matrix} \ln x = t & \dfrac{dx}{x} = dt \\ x = 1 \;\Leftrightarrow & t = 0 \\ x = e \;\Leftrightarrow & t = 1\end{matrix}\right| = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[\arcsin t\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

10. $$\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x = \sqrt{2}\sin t & dx = \sqrt{2}\cos t\,dt \\ x = 1 \;\Leftrightarrow & t = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \sqrt{2} \;\Leftrightarrow & t = \dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1-\sin^2 t)}\sqrt{2}\cos t\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,dt =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\,dt = \left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

11. $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\,dx = \left| \begin{array}{lcr} \operatorname{tg} x = t & x = \operatorname{arctg} t & dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} & \Leftrightarrow & t = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{3} & \Leftrightarrow & t = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{(1+t)^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(1+t)^2} = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{-2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

12. $$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{lcr} x = \operatorname{tg} t & t = \operatorname{artcg} x & dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ x = 1 & \Leftrightarrow & t = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \sqrt{3} & \Leftrightarrow & t = \dfrac{\pi}{3} \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\,dt = [\sin t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

13. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,dx = \left| \begin{array}{lcr} \operatorname{tg} x = t & x = \operatorname{arctg} t & dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ x = 0 & \Leftrightarrow & t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{4} & \Leftrightarrow & t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}\,dt = \int_0^1 \frac{t^3+t-t}{t^2+1}\,dt = \int_0^1 \frac{t\left(t^2+1\right)-t}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int_0^1 t\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln\left(t^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

Nevlastní integrál.

V definici určitého integrálu jsme předpokládali, že integrační meze jsou konečná čísla a integrovaná funkce je omezená. Nyní pojem integrálu rozšíříme i na neomezené intervaly a na neohraničené funkce.

Definice.

Nechť funkce f(x) je definovaná v intervalu $< a, \infty)$ a nechť pro každé $t > a$ existuje integrál $\int_a^t f(x)\,dx$.

Potom řekneme, že ***nevlastní integrál*** $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ***existuje (konverguje)*** právě tehdy, když existuje vlastní limita $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ a definujeme $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$. Jestliže tato limita neexistuje nebo je nevlastní, řekneme že ***nevlastní integrál neexistuje (diverguje).***

Poznámka. Analogicky se definuje nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\int\limits_{t}^{b} f(x)\,dx$.

Definice.
Nechť f(x) je funkce integrovatelná v každém omezeném intervalu (a,b) a nechť c je reálné číslo. Řekneme, že ***nevlastní integrál*** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ***konverguje*** právě tehdy, když existují oba nevlastní integrály $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ i $\int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,dx$. Potom definujeme $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,dx$. V opačném případě řekneme, že ***nevlastní integrál*** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ***neexistuje (diverguje).***

Poznámka.
Dá se ukázat, že existence ani hodnota výše definovaného nevlastního integrálu nezávisí na čísle c.

Definice.
Nechť f(x) je funkce integrovatelná v intervalu <a,x> pro každé $x \in (a,b)$ a neohraničená v bodě b.

Nechť existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to b^-}\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$. Pak definujeme ***nevlastní integrál (vlivem horní meze)*** vztahem $\int\limits_{a}^{b} f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to b^-}\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$.

Poznámka.
Analogicky se definuje nevlastní integrál (vlivem dolní meze) jako $\int\limits_{a}^{b} f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to a^+}\int\limits_{x}^{b} f(t)\,dt$.

Příklady.

14. $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \lim_{t\to\infty}\int\limits_{1}^{t} x^{-\frac{1}{5}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}\right]_1^t = \frac{5}{4}\lim_{t\to\infty}\left(t^{\frac{4}{5}}-1\right) = \infty$

15. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int\limits_{0}^{t} xe^{-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{lcl} x^2 = y & & dx = \frac{dy}{2} \\ x = 0 & \Leftrightarrow & y = 0 \\ x = t & \Leftrightarrow & y = t^2 \end{array}\right| = \lim_{t\to\infty}\int\limits_{0}^{t^2}\frac{1}{2}e^{-y}dy = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

16. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int\limits_{t}^{1}\ln x\,dx = \left|\begin{array}{c}\text{viz př. 10}\\ \text{str.32}\end{array}\right| = \lim_{t\to 0^+}\left[x\ln x - x\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left(-1+t-t\ln t\right) = -1+\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = -1$