

## Walshův postup

**C.M. Walsh** navrhl postup, kterým lze jakékoliv "klasické" indexní číslo převést na konstrukt, který bude zaručeně splňovat axiom záměny faktorů (F2). Stačí k tomu, abychom k libovolné dvojici cenového a kvantového indexního čísla  $P_{01}^*$ ,  $Q_{01}^*$  zavedli příslušné "**Walshovy modifikace**"  $P_{01}^{*W}$ ,  $Q_{01}^{*W}$  takto:

$$P_{01}^{*W} = \sqrt{\frac{P_{01}^* \cdot \sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{Q_{01}^* \cdot \sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

$$Q_{01}^{*W} = \sqrt{\frac{Q_{01}^* \cdot \sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{P_{01}^* \cdot \sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

**Ilustrace: Laspeyresovo indexní číslo** Vytvořme Walshovy modifikace  $P_{01}^{LW}$  a  $Q_{01}^{LW}$  výše zmíněnou úpravou. Po dosazení a vykrácení  $\sum p_i(0) \cdot q_i(0)$  dostaneme

$$P_{01}^{LW} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(1)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}} = \sqrt{P_{01}^L \cdot P_{01}^P} = P_{01}^F$$

a podobně pro kvantové  $Q_{01}^{LW}$

$$Q_{01}^{LW} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}} = \sqrt{Q_{01}^L \cdot Q_{01}^P} = Q_{01}^F$$

Dostaneme dvojici **Fisherových indexních čísel**  $P_{01}^F$ ,  $Q_{01}^F$ . Lze se přesvědčit, že k témuž výsledku dospějeme, pokud místo Laspeyresových vezmeme za výchozí **Paascheho indexní čísla**  $P_{01}^P$ ,  $Q_{01}^P$ .

**Poznámka 1** K dosažení platnosti testu (F2) bychom nemuseli operovat s podílem  $P_{01}^*/Q_{01}^*$ , nýbrž by stačilo vzít podíl jakýchkoliv dvou výrazů, které by byly interpretovatelné jako cenové a kvantové indexní číslo. Obecná volba

$$P_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)}} \quad Q_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{B_{01}}{A_{01}} \cdot \frac{\sum p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

zaručující splnění (F2) se obvykle ukáže jako nevhodná ve světle potřeby splnění jiných testů. Pro příklad lze uvést test proporzčnosti (F7), kde požadujeme, aby platilo

$$P_{01}^{cAB} = c, \text{ avšak obecně } P_{01}^{cAB} = \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \frac{\sum c \cdot p_i(0) q_i(1)}{\sum p_i(0) q_i(0)}} = \sqrt{c} \cdot \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \frac{\sum p_i(0) q_i(1)}{\sum p_i(0) q_i(0)}}$$

a ničím není zaručeno, že výraz v poslední odmocnině je aspoň blízký hodnotě  $\sqrt{c}$ .

U Walshem navrženého postupu naproti tomu dostáváme

$$P_{01}^{cW} = \sqrt{\frac{c \cdot \sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(1)}{Q_{01}^* \cdot \sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}} = c \cdot \sqrt{\frac{1 \cdot \sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(1)}{Q_{01}^* \cdot \sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

pokud  $P_{01}^*$  vyhovuje testu **(F7)**, což např. platí pro  $P_{01}^L$  nebo  $P_{01}^P$ , přičemž pravděpodobnost (aspoň přibližného) splnění toho, že výraz v odmocnině je roven 1, může být vysoká. Pokud za  $Q_{01}^*$  vezmeme  $Q_{01}^L$ , pak rovnost platí přesně.

### von Bortkiewiczova relace

Pruský matematik a ekonom **Ladislav Josefovich von Bortkiewicz** odvodil užitečnou strukturální relaci mezi Laspeyresovým a Paascheho indexním číslem, která může napomoci vzájemnému porovnání jejich číselných hodnot:

$$B = \frac{P_{01}^P}{P_{01}^L} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(1)}}{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}} = 1 + \frac{S_{p1}}{E_{p1}} \cdot \frac{S_{q1}}{E_{q1}} \cdot r_{\frac{p1}{p0}, \frac{q1}{q0}}$$

Přítomné symboly mají následující význam:

1)  $E_{\frac{p1}{p0}}$  označuje **vážený aritmetický průměr cenových poměrových změn**  $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$  s

vahami tvaru  $w_i = \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)}$ .  $E_{\frac{p1}{p0}}$  je tedy Laspeyresův cenový index  $P_{01}^L$ .

2)  $E_{\frac{q1}{q0}}$  označuje **vážený aritmetický průměr změn kvantit**  $\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$  s týmiž vahami,

tzn. tento výraz je Laspeyresovým kvantovým indexním číslem  $Q_{01}^L$ .

3)  $S_{\frac{p1}{p0}}$  označuje výběrovou **směrodatnou odchylku cenových poměrových změn**

$\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$  s vahami  $w_i = \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)}$  :  $S_{\frac{p1}{p2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i \left( \frac{p_i(1)}{p_i(0)} - P_{01}^L \right)^2}$

4)  $S_{\frac{q1}{q0}}$  vyjadřuje **směrodatnou odchylku změn kvantit**  $\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$  se stejnými vahami, tj.

$$S_{\frac{q1}{q2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i \left( \frac{q_i(1)}{q_i(0)} - Q_{01}^L \right)^2}$$

5) Výraz  $r_{\frac{p1}{p0}, \frac{q1}{q0}}$  značí **vážený párový korelační koeficient** mezi poměrově

vyjádřenými cenovými a kvantovými změnami. Formálně zapsáno:

$r_{\frac{p1}{p0}, \frac{q1}{q0}} = \frac{\text{cov}\left(\frac{p1}{p0}, \frac{q1}{q0}\right)}{S_{\frac{p1}{p0}} \cdot S_{\frac{q1}{q0}}}$ , přičemž **výraz pro váženou kovarianci** v čitateli zlomku je

$$\text{cov}\left(\frac{p_1}{p_0}, \frac{q_1}{q_0}\right) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - E \frac{p_1}{p_0}\right) \cdot \left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)} - E \frac{q_1}{q_0}\right)$$

**Poznámka 2** Podíl směrodatné odchylky a příslušné střední hodnoty je **variační koeficient**, takže dva výrazy v součinu pro B jsou **variačními koeficienty**  $V_{\frac{p_1}{p_0}}, V_{\frac{q_1}{q_0}}$ . Oba jsou zřejmě v důsledku kladných cen a nezáporných kvantit vždy nezáporné.

### Ověření platnosti Bortkiewiczova poměru

vyvodíme ze vztahů užívaných ve statistice. Prvním z nich je relace

$$(1) \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i\right) + \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})\right]$$

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{y} + \text{cov}(x, y)$$

která je obdobou výpočtového vzorce pro výběrový rozptyl  $\text{var } x = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ .

**ověření (1)** Rozvedením vztahu pro kovarianci dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \cdot \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})\right] &= \frac{1}{N} \cdot \left[\sum_{i=1}^N x_i y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^N y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^N x_i + N\bar{x}\bar{y}\right] = \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i\right) - \bar{x} \cdot \bar{y} - \bar{y} \cdot \bar{x} + \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i\right) - \bar{x} \cdot \bar{y} \end{aligned}$$

následně převedením  $x \cdot y$  na opačnou stranu získáme hledanou relaci.  $\square$ .

Analogicky bychom odvodili platnost obdobného vztahu pro vážené charakteristiky:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^N w_i x_i y_i = \left(\sum_{i=1}^N w_i x_i\right) \left(\sum_{i=1}^N w_i y_i\right) + \sum_{i=1}^N w_i \left(x_i - \sum_{i=1}^N w_i x_i\right) \left(y_i - \sum_{i=1}^N w_i y_i\right)$$

kde  $w_i, i = 1, 2, \dots, n$  jsou nezáporné váhy normované jedničkovým součtem:  $\sum w_i = 1$ .

Označíme-li

$$\bar{x}^w = \sum_{i=1}^N w_i \cdot x_i, \quad \bar{y}^w = \sum_{i=1}^N w_i \cdot y_i, \quad \text{cov}^w(x, y) = \sum_{i=1}^N w_i \left(x_i - \sum_{i=1}^N w_i x_i\right) \cdot \left(y_i - \sum_{i=1}^N w_i y_i\right)$$

můžeme předchozí výraz zapsat ve tvaru

$$(2^*) \quad \overline{xy^w} = \bar{x}^w \cdot \bar{y}^w + \text{cov}^w(x, y)$$

Identitu (2\*) dále upravíme tak, že ji vydělíme výrazem  $\bar{x}^w \cdot \bar{y}^w$ . Dostaneme

$$\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i}{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x} \cdot \bar{y}} + \frac{cov(x, y)}{\bar{x} \cdot \bar{y}} = 1 + \frac{cov(x, y)}{\bar{x} \cdot \bar{y}}$$

a druhý výraz pravé strany doplníme vložením směrodatných odchylek. Tím získáme vyjádření s variačními koeficienty veličin  $x_i$  a  $y_i$  a jejich korelační koeficient  $r_{xy}$ .

$$\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i}{\bar{x} \cdot \bar{y}} = 1 + \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot \frac{s_y}{\bar{y}} \cdot r_{xy}$$

Stejně bychom získali analogické vyjádření pro vážené veličiny  $\bar{x}^w, \bar{y}^w, s_x^w, s_y^w$  a  $r^w_{xy}$ , pokud by byly všechny vážené stejnými vahami  $w_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Vážená obdoba by vypadala následovně

$$\frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i y_i}{x^w \cdot y^w} = 1 + \frac{s_x^w}{x^w} \cdot \frac{s_y^w}{y^w} \cdot r^w_{xy}, \quad \text{kde máme}$$

$$\bar{x}^w = \sum_{i=1}^N w_i x_i, \quad \bar{y}^w = \sum_{i=1}^N w_i y_i, \quad s_x^w = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i (x_i - \bar{x}^w)^2}$$

$$s_y^w = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i (y_i - \bar{y}^w)^2}, \quad cov^w(x, y) = \sum_{i=1}^N w_i (x_i - \bar{x}^w)(y_i - \bar{y}^w)$$

s nějakým vektorem nezáporných a jedničkovým součtem normovaných vah  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ . Sledovaného cíle dosáhneme, ukážeme-li, že levá strana výrazu, může přejít vhodnou konkretizací veličin  $x_i, y_i$  a  $w_i, i = 1, 2, \dots, n$  ve **výraz vyjádřitelný jako podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla**.

Vyjádřeme tedy nejdříve podíl **Paascheho a Laspeyresova indexního čísla** jako:

$$(3) \quad \frac{P_{01}^P}{P_{01}^L} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(1)}}{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

Na základě předchozího a tvaru pravé strany **Bortkiewiczova poměru** vyšetříme, zda podíl zmíněných indexních čísel lze vyjádřit jako výraz korespondující se zápisem (3), jehož levá strana by měla podobu vážené kovariance dělené součinem stejně vážených středních hodnot dvou vektorů vyjadřujících cenové a množstevní změny s vhodně volenými vahami. Ukazuje se, že toto vyjádření je možné, a to při následující

$$\text{volbě veličin: } x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)}, y_i = \frac{q_i(1)}{q_i(0)} \text{ a vah } w_i^* = \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)}. \text{ Tyto}$$

konkretizace pro  $x_i$  a  $y_i$  lze vzhledem k symetrii výrazů přirozeně zaměnit. Dosadíme-li totiž zmíněné veličiny do (2), dostaneme

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(0)}}{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)}} = \frac{\left[ \frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right] \cdot \left[ \frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(0)} \right]}{\left[ \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)} \right] \cdot \left[ \frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)} \right]}$$

což po dalším vykrácení součtem  $\sum p_i(0) \cdot q_i(0)$  zřejmě dává výraz vyjadřující podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla.  $\square$ .

Záměnou cen za kvantitu a opačně bychom dospěli tímto způsobem k vyjádření

$$\frac{Q_{01}^P}{Q_{01}^L} = 1 + \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot \frac{s_y}{\bar{y}} \cdot r_{xy} \quad (\text{tzn. s prohozením obsahu } x_i \text{ a } y_i)$$

z něhož je mj. patrná platnost "křížového" splnění rovnosti  $P_{01}^P \cdot Q_{01}^L = P_{01}^L \cdot Q_{01}^P$   $\square$ .

Z vlastností (vážených) středních hodnot a směrodatných odchylek lze dále dovodit, že **“neutrální hodnota” 1 von Bortkiewiczova podílu nastane v případech**, kdy :

**(1) všechny ceny se změjí ve stejném poměru**, tj.  $\frac{p_i(I)}{p_i(0)} = c$  pro všechny komodity.

Tento analyticky ideální případ je ovšem výjimečný.

**(2) všechny kvantitý se změjí ve stejném poměru** tj.  $\frac{q_i(I)}{q_i(0)} = d$  pro všechny statky.

Tato eventualita je při užití reálných hodnot stejně vzácná jako předchozí případ.

**(3) vektory cenových a kvantových změn jsou vzájemně nekorelované.**

Tento případ zasazený do obvyklého ekonomického prostředí znamená situaci, kdy poptávka po komoditách zařazených do zkoumání není v zásadě ovlivněna změnami v jejich cenách mezi základním a běžným obdobím.

Ve všech situacích **(1), (2), (3)** tedy dojde ke shodě hodnot  $P_{01}^L$  a  $P_{01}^P$ .

Podobné úvahy nás přivedou k těmto závěrům:

**Má-li být hodnota  $P_{01}^P$  větší než  $P_{01}^L$** , musí být (při nezápornosti ostatních prvků dekompozice, tj. středních hodnot a směrodatných odchylek) hodnota  $r_{\frac{p^1, q^1}{p^0, q^0}}$  kladná,

tzn. **mezi vektory cenových a kvantových změn musí existovat kladná korelace.**

**Má-li být  $P_{01}^P$  menší než  $P_{01}^L$** , musí být (při nezápornosti ostatních členů dekompozice, tj. středních hodnot a směrodatných odchylek) hodnota  $r_{\frac{p^1, q^1}{p^0, q^0}}$  záporná, tzn. **mezi**

**vektory cenových a kvantových změn musí existovat korelace negativní.**

To odpovídá situaci, kdy **nadprůměrný růst cen některých komodit (oproti průměrnému růstu či poklesu cen jiných komodit) provází zpravidla podprůměrný růst (popř. pokles) poptávky po těchto komoditách.** Právě tato situace je v ekonomické realitě obvyklá. S ohledem na interpretaci korelačních vztahů (v prostředí spíše růstových tendencí cen a kvantit) lze konstatovat, že  $P_{01}^L$  index bude poskytovat vyšší hodnotu než  $P_{01}^P$ , protože “nadprůměrně” vysokým cenovým pohybům skutečně v ekonomickém prostředí odpovídají “podprůměrné” růsty či poklesy v poptávaných množstvích. Dále je zřejmé, že jak **Marshallovo-Edgeworthovo**, tak **Fisherovo i Walshovo indexní číslo** budou ležet v intervalu vymezeného zdola  $P_{01}^P$  a shora  $P_{01}^L$ .