5.1 Nákladová funkce a její vlastnosti

Uvažovanou situaci (naturálně chápaný výrobní proces s 1 výrobkem) rozšíříme ve dvou směrech. V prvé řadě rozšíříme uvažování na situaci, kdy místo skalární hodnoty produkce bude výstup z výrobního procesu tvořen vektorem m různých výrobků $y=(y_1,y_2,...,y_m)$. Tyto výrobky nemusí být nutně finálními produkty, ale třeba meziprodukty, které mohou vstupovat do navazujících výrobních procesů. Za druhé zavedeme do našich úvah cenová hlediska, a to jednak zavedením jednotkových cen výrobních faktorů, v podobě vektoru $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,....,p_n)$ a obdobně jednotkových cen výrobků jako vektor $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,....,q_m)$.

Definice 17

Mějme dán vektor $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y_1},\boldsymbol{y_2},....,\boldsymbol{y_m})$ vyjadřující určité množství skupiny výrobků $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,....,\eta_m)$ vyráběných v dané technologii specifikované produkční funkcí $F(\boldsymbol{x})$. Nechť dále jednotkové *ceny* těchto *výrobních faktorů* jsou po řadě $p_1,p_2,....,p_n$ a ty vytvářejí dohromady cenový vektor výrobních faktorů $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,....,p_n)$. Pak

Nákladová funkce [*cost function*] (příslušná k produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$ je funkce $n+m$ proměnných definovaná vztahem

(5.1) $$\mathbf{C}(\mathbf{y},\mathbf{p})=\mathbf{Min}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x};\mathbf{x}\in\mathbf{L}(\mathbf{y}))$$, kde

$L(\boldsymbol{y})$ je produkční množina vstupů odpovídající produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$ na hladině produkce reprezentované vektorem výrobků $\boldsymbol{y}$. .

Jak je z definice patrné, argumentem nákladové funkce je jednak vektor výrobků $\boldsymbol{y}$, jednak vektor cen výrobních faktorů $\boldsymbol{p}$. Hodnota nákladové funkce je pak nejúspornější výdaj spojený při daných cenách $\boldsymbol{p}$ s nákupem výrobních faktorů v množství **x** umožňujících dosáhnout (vektorové) produkce o velikosti $\boldsymbol{y}$.

V případě, že výstup/produkci představuje pouze jediný výrobek, lze pro popis výrobní technologie použít produkční funkci $F(x_1,x_2,....,x_n)$. Nákladovou funkci pak definujeme jako

(5.1A) $$\mathbf{C}(\mathbf{y},\mathbf{p})=\mathbf{Min}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x};\mathbf{F}(\mathbf{x})\geq\mathbf{y})$$.

Nákladová funkce může být definována i pro případ, že bychom se nacházeli v nekonkurenčním prostředí. Pak bychom mohli jednotlivé složky vektoru $\boldsymbol{p}$ interpretovat jako *stínové ceny***.** Množinu $\boldsymbol{Z}=\{(y,x);x\in L(y),resp.y\in P(x)\}$ budeme nazývat ***množina výrobních možností*** (“***production possibility set***”). Jde o množinu všech možných výrobních kombinací $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ takových, že s vektorem vstupů $\boldsymbol{x}$ lze dosáhnout (vyrobit) množinu výstupů $\boldsymbol{y}$.

VĚTA 1

Nákladová funkce $C(y,\mathbf{p})$ definovaná v (5.1A) ve vztahu k produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$, která splňuje vlastnosti (P1),...., (P6), je

(C1) ***reálná, konečná*** *a* ***nezáporná funkce*** $\boldsymbol{n}+1$ ***proměnných definovaná pro všechny kladné ceny*** $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,....,p_n)>0$ a pro všechny ***kladné*** dosažitelné výstupy y.

(C2) Platí $\boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p})>0$ pro $y>0$, přičemž $\boldsymbol{C}(0,\boldsymbol{p})=0$.

(C3) Nákladová funkce $\boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p})$ je

(a) ***neklesající funkce výstupu*** y , tj. pro $y^1<y^2$ platí $\boldsymbol{C}(y^1,\boldsymbol{p})\leq \boldsymbol{C}(y^2,\boldsymbol{p})$ pro pevné $\boldsymbol{p}$

(b) ***při neomezeně rostoucím výstupu*** též ***neomezeně roste*** tj. $\lim\limits_{y\to\infty} C(y,\boldsymbol{p})=\infty$.

(c) ***neklesající v cenách***, tj. pro $\boldsymbol{p}^1\leq \boldsymbol{p}^2$ platí $\boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p}^1)\leq \boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p}^2)$ pro pevné y.

Zápisem $\boldsymbol{p}^1\leq\boldsymbol{p}^2$ rozumíme: $p_j^{\ 1}\leq p_j^{\ 2}$ pro všechna j, kdy aspoň pro jedno

$$j^*: p_{j^*}^{\ 1}<p_{j^*}^{\ 2}$$

(C4) $\boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p})$ je ***(polo-)spojitá zdola v proměnné*** y ***a spojitá v proměnných*** $\boldsymbol{p}$.

(C5) $\boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p})$ je ***lineárně homogenní v cenách*** $\boldsymbol{p}$, tzn. platí pro ni vztah

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y},\lambda.\boldsymbol{p})=\lambda..\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}) \tag{5.3}$$

(C6) $\boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p})$ je ***konkávní v cenách*** $\boldsymbol{p}$ pro libovolné y, tzn. platí pro vztah

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y},\lambda.\boldsymbol{p}^1+(1-\lambda).\boldsymbol{p}^2)\geq\lambda.\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}^1)+(1-\lambda).\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}^2) \tag{5.4 }$$

Vlastnost (C2) mj. říká, že v případě, že se nic nevyrábí, nevznikají žádné výrobní náklady. Při růstu cen výrobních faktorů (za jinak nezměněné výrobní situace) je dle (C3) oprávněné vyloučit pokles nákladů. Na druhé straně celkové náklady nemusejí nutně vzrůst, neboť nemusejí být aktivně využívány veškeré výrobní faktory (např. ty, u nichž dojde k cenovému růstu). nepoužijí se např. ty, u nichž dojde k cenovému růstu, je-li možné použít jiné (existuje-li substitučnost mezi faktory) . Matematickou vlastnost (C4) vyvoditelnou ze spojitosti (shora) produkční funkce lze ve vztahu k výstupu interpretovat tak, že požadavek po (dodatečném) zvýšení produkce může být za určitých okolností provázen skokovitým přírůstkem výrobních nákladů. Ve vztahu k cenám je tvrzení (C4) zřejmé. Konkávnost (C6) vystihuje okolnost, že při (neproporčním) zvýšení (některých) cen stoupnou náklady zpravidla menší měrou, než by odpovídalo maximální hodnotě cenového nárůstu. Podobně, (C5) konstatuje, že (dle očekávání) se při proporční změně cen úměrně změní výrobní náklady.

důkaz:

(C1) Platnost tvrzení je zřejmá: funkce definovaná v (5.1A) je *reálná a nezáporná*, neboť je definována jako (*minimální*) skalární součin *reálného kladného vektoru cen* $\boldsymbol{p}$, resp. *reálného nezáporného vektoru výrobních faktorů* $\boldsymbol{x}$. *Hodnota* tohoto *skalárního součinu je konečná* (pro konečné jednotkové ceny a pro konečná množství výrobních faktorů).

(C2) $\boldsymbol{C}(0,\boldsymbol{p}) = Min(px; F(x) \geq 0) = 0$, neboť stačí vzít nulová množství výrobních faktorů, pro která platí dle vlastnosti (P1) produkční funkce rovnost $F(0) = 0$. Je-li hodnota produkce kladná, tj. $y > 0$, musí být kladná i hodnota nákladové funkce, protože dle definice $\boldsymbol{Min}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\,; F(\boldsymbol{x}) > 0) > 0$ (aspoň jeden výrobní faktor musíme vzít v kladném množství).

(C3a) Dále musí platit $\boldsymbol{C}(y^1,\boldsymbol{p}) \leq \boldsymbol{C}(y^2,\boldsymbol{p})$ pro $y^1 \leq y^2, y^1 \neq y^2$, neboť

(5.5) $$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}^1,\boldsymbol{p}) = \underset{x}{\boldsymbol{Min}}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}\,; F(\boldsymbol{x}) \geq y^1)) \leq \underset{x}{\boldsymbol{Min}}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\,; F(\boldsymbol{x}) \geq y^2)) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}^2,\boldsymbol{p}),$$

protože – při stejném vektoru jednotkových cen – nemůže být faktorová kombinace poskytujících vyšší produkci (y^2) levnější než faktorová kombinace poskytující nižší produkci (y^1)

$\boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p})$ je tedy neklesající v y:

(C3b) ***C neomezeně roste nade všechny meze***

Předpokládejme naopak, že by existovala horní hranice nákladů C^*, kterou by nemohla překročit jakkoliv velká faktorová kombinace. Zvolme tedy $\boldsymbol{x}^*$ takové, že platí

$$\boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}^*; F(\boldsymbol{x}) \geq y\}$$

Zvolme nyní proporčně zvětšenou faktorovou kombinaci $\boldsymbol{x}^{**} = 1{,}1.\boldsymbol{x}^*$, pro kterou máme

$$\boldsymbol{C}^{**}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}^{**}; F(\boldsymbol{x}) \geq y\}$$

Je zřejmé, že tato faktorová kombinace je spojena s vyšším vynaložením nákladů (při neměnných cenách) než $C^*(y,\boldsymbol{p})$, což je spor s předpokladem, že C^* je ona nepřekročitelná horní hranice. Odtud tedy nutně plyne

$$\text{tj. } \lim_{y\to\infty} C(y,\boldsymbol{p}) = \infty\ .$$

Kdyby totiž existovala horní hranice nákladů, .pak bychom mohli neomezeně zvyšovat produkci, aniž by nadále rostly náklady. Takovouto, zajisté jinak přitažlivou eventualitu připustit nemůžeme. Tím je dokázáno Tvrzení (C2) .

(C3c) $\boldsymbol{C}(y,\boldsymbol{p})$ ***je neklesající v p :***

Pro dva neidentické vektory se vztahem $\boldsymbol{p}^1 \leq \boldsymbol{p}^2$ zřejmě platí

(5.6) $$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}^1) = \boldsymbol{Min}(\boldsymbol{p}^1\cdot\boldsymbol{x}^*\,; F(\boldsymbol{x}^*) \geq y)) \leq \boldsymbol{Min}\left(\boldsymbol{p}^2\cdot\boldsymbol{x}^{**}\ ; F(\boldsymbol{x}^{**}) \geq y)\right) = .\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}^2),$$

protože platí $\boldsymbol{p}^1 x^* \leq \boldsymbol{p}^1 x^{**} \leq \boldsymbol{p}^2 x^{**}$: platnost první nerovnosti vyplývá z toho, že bod $\boldsymbol{x}^*$ je bodem, v němž se nabývá minima nákladů ve vztahu k cenovému vektoru $\boldsymbol{p}^1$, platnost druhé nerovnosti vyplývá z podmínky $\boldsymbol{p}^1 \leq \boldsymbol{p}^2$.

(C4) ***Polospojitost zdola/zleva*** budeme dokazovat přímo na základě definice této vlastnosti:

Zvolme nějaký *pevný* cenový vektor $\boldsymbol{p} > 0$ a nějakou *pevnou* hodnotu výstupu $y^* > 0$. Oběma přísluší nějaká hodnota nákladové funkce $C(y^*, \boldsymbol{p})$. Dále vezměme neklesající posloupnost *(skalárních)* hodnot $0 \le y^N \le y^{N+1} \le y$. Potom zřejmě musí platit

$C(y^N, \boldsymbol{p}) \le C(y^{N+1}, \boldsymbol{p}) \le C(y^*, \boldsymbol{p})$ v důsledku již dokázané vlastnosti (C3a), že $C(y, \boldsymbol{p})$ je neklesající ve výstupu. Pak $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}^N, \boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}^N \,; F(\boldsymbol{x}) \ge y^N\}$ pro nějaké $\boldsymbol{x}^N$ dosahující produkce alespoň y^N. Definujme dále kompaktní (omezenou a uzavřenou) množinu v $n+1$ - rozměrném prostoru $Z = \{(y, x) : 0 \le y \le y^*; 0 \le x; px \le px^*\}$

Zřejmě pak pro libovolné přirozené číslo N body (y^N, x^N) patří do Z. Protože posloupnost dvojic (y^N, x^N) zůstává v kompaktní množině $n+1$ rozměrného Eukleidovského prostoru, musí existovat její *konvergentní* podposloupnost (y^{N_k}, x^{N_k}), taková, že $\lim x^{N_k} \equiv x^{**}$ a $\lim y^{N_k} \equiv y^*$. Protože pro členy takovéto podposloupnosti (y^{N_k}, x^{N_k}) platí $F(x^{N_k}) \ge y^{N_k}$, musí i pro její limitu (*v kompaktní množině* Z) platit $F(x^{**}) \ge y^*$. Nyní tedy máme

$\lim C(y^N, p) = \lim C(y^{N_k}, p) = \lim px^{N_k} = px^{**}$. Protože dále $F(x^{**}) \ge y^*$, máme $p.x^{**} \ge C(y^*, p)$. Takže dostáváme $\lim C(y^N, p) \ge C(y^*, p)$. Ale protože na druhé straně též platí $C(y^N, p) \le C(y^*, p)$, máme odtud $\lim C(y^N, p) \le C(y^*, p)$. Oběma požadavkům vyhovuje zřejmě pouze možnost $C(y^N, p) = C(y^*, p)$. Odtud plyne polospojitost zdola/zleva funkce $C(y, \boldsymbol{p})$ pro jakékoliv y při kladném cenovém vektoru $p > 0$. .

(C5) Snadno ukážeme, že platí také ***lineární homogenita***:

(5.1A) $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}, \lambda.\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{Min}(\lambda.\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}\,; F(\boldsymbol{x}) \ge y)) = \lambda..\boldsymbol{Min}(.\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}\,; F(\boldsymbol{x}) \ge y)) = \lambda.\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}, \lambda.\boldsymbol{p}),$

neboť λ je skalární hodnota a výsledkem násobení jednoho vektoru ve skalárním součinu skalární konstantou λ je λ-násobek původního skalárního součinu. .

(C6): Zbývá vyšetřit ***konkávnost v cenách***: Pro libovolné body $\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^2$ zřejmě platí

$$C(y, \lambda.\boldsymbol{p}^1 + (1-\lambda).\boldsymbol{p}^2) = \underset{x}{Min}((\lambda.\boldsymbol{p}^1 + (1-\lambda).\boldsymbol{p}^2)\boldsymbol{x}; F(\boldsymbol{x}) \ge y) =$$

$$= [\lambda.\boldsymbol{p}^1 + (1-\lambda).\boldsymbol{p}^2]x^* = [\lambda.\boldsymbol{p}^1 x^* + (1-\lambda).\boldsymbol{p}^2 x^*] \ge \tag{5.7}$$

$$\ge \lambda..\underset{x}{Min}(\boldsymbol{p}^1\boldsymbol{x}; F(\boldsymbol{x}) \ge y) + (1-\lambda.).\underset{x}{Min}(\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{x}; F(\boldsymbol{x}) \ge y) =$$

$$\lambda.C(y, \boldsymbol{p}^1) + (1-\lambda).C(y, \boldsymbol{p}^2)$$

Jak $\boldsymbol{x}^*$ jsme označili takovou faktorovou kombinaci, která je nejúspornější možná ve vztahu k cenovému vektoru $\lambda\boldsymbol{p}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{p}^2$ a při níž se dosáhne produkce alespoň o velikosti y. Toto $\boldsymbol{x}^*$ však nemusí být minimální ve vztahu k cenovým vektorům $\boldsymbol{p}^1$, resp. $\boldsymbol{p}^2$: odtud nerovnost (mezi druhým a třetím řádkem) .

V řadě případů, kdy pracujeme s funkcemi, jejichž analytický tvar umožňuje nakládat s parciálními derivacemi, připojujeme k výše uvedeným předpokladům o produkční funkci, které umožňují vyvodit vlastnosti (C1) - (C6) nákladové funkce, ještě dodatečný:

$\boldsymbol{C(y,p)}$ **je funkce dvakrát spojitě diferencovatelná v** $\boldsymbol{p}$ **.**

Tento předpoklad nám umožňuje doplnit dvě další, velmi užitečné vlastnosti nákladové funkce: Jde o (C7)

(5.8) $$\frac{\partial \boldsymbol{C(y,p)}}{\partial p_i} = x_i$$

Vztah (5.8) se nazývá ***Shephardovo lemma***[1] a dále vlastnost **(C8)**

(5.9) $$\frac{\partial^2 \boldsymbol{C(y,p)}}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{C(y,p)}}{\partial p_j \partial p_i}$$ - ***vlastnost symetrie*** s důsledkem $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_{ij}}{\partial p_j}$.

Význam Shephardova lemmatu spočívá především v možnosti generovat na základě známé nákladové funkce $\boldsymbol{C(y,p)}$ úplný systém poptávkových funkcí po jednotlivých výrobních faktorech. Smysl symetrické vlastnosti (C8) doceníme zejména při ekonometrických analýzách, neboť v případě, že platí symetrie, docílíme snížení počtu neznámých odhadovaných parametrů nákladové funkce. Omezí se tím riziko výskytu multikolinearity a uchová se potřebný počet stupňů volnosti při testování významnosti (případně i nelineárních) regresních parametrů.

Přiklad nákladové funkce Uvažujme nákladovou funkci ve tvaru

(5.10) $$C(y,p) = y.\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \quad , \text{ kde } 0 < \alpha_i < 1 \;\; ; i = 1,2,\dots,n$$

která splňuje předpoklady (C1), (C2), je oboustranně spojitá a za přijatých předpokladů o parametrech α_i**, je dále konkávní a lineárně homogenní v** $\boldsymbol{p}$**. Vzhledem k diferencovatelnosti lze pomocí Shephardova lemmatu (5.8) odvodit soustavu poptávkových funkcí ve tvaru**

(5.11) $$x_i = \frac{\partial \boldsymbol{C(y,p)}}{\partial p_i} = \alpha_i . y$$

z čehož je patrné, že tato nákladová funkce představuje dost speciální poptávkovou strukturu, kdy jsou jednotlivé faktory poptávány (vůči produkci) v pevných poměrech, nezávislých na cenách. Reprezentací příslušného produkčního schématu je Leontiefova produkční funkce. Symetrie platí v triviální podobě (všechny druhé parciální derivace jsou nulové).

Poznámky:

1) Poptávková funkce zde není závislá na cenách výrobních faktorů (ani vlastního)

2) Nákladová funkce je součinem velikosti produkce a lineární kombinace cen, poptávka je součinem velikosti produkce a příslušným koeficientem téže lineární kombinace

[1] Důkaz Shephardova lemmatu najde čtenář v části teorie užitku – Tvrzení 6, vztah (4.12)

5.1B Jednotková nákladová funkce

Definice 18

Mějme dán vektor $\mathbf{e} = (1,1,\ldots,1)$ jednotkových množství výrobků $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ vyráběných v určité technologii **specifikované produkční funkcí $F(\mathbf{x})$. Nechť jednotkové *ceny výrobních faktorů* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$** jsou ve vektoru **$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$**. Pak

Jednotková nákladová funkce [*unit cost function*] **příslušná nákladové funkci $C(y, \boldsymbol{p})$, je funkce $n+m$ proměnných definovaná vztahem**

(5.12A) $$C(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{p}) = Min(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \,; \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{e})) \quad , \quad \text{kde}$$

$L(\boldsymbol{e})$ je produkční množina vstupů odpovídající produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$ na hladině produkce reprezentované vektorem jednotkových množství výrobků $\boldsymbol{e}$.

V případě jednovýrobkové produkční technologie popsané produkční funkcí $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. lze jednotkovou nákladovou funkci definovat jako

(5.12B) $$C(1, \boldsymbol{p}) = Min(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \,; F(\boldsymbol{x}) \geq 1) \quad .$$

Poznámka: Jednotková nákladová funkce je zřejmě funkcí jen n argumentů (prvků cenového vektoru $\boldsymbol{p}$). Zavedeme pro ni značení $\widetilde{C}(\boldsymbol{p}) = C(1, \boldsymbol{p})$.

VĚTA 2

Jestliže je produkční funkce $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definovaná vztahem (1.4) s vlastnostmi (P1)-(P7) lineárně homogenní, pak lze k ní příslušnou nákladovou funkci zapsat jako součin velikosti produkce y a jednotkové nákladové funkce $\widetilde{C}(\boldsymbol{p})$ příslušné nákladové funkci $C(y, \boldsymbol{p})$.

Důkaz: **Úpravou nákladové funkce** $C(y, p) = Min\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \;;\; F(x) \geq y\right\}$

dostaneme pro $y > 0$ $\quad C(y, \boldsymbol{p}) = Min\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \;;\; \frac{1}{y} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 1\right\}$

Vzhledem k lineární homogenitě lze dále psát

$$C(y, \boldsymbol{p}) = Min\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \;;\; F\left(\frac{x_1}{y}, \frac{x_2}{y}, \ldots, \frac{x_n}{y}\right) \geq 1\right\}$$

a dále vzhledem k vlastnosti multiplikativní komutativity minima

$$C(y, \boldsymbol{p}) = y.Min\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i x_i}{y} \;;\; F\left(\frac{x_1}{y}, \frac{x_2}{y}, \ldots, \frac{x_n}{y}\right) \geq 1\right\}$$

Po nahrazení podílů x_i / y novými proměnnými $z_i = x_i / y$ tedy máme

$$C(y, \boldsymbol{p}) = y.Min\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i z_i \;;\; F(z_1, z_2, \ldots, z_n) \geq 1\right\} = y.\, C(1, \boldsymbol{p}) = y.\widetilde{C}(\boldsymbol{p})$$

5.2 Výnosová funkce a její vlastnosti

Obdobnou úlohu, jako má *nákladová funkce* ve vztahu k nákladové stránce výrobního procesu, má *výnosová funkce*, která reprezentuje (jako pojem sám i svými vlastnostmi) chování výnosové, peněžně ohodnocené (tržební) stránky výrobního procesu. (Produkční funkce má primárně zobrazovat technologickou stránku výroby) .

Definice 19

Mějme dán vektor $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ vyjadřující určité množství skupiny výrobků $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m)$ vyráběných v dané technologii specifikované *skupinou produkčních funkcí*[2] $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$. Nechť dále jednotkové ceny těchto výrobků jsou po řadě $q_1, q_2, ..., q_m$ a ty vytvářejí vektor cen výrobků $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, ..., q_m)$.

Výnosová funkce [*revenue function*] (příslušná k produkční funkci $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je funkce $\mathbf{n}+\mathbf{m}$ proměnných definovaná vztahem

(5.12) $$\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{q}) = \mathbf{Max}(\mathbf{q}.\mathbf{y}\,;\,\mathbf{y} \in \mathbf{P}(\mathbf{x}))$$, kde

$P(\boldsymbol{x})$ je *produkční množina výstupů* odpovídající produkční funkci $F(\boldsymbol{x})$ na hladině produkce reprezentované vektorem výrobních faktorů $\boldsymbol{x}$. .

Jak je patrné, argumentem výnosové funkce je jednak *vektor výrobních faktorů* $\mathbf{x}$, jednak *vektor cen výrobků* $\mathbf{q}$. Hodnota výnosové funkce je pak maximální dosažitelný výnos (tržba) získatelný při daných cenách $\boldsymbol{q}$ s prodejem (vektoru) výrobků o objemech $\mathbf{y}$, které jsou vyrobitelné při nasazení vektoru výrobních faktorů o velikosti $\mathbf{x}$.

V případě, že výstup/produkce představuje pouze jediný výrobek, lze pro popis výrobní technologie použít produkční funkci $\mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)$. Výnosovou funkci pak definujeme jako

(5.12A) $$\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{q}) = \mathbf{Max}(\mathbf{q}.\mathbf{y}\,;\,\mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{y})$$.

[2] Přesněji by šlo o *m* tzv. *produkčních korespondencí*

Vlastnosti výnosové funkce

(R1) Výnosová funkce $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{q})$ definovaná v (5.12) ve vztahu k produkční funkci $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, která splňuje vlastnosti (P1),...., (P6), je ***reálná, konečná*** *a* ***nezáporná funkce*** $n+1$ ***proměnných definovaná pro kladnou cenu výrobku*** $\mathbf{q}>0$ a pro všechny ***kladné*** použitelné vstupy $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_n)$.

(R2) Platí $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{q})>0$ pro $x>0$, přičemž $\mathbf{R}(\mathbf{0},\mathbf{q})=0$.

(R3) Výnosová funkce $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{q})$ je

(a) ***neklesající funkce vstupů*** $\mathbf{x}$, tj. pro $\mathbf{x}^1<\mathbf{x}^2$ platí $\mathbf{R}(\mathbf{x}^1,\mathbf{q})\leq\mathbf{R}(\mathbf{x}^2,\mathbf{q})$ pro pevné $\mathbf{q}$

(b) ***při neomezeně rostoucích vstupech neomezeně roste*** tj. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty}\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{q})=\infty$.

(c) ***neklesající v cenách***, tj. pro $\mathbf{q}^1\leq\mathbf{q}^2$ platí $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{q}^1)\leq\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{q}^2)$ pro pevné y.

Zápisem $\mathbf{q}^1\leq\mathbf{q}^2$ rozumíme, že $\mathbf{q}_j{}^1\leq\mathbf{q}_j{}^2$ pro všechna j, kdy aspoň pro jedno $\mathbf{j}^*:\mathbf{q}_{j^*}{}^1<\mathbf{q}_{j^*}{}^2$

(R4) $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{q})$ je funkce ***(polo-)spojitá shora v proměnné*** x ***a spojitá v proměnných*** $\mathbf{q}$.

(R5) $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{q})$ je funkce ***lineárně homogenní v cenách výrobků*** q, tj. platí pro ni

(5.13) $$\mathbf{R}(\mathbf{x},\lambda.\mathbf{q})=\lambda.\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{q})$$

(R6) $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{q})$ je funkce ***konvexní v cenách*** $\boldsymbol{p}$ pro libovolné $\boldsymbol{y}$, tzn. platí

(5.14) $$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\lambda.\boldsymbol{q}^1+(1-\lambda).\boldsymbol{q}^2)\leq\lambda.\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q}^1)+(1-\lambda).\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q}^2)$$.

Vlastnost **(R2)** *konstatuje, že v případě, že pro výrobu nemáme žádná (kladná) množství výrobních faktorů, nelze realizovat (žádnou produkci a) žádné tržby.*

Při růstu cen výrobků (za neměnné výrobní situace) je dle **(R3)***: (a) s růstem užitých množství výrobních faktorů nemožný pokles výnosů (ty však nemusí nutně růst, protože se nemusí užívat právě ty, u kterých se zvětšila potenciálně zvětšená množství), (c) nemožný pokles výnosů (za jinak stejných okolností), jestliže zdražíme ceny výrobků, (b) neohraničená hodnota tržeb, pokud soustavně zvyšujeme nasazená množství všech výrobních faktorů.*

Vlastnost **(R4)** *vyjadřuje opět zákonitosti matematické povahy: drobný cenový růst (pokles) výrobků nemůže vést ke skokovitému růstu výnosů, avšak drobný přírůstek výrobních faktorů může ojediněle (nepřímo přes skokovitý růst produkce) vést k nespojitému růstu výnosů.*

Lineární homogenita **(R5)** *je zřejmá: Proporcionální změna cen (všech) výrobků se odrazí v adekvátní změně hodnoty tržeb (stejně jako proporcionální změna cen výrobních faktorů vede k adekvátní změně nákladů) .*

Konečně konvexnoxt **(R6)** *znamená mj. že při poklesu (který nemusí být nutně proporční) cen výrobků nemusí adekvátně poklesnout tržby získané z prodeje výrobků, neboť výrobce v rámci dané technologie (připouští-li se substituční možnosti) může přejít (se stejnými výrobními faktory) k výrobě jiných produktů, u kterých ceny poklesly (oproti průměru) méně, případně vzrostly.*

5.3 Zisková funkce a její vlastnosti

Minimalizaci výrobních nákladů lze chápat jako jednu fázi dvoustupňové procedury, která pojímá zisk z výrobního procesu jako maximální dosažitelný rozdíl mezi hodnotou produkce - *danou skalárním součinem vektoru výrobků a jim příslušných jednotkových cen* - a výrobními náklady *(vyjádřenými obdobným skalárním součinem vektorů výrobních faktorů a jejich jednotkových cen)*. Na ni navazuje druhá fáze: maximalizace hodnoty realizované produkce (objemu tržeb), od níž se odečítají minimalizované výrobní náklady (spojené s pořízením výrobních faktorů v optimálních množstvích) .

Definice 20

Mějme dán vektor m výrobků $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ a vektor n výrobních faktorů $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ využívaných v rámci dané technologie určené produkční funkcí $F(\boldsymbol{x})$. Vedle těchto vektorů uvažujme ještě dva další vektory, a to jednak již zavedený vektor cen výrobních faktorů $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ a vedle něj ještě vektor $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, ..., q_m)$, který představuje jednotkové ceny výrobků. Předpokládáme opět nezáporné ceny $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{q} > \boldsymbol{0}$.

Zisková funkce [*profit function*] (příslušná k produkční funkci $\mathbf{F(x)}$) je funkce $m + n$ proměnných definovaná vztahem

(5.15) $$\Pi(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \mathbf{Max}(\mathbf{qy} - \mathbf{px}\,;(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{Z}(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$, kde

$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ je opět množina výrobních možností uvažovaných v rámci dané technologie. Výraz (5.15) lze přepsat ve zkráceném vyjádření pro případ, že vezmeme $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y}, -\boldsymbol{x})$ jako tzv. vektor čistého výstupu (“*net output vector*”)

(5.15a) $$\Pi\left(\mathbf{q}^*\right) = \mathbf{Max}\left(\mathbf{q}^* \cdot \mathbf{z}; \mathbf{z} \in \mathbf{Z}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)$$, kde

$\boldsymbol{z}$ je právě vektor čistého výstupu (kladný pro výstupy, záporný pro vstupy) a $\mathbf{q}^*$ je příslušný sdružený cenový vektor $\mathbf{q}^* = (\mathbf{q},\mathbf{p})$.

VLASTNOSTI ZISKOVÉ FUNKCE

Ziskové funkci definované výrazem (5.15) přisuzujeme tyto vlastnosti:

(Z1) $\Pi(q,p)$ je ***reálná funkce definovaná pro všechny kladné ceny*** (výrobků i výrobních faktorů) $p_1,....,p_n,\ q_1,....,q_m$. Uplatníme-li zkrácený zápis $\Pi(q^*)$, pak je tato funkce navíc nezáporná.

(Z2) $\Pi(q,p)$ je ***nerostoucí funkce v cenách výrobních faktorů a neklesající v cenách výrobků***, tzn. platí : pro $p_r < p_{r^*}$

(5.16A) $$\Pi(q,p_1,....,p_r,....,p_n) \geq \Pi(q,p_1,....,p_{r^*},....,p_n)\ ,\quad r,r^* \in \{1,2...,n\}$$

a podobně platí pro $q_s < q_{s^*}$

(5.16B) $$\Pi(q_1,....,q_s,....,q_m,p) \leq \Pi(q_1,....,q_{s^*},....,q_m,p)\ ,\quad s,s^* \in \{1,2...,n\}$$

(Z3) $\Pi(q,p)$ je ***spojitá funkce ve všech argumentech*** $p_1,....,p_n,\ q_1,....,q_m$.

(Z4) $\Pi(q,p)$ je ***konvexní ve všech argumentech*** $p_1,....,p_n,q_1,....q_m$. Platí tedy

(5.17)
$$\Pi\left(\lambda q^1,\lambda p^1,(1-\lambda)q^2,(1-\lambda)p^2\right) \leq \lambda..\Pi\left(q^1,p^1,q^2,p^2\right)+(1-\lambda).\Pi\left(q^1,p^1,q^2,p^2\right)$$

(Z5) $\Pi(q,p)$ je ***lineárně homogenní funkce v*** $p_1,....,p_n,q_1,....,q_m$,

(5.18) $$\Pi(\lambda.q,\lambda.p) = \lambda.\Pi(q,p) \text{ pro libovolné } \lambda > 0.$$

Z tvrzení **(Z1)** *je zřejmé, že zisku se dosahuje tehdy, jestliže je hodnota realizované produkce vyšší, než činí vynaložené výrobní náklady.V opačném případě jde o ztrátu.*

Předpoklad **(Z2)** *je v souladu se skutečností, že růst cen výrobních faktorů (při téže výrobní situaci) nemůže zvyšovat zisk, na který naopak může příznivě působit růst cen výrobků.*

Opět je oprávněné předpokládat vztah (oboustranné) spojitosti zisku vůči cenám - viz. **(Z3)**. *Důvody jsou shodné jako u nákladové a výnosové funkce.*

Ve vztahu k **(Z4)** *si povšimněme rozdílu oproti nákladové funkci, který vyplývá z rozdílného cílového kritéria. Konvexnost vyplývá ze dvou skutečností : stejnou vlastnost má i výnosová funkce – viz (R6) jako menšenec rozdílu (člen **qy**), menšitel je pak nákladová funkce, která je konkávní, takže jako záporně vzatá veličina* $-\boldsymbol{px}$ *musí být konvexní.*

(Z5) *Proporční změna všech cen (jak cen výrobků, tak výrobních faktorů), např. při změně peněžní jednotky, musí mít za důsledek analogický přepočet výše původně dosaženého zisku.*

Při aplikaci analytických funkčních tvarů obvykle užívaných jako zisková funkce je zpravidla účelné připojit ještě následující podmínku :

(Z6) $\Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ je dvakrát spojitě diferencovatelná podle všech argumentů.

Po doplnění této poslední vlastnosti lze obdobně jako u nákladové funkce uvažovat dva její důležité důsledky.

(5.20) **(Z7)** $\dfrac{\partial \Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial p_r} = x_r$, resp. $\dfrac{\partial \Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial q_s} = y_s$ pro $r = 1, 2, \ldots, n$; $s = 1, 2, \ldots, m$

(vztah je znám jako ***Hotellingovo lemma***) a dále opět vlastnost symetrie

(5.21A) **(Z7*)** $\dfrac{\partial^2 \Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial p_r \partial q_s} = \dfrac{\partial^2 \Pi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})}{\partial q_s \partial p_r}$ s důsledkem $\dfrac{\partial x_r}{\partial q_s} = \dfrac{\partial y_s}{\partial p_r}$

Jestliže do tohoto výrazu zavedeme zkrácené značení a sdružíme vektory cen *(výrobků i výrobních faktorů)* do vektoru $\boldsymbol{q}^* = (q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ a podobné sloučení provedeme pro vektor množství *(výrobků a výrobních faktorů)*, který označíme $\boldsymbol{z} = (y_1, y_2, \ldots y_m, x_1, x_2, \ldots x_n)$, kde $y_i > 0$ a $x_i < 0$ (tedy opět pracujeme s vektorem čistého výstupu), můžeme poslední podmínku (Z7*) psát v obecnější formě :

(5.21B) **(Z7**)** $\dfrac{\partial^2 \Pi(\boldsymbol{q}^*)}{\partial q_r^* \partial q_s^*} = \dfrac{\partial^2 \Pi(q^*)}{\partial q_s^* \partial q_r}$ s důsledkem $\dfrac{\partial z_r}{\partial q_s^*} = \dfrac{\partial z_s}{\partial q_r^*}$.

V podmínce pro symetrii můžeme tedy kombinovat navzájem ceny výrobků i výrobních faktorů. Výsledkem je soustava poptávkových funkcí symetrická ve vztahu k výrobkům i výrobním faktorům navzájem.