Cviceni k predmetu PMMAT2
Cviceni 1 - pojem diferencialu a Tayloruv vzorec

Zapamtujte si nasledujici tvrzeni: Na intervalu J, kde funkce $f(x)$ ma derivace az do radu $n+1$, muzeme funkci hodnotu funkce f v bode $x \in J$ aproximovat Taylorovym polynomem v bode $x_0 \in J$ az do radu n.

$$f(x) =$$
$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \tag{1}$$
$$\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \text{ kde } \theta \in (x_0, x). \tag{2}$$

Cast (1) se nazyva Tayloruv polynom stupne n k funkci f (oznacime $T_n(f)$), cast (2) se nazyva zbytek po Taylorove polynomu radu n k funkci f (oznacime $R_n(f)$).

Priklad 1.
Aproximujte (priblizne vyjadrete) cislo $e^{1.2}$. Staci jen dosadit do Taylorova vzorce za $f(x) = e^{1.2}, f(x_0) = e^1, f'(x_0) = e, f''(x_0) = e, (x - x_0) = 0.2$. Odtud dostavame:
$e^{1.2} \doteq e^1 + \frac{e}{1}0.2 = 3.261938194$ (aproximace $T_1(f)$)
$e^{1.2} \doteq e^1 + \frac{e}{1}0.2 + \frac{e}{2}0.2^2 = 3.316303831$ (aproximace $T_2(f)$)
$e^{1.2} \doteq e^1 + \frac{e}{1}0.2 + \frac{e}{2}0.2^2 + \frac{e}{6}0.2^3 = 3.319928206$ (aproximace $T_3(f)$)
Porovnejte s hodnotou $e^{1.2} = 3.320116923$. Oko vidi, ze cim vyssi stupen n Taylorova polynomu, tim lepsi aproximace.

Priklad 2.
Aproximujte (priblizne vyjadrete) cislo $\cos(61)$. Staci jen dosadit do Taylorova vzorce za $f(x) = \cos(61), f(x_0) = \cos(60), f'(x_0) = -\sin(60), f''(x_0) = -\cos(60), (x - x_0) = \frac{\pi}{180}$. Pozor na vyjadreni $(x - x_0)$, 1 stupen je nutno vyjadrit prostrednictvim π, tedy π je 180 stupnu, jeden stupen je $\frac{\pi}{180}$ (jednoducha trojclenka). Odtud dostavame:
$\cos(61) \doteq \cos(60) + \frac{-\sin(60)}{1}\frac{\pi}{180} = 0.484885005$ (aproximace $T_1(f)$)
$\cos(61) \doteq \cos(60) + \frac{-\sin(60)}{1}\frac{\pi}{180} + \frac{-\cos(60)}{2}(\frac{\pi}{180})^2 = 0.48480885$ (aproximace $T_2(f)$)
$\cos(61) \doteq \cos(60) + \frac{-\sin(60)}{1}\frac{\pi}{180} + \frac{-\cos(60)}{2}(\frac{\pi}{180})^2 + \frac{\sin(60)}{6}(\frac{\pi}{180})^3 = 0.484809617$ (aproximace $T_3(f)$)
Porovnejte s hodnotou $\cos(61) = 0.48480962$. Oko vidi, ze cim vyssi stupen n Taylorova polynomu, tim lepsi aproximace.

Poznamka: Vsimnete si, ze neni treba zavadet pojem diferencialu, diferencial je vlastne Tayloruv polynom radu 1, navic v diferecialnim poctu funkci jedne promenne pojem diferencialu a derivace splyvaji. V diferencialnim poctu funkci vicepromennych ziskava diferencial zcela novy rozmer, tam uz prehlizet nemuzeme.

Priklad 3.
Aproximujte cislo e s presnosti 10^{-3}.
Jednoduchym dosazenim dostavame: $e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dot{+} \frac{1}{n!} + R_n$, kde $R_n = \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}$, kde $0 < \theta < 1$. Tedy plati $0 < R_n < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Nerovnost $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$,tj. $(n+1)! > 3000$

je splnena pro $n \geq 6$. Tedy $e \doteq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$ ma chybu mensi nez 10^{-3}.

Domaci ukol 1. (neni samozrejme povinny, ale neco podobneho bude v pisemce, takze kazdy by si ho ve vlastnim zajmu mel spocitat sam)
Zkuste si aproximovat hodnotu $\cos(61)$ s presnosti 10^{-8} v bode $\cos(60)$.

Pristi cviceni budou obrazky (i barevne)!

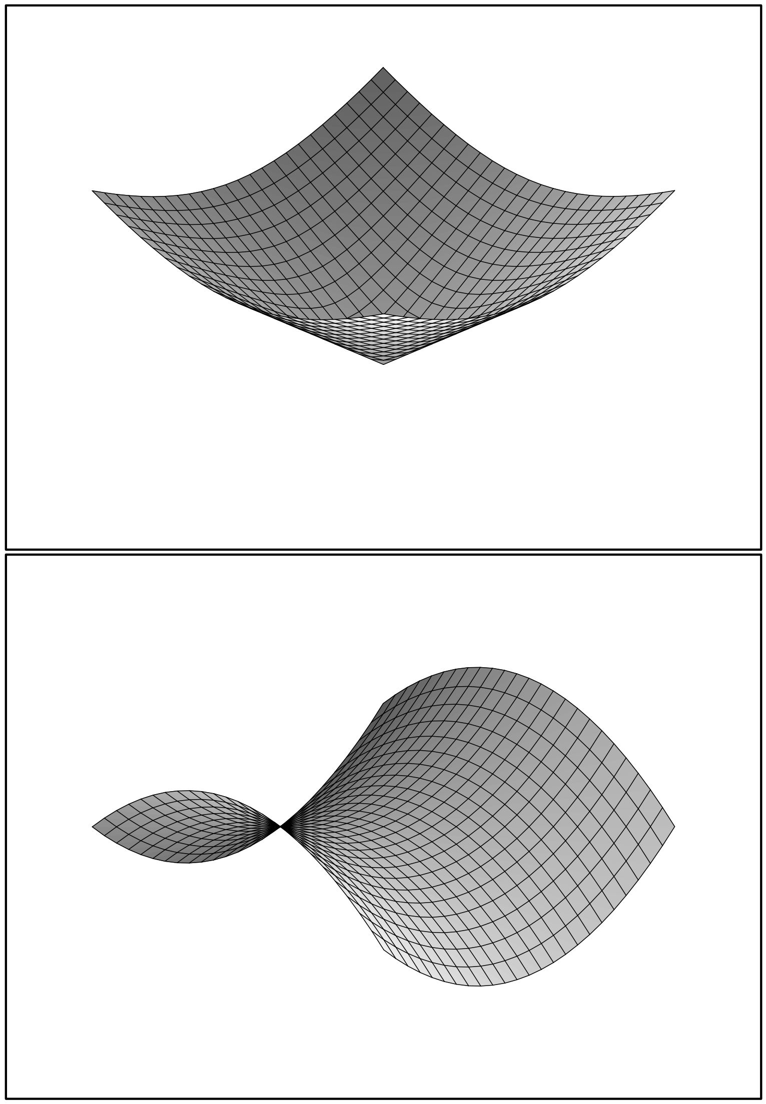

Figure 1: Funkce $f(x,y) = \sqrt{(}x^2 + y^2)$ a $g(x,y) = x^2 - y^2$