Cviceni k predmetu PMMAT2
Cviceni 11 - diferencialni rovnice

Priklad: Najdete vsechna reseni diferencialni rovnice a dale konkreteni reseni vyhovujici podmince.
a)$y' = x^2y^2\sin x \Rightarrow \frac{dy}{y^2dx} = x^2\sin x \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = x^2\sin x dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2} = \int x^2\sin x dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \int x^2\sin x dx|$ prava strana per partes $| \Rightarrow -\frac{1}{y} = -x^2\cos(x) + 2\cos(x) + 2x\sin(x) + C \Rightarrow y = \frac{1}{x^2\cos(x)-2\cos(x)-2x\sin(x)-C}$ skutecne, pokud spocteme $y' = \frac{x^2\sin(x)}{(x^2\cos(x)-2\cos(x)-2x\sin(x)-C)^2}$ a vydelime to $y^2 = \frac{1}{(x^2\cos(x)-2\cos(x)-2x\sin(x)-C)^2}$, tak dostaneme $x^2\sin x$.
Dale konkretni reseni za podminky $y(0) = 1$ znamena urcit konstantu po dosazeni cisel $x = 0$ a $y = 1$ do reseni, tedy mame $1 = \frac{1}{0^2\cos(0)-2\cos(0)-20\sin(0)-C} \Rightarrow C = -3 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2\cos(x)-2\cos(x)-2x\sin(x)+3}$.

b)$y' - x^2e^xy^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y^2dx} = x^2e^x \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = x^2e^xdx \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2} = \int x^2e^xdx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \int x^2e^xdx$
| prava strana per partes | $\Rightarrow -\frac{1}{y} = (2-2x+x^2)e^x + C \Rightarrow y = -\frac{1}{(2-2x+x^2)e^x+C}$ skutecne, pokud spocteme $y' = \frac{e^xx^2}{((2-2x+x^2)e^x+C)^2}$ a vydelime to $y^2 = \frac{1}{((2-2x+x^2)e^x+C)^2}$, tak dostaneme x^2e^x.
Dale konkretni reseni za podminky $y(0) = 1$ znamena urcit konstantu po dosazeni cisel $x = 0$ a $y = 1$ do reseni, tedy mame $1 = -\frac{1}{(2-2\cdot0+0^2)e^0+C} \Rightarrow C = -3 \Rightarrow y = \frac{1}{(2-2x+x^2)e^x-3}$.

c)$y = y'x \Rightarrow \frac{dy}{ydx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(y) = \ln(x) + C \Rightarrow \ln(y) = \ln(x)+\ln(C_1) \Rightarrow y = C_1x$ skutecne, pokud spocteme $y' = C_1$ a vynasobime to x, tak dostaneme y.
Dale konkretni reseni za podminky $y(0) = 0$ znamena urcit konstantu po dosazeni cisel $x = 0$ a $y = 0$ do reseni, tedy mame $0 = C_1 \cdot 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y = 0$.

d)Najdete dve ruzne reseni rovnice $y' = 2xy\cos(2x)e^{-2x}$ a u kazdeho uvedte pocatecni podminku, kterou splnuje.

$y' = 2xy\cos(2x)e^{-2x} \Rightarrow \frac{dy}{ydx} = 2x\cos(2x)e^{-2x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x\cos(2x)e^{-2x}dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int 2x\cos(2x)e^{-2x}dx \Rightarrow \ln(y) = \int 2x\cos(2x)e^{-2x}dx|$ Resit integral na prave strane je ponekud komplikovane, ale jde to. Nejdrive dejte substituci $2x = t$, at se co nejvice zjednodusi nasledne per partes, ktere bych zvolil $t = u, 1 = u', v' = \cos(t)e^{-t}, v = \int\cos(t)e^{-t}dt|$. Integral v se potom resi standardni per partes. $| \Rightarrow \ln(y) = -\frac{1}{2}x\cos(2x)e^{-2x} + \frac{1}{2}x\sin(2x)e^{-2x} + \frac{1}{4}\sin(2x)e^{-2x} + C \Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}x\cos(2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x\sin(2x)e^{-2x}+\frac{1}{4}\sin(2x)e^{-2x}+C} \Rightarrow y = e^Ce^{-\frac{1}{2}x\cos(2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x\sin(2x)e^{-2x}+\frac{1}{4}\sin(2x)e^{-2x}} \Rightarrow y = C_1e^{-\frac{1}{2}x\cos(2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x\sin(2x)e^{-2x}+\frac{1}{4}\sin(2x)e^{-2x}}$.
Dale pro zjisteni konkretnich reseni se vetsinou dosazuji nejake 'hezke' body, v tomto pripade bych asi zvolil bod $[x, y] = [0, 0]$ a $[x, y] = [0, 1]$. Konstanty urcime dosazenim cisel za x a y do reseni, tedy mame pro $[0, 0], C_1 = 0$ a $[0, 1], C_1 = 1$.

Poznamka: Opet je mozne vse pocitat v programu MAPLE, napr. c) by se zapsalo dsolve(x*diff(y(x),x) = y(x));