Giniho formulace indexních čísel

Rozšířením techniky řetězení je postup, který pod názvem ***síťová metoda*** uplatnil italský matematik a ekonom **Carrado Gini**[1]. Opět se uvažuje **rozčlenění období mezi počátečním - „0"-*tým* - a koncovým - „m"-*tým* - obdobím na** celkem ***m*** **úseků**, v nichž jsou dostupné potřebné statistické údaje.

Gini formuloval (následně po něm nazvaná) indexní čísla následujících tvarů:

tzv. **GINIho indexní číslo 1. typu**

(G1)
$$P_{0m}^{G(1)} = \sqrt[m+1]{\prod_{j=0}^{m} \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(m)\cdot q_i(j)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(j)}} \quad ,$$

tzv. **GINIho indexní číslo 2. typu**[2]

(G2)
$$P_{0m}^{G(2)} = \sqrt[m-1]{\prod_{j=1}^{m-1} P_{0j}^{*} \cdot P_{jm}^{*}} \quad ,$$

přičemž ve druhém případě může symbol $P_{0m}^{G(2)}$ představovat libovolné jiné, z hlediska vlastností uspokojivé výchozí indexní číslo (definice $P_{0m}^{G(2)}$ tedy není jednoznačná).

Giniho konstrukty (G1), (G2) lze použít i pro data, která nemusí tvořit časové posloupnosti cen a kvantit. Určitou jejich slabinou je však okolnost, že při aktualizaci je nutný celkový přepočet indexního čísla v případě, kdy získáme statistická data za nová období (nebo individua či jiné statistické jednotky). Tato nevýhoda však nemusí být v praxi až tak citelná, neboť konstrukty byly autorem původně navrženy hlavně za účelem provádění prostorových (geografických) cenových srovnání.

Předností obou indexních čísel **(G1), (G2)** je automatické splnění axiomu záměny období **(F3)** a dále skutečnost, že při velkém **m** (počtu dělení) se takto vytvořená veličina hodnotou zpravidla málo liší od hodnoty vzaté přímým výpočtem (bez dělení intervalu mezi „0" a „m").

poznámka ke (G1):
Všimněme si, že v případě (G1) (jde-li o cenové indexní číslo) stačí znát cenové vektory jen v počátečním "0" a koncovém "m" období, zatímco údaje o spotřebě komodit, které využíváme pro stanovení vah při geometrickém průměrování, je potřebné sledovat též ve všech meziobdobích $1,2,\ldots,m-1$.

---

1 **Gini, C.: „On the Circular Test of Index Numbers". Metron 1931.**

2 **Ragnar Frisch nazývá tyto konstrukty *Gini' s aggregate crossing*, resp. *Gini´s two-point crossing*.**

Jak je bezprostředně vidět z definičního vztahu **(G1)**, **při volbě $m = 1$ dostáváme pro $P_{01}^{G(1)}$ přímo Fisherův cenový index**, zatímco pro $m = 2$ v případě $P_{02}^{G(2)}$ obdržíme obdobně (nevážený) geometrický průměr obou částí P_{01} a P_{02} generujícího cenového indexního čísla. Není obtížné ukázat, že **Giniho indexní čísla vyhovují Fisherovým postulátům (F1), (F3), (F5), (F6), (F7), (F8)** (v případě $P_{0m}^{G(2)}$ je ovšem musí splňovat generující indexní číslo). Axiom záměny faktorů **(F2)** není splněn a axiom okružnosti **(F4)** platí jen za velmi speciálních podmínek (nikoliv obecně).

Stuvelova indexní čísla

Postup navržený v polovině 50. let 20. století nizozemský statistik **Gerhard Stuvel** se vrací ke klasickým přístupům z počátku století. Vyložíme jeho základní myšlenku[3]:

1) Hledá se dvojice indexních čísel (cenové P_{01}^{St}, kvantové Q_{01}^{St}) přímo splňující axiom záměny faktorů **(F2)**, tj. aby platilo

(A)
$$P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^{St} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)} \quad .$$

poznámka 1

Ke zkrácení zápisu užijeme úspornější označení výrazu na pravé straně jako $\frac{M(1)}{M(0)}$, přičemž peněžní výdaje $M(1) = \sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)$, resp. $M(0) = \sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)$, vyjadřují náklady na pořízení úplné skupiny komodit v běžném resp. základním období.[4]

2) Druhou podmínkou, kterou má hledaná dvojice splňovat, je diferenční relace, která poměřuje rozdíly mezi takto konstruovanými indexními čísly P_{01}^{St}, Q_{01}^{St} a příslušnými Laspeyresovými indexními čísly:

(B)
$$Q_{01}^{St} - Q_{01}^{L} \cong P_{01}^{St} - P_{01}^{L} \quad .$$

Ve vztahu **(B)** je možné uvažovat dva možné případy ve specifikaci relace "$\cong$":

(B1) : relace (B) platí přesně, tj. "$\cong$" vezmeme jako rovnost,
(B2) : relace (B) platí s určitou, přesně specifikovanou odchylkou.

---

[3] **Stuvel, G. : A New Index Number Formula.** ***Econometrica 1957*****, Vol. 25.**

poznámka 2

Uvedená úvaha je vcelku oprávněná, vezmeme-li v úvahu poznatky statistické praxe, kde zvláště pro krátká časová období ukazuje, že rozdíly $P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{L}$, ale i $P_{01}^{P} \cdot Q_{01}^{P}$ od hodnoty $\frac{M(1)}{M(0)}$ nejsou nijak velké. Jak víme, přesně tento požadavek nesplňuje Laspeyresovo ani Paascheho indexní číslo, avšak lze snadno ověřit, že tato indexní čísla jej „splňují" křížovým způsobem tj.

$$P_{01}^{L} Q_{01}^{P} = P_{01}^{P} Q_{01}^{L} = \frac{M(1)}{M(0)} \quad .$$

Postup zaslouží komentář ještě z tohoto důvodu:

Jak víme, **okruh původních 8 Fisherových tesů nevede k určení indexního čísla v tom smyslu, že by nějaká podskupina testů vedla deduktivně jednoznačně ke konstrukci určitého typu indexu.** Stuvelova cesta, resp. formulace podmínky (B) spolu s přijetím podmínky (A) k takovému jednoznačnému určení vede (stačí tedy tyto dvě podmínky, abychom konkrétní konstrukt, jak uvidíme, získali).

Původní Stuvelův návrh

Z povahy zadání úlohy je zřejmé, že se hledá řešení dvou rovnic (pro neznámé P_{01}^{St} a Q_{01}^{St})

(A)
$$P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^{St} = \frac{M(1)}{M(0)} \quad ,$$

(B1)
$$Q_{01}^{St} - Q_{01}^{L} = P_{01}^{St} - P_{01}^{L} \quad .$$

Za daných předpokladů bude předmětem Stuvelovy úlohy nalezení řešení dvou rovnic (jedné lineární, druhé kvadratické) s neznámými P_{01}^{St} a Q_{01}^{St}, které jsou vyjádřeny pomocí známých ostatních veličin, tj. $M(1), M(0), P_{01}^{L}, Q_{01}^{L}$.

K nalezení řešení užijeme např. substituci z **(B1)** $Q_{01}^{St} = P_{01}^{St} - P_{01}^{L} + Q_{01}^{L}$, která po dosazení do **(A)** dává kvadratickou rovnici s neznámou P_{01}^{St}:

$$\left(P_{01}^{St}\right)^{2} - \left(P_{01}^{L} - Q_{01}^{L}\right) \cdot P_{01}^{St} - \frac{M(1)}{M(0)} = 0 \quad .$$

Následně vypočteme symetrický vztah pro Q_{01}^{St} .

Řešení získané standardním postupem, tj. nalezením kořenů kvadratické rovnice, má tvar:

(S1)
$$Q_{01}^{St} = \frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2}\right)^{2} + \frac{M(1)}{M(0)}} \quad ,$$

(S2)
$$P_{01}^{St} = \frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2}\right)^{2} + \frac{M(1)}{M(0)}} \quad .$$

poznámka 3 Vzhledem k tomu, že pro přijatelnou ekonomickou interpretaci mají smysl jen kladné hodnoty indexních čísel, je nutno se omezit jen na kladné kořeny kvadratické rovnice. (Výrazy uvnitř odmocnin **(1)** a **(2)** jsou větší než příslušné výrazy před odmocninami.)

Výrazy **(1), (2)** můžeme zapsat formou, která bude obsahovat přímo vektory cen a množství $p(0), p(1), q(0), q(1)$ - obě indexní čísla obsahují plnou čtveřici. Dostaneme

$$Q_{01}^{\ St} = \frac{\dfrac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} - \dfrac{\sum p_i(1)q_i(0)}{\sum p_i(0)q_i(0)}}{2} + \sqrt{\frac{\left(\dfrac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} - \dfrac{\sum p_i(1)q_i(0)}{\sum p_i(0)q_i(0)}\right)^{2}}{4} + \frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)}}$$

$$= \frac{\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0) + \sqrt{\left(\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0)\right)^{2} + 4.\left(\sum p_i(1)q_i(1)\right)\left(\sum p_i(0)q_i(0)\right)}}{2\sum p_i(0)q_i(0)}$$

Podobně bychom získali

$$P_{01}^{\ St} = \frac{\sum p_i(1)q_i(0) - \sum p_i(0)q_i(1) + \sqrt{\left(\sum p_i(1)q_i(0) - \sum p_i(0)q_i(1)\right)^{2} + 4.\left(\sum p_i(1)q_i(1)\right)\left(\sum p_i(0)q_i(0)\right)}}{2\sum p_i(0)q_i(0)}$$

Modifikovaný Stuvelův návrh

Analogicky předchozímu se hledá řešení dvou vztahů (pro obecně jiné neznámé P_{01}^{St*}, Q_{01}^{St*})

(A)
$$P_{01}^{St*} \cdot Q_{01}^{St*} = \frac{M(1)}{M(0)} \quad ,$$

(B2)
$$Q_{01}^{St*} - Q_{01}^{L} = P_{01}^{St*} - P_{01}^{L} + \Delta ,$$

kde odchylka Δ má přesně specifikovaný tvar (interpretovatelný jako „míra nesplnění“ axiomu **(F2)** Laspeyresovými indexními čísly):

(B2x)
$$\Delta = P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{L} - \frac{M(1)}{M(0)} \quad .$$

Obdobným způsobem jako dříve řešíme soustavu dvou rovnic, přičemž k řešení použijeme opět.substituci $Q_{01}^{St*} = P_{01}^{St*} - P_{01}^{St*} - P_{01}^{L} + Q_{01}^{L} + \Delta$. Po dosazení Q_{01}^{St*} z **(B2x)** do **(A)** máme

$$\left(P_{01}^{St*}\right)^2 - \left(P_{01}^{L} - Q_{01}^{L} - P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{L} + \frac{M(1)}{M(0)}\right) \cdot P_{01}^{St*} = \frac{M(1)}{M(0)}$$

a stejně jako dříve odvodíme jinou dvojici indexních čísel, která mají tvar:

(S3)

$$P_{01}^{St*} = \frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L} \cdot \left(1 + P_{01}^{L}\right) + \dfrac{M(1)}{M(0)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L} \cdot \left(1 + P_{01}^{L}\right) + \dfrac{M(1)}{M(0)}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}}$$

(S4)

$$Q_{01}^{St*} = \frac{Q_{01}^{L} \cdot \left(1 + P_{01}^{L}\right) - P_{01}^{L} - \dfrac{M(1)}{M(0)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} \cdot \left(1 + P_{01}^{L}\right) - P_{01}^{L} - \dfrac{M(1)}{M(0)}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}}$$

Obě nalezená indexní čísla mohou být rovněž použita k vystižení globální změny cenového a podobně i objemového komoditního indexu. Opět jsou přijatelné pouze kladné kořeny příslušné kvadratické rovnice.

poznámka 4 Jak je patrné, bylo by možné vyvodit i další indexní čísla, pokud bychom v podmínkách (A) resp. (B1-B2) uvažovali vztahy k jiným než k Laspeyresovým indexním číslům (např. k Paascheho či k Edgeworthovým).

Ověření Fisherových axiomů u Stuvelových čísel

Na závěr ještě vyšetříme, v jaké míře vyhovuje prvá **dvojice Stuvelových indexních čísel (S1)**, **(S2)** testům Irvinga Fishera:

Test identity **(F1)** je zřejmě splněn, neboť pro obě Laspeyresova indexní čísla platí, že $P_{00}{}^{L} = 1$, $Q_{00}{}^{L} = 1$ a výrazy pro $P_{00}{}^{St}$, $Q_{00}{}^{St}$ se tedy redukují na odmocninu z podílu $\frac{M(1)}{M(0)}$, která je při ztotožnění obou období rovna 1.

Platnost **(F2)** je zřejmá, neboť jde přímo o definiční podmínku **(A)**, na základě níž je dvojice indexů odvozována.

Axiom **(F3)** je u dvojice Stuvelových indexních čísel **(S1)**, **(S2)** rovněž splněn, jak nepřímo ukazuje sám autor. Přímé ověření by vyžadovalo platnost vztahu

$$P_{01}^{St} P_{10}^{St} = \left(\frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2} \right)^{2} + \frac{M(1)}{M(0)}} \right) .$$

$$\left(\frac{P_{10}^{L} - Q_{10}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{10}^{L} - P_{10}^{L}}{2} \right)^{2} + \frac{M(0)}{M(1)}} \right) = 1$$

Po roznásobení dostaneme dosti komplikovaný výraz (k jeho přesnému tvaru nechť se čtenář dopracuje sám), který však po postupném zjednodušování nabude hodnotu 1.

Okružnost **(F4)** není Stuvelovými indexními čísly splněna, což lze ověřit přímým vyšetřením příslušné podmínky.

Naproti tomu axiomy určenosti **(F5)** a souměřitelnosti **(F6)** platí, neboť je splňují Laspeyresova indexní čísla v jejich definici, přičemž též výraz v odmocnině **(S1)** je vždy definován a není identicky nulový (dokonce i kdyby nastala náhodná shoda $P_{01}{}^{St} = Q_{01}{}^{St}$). Souměřitelnosti pak vyhovují všechny výrazy vystupující v definici **(S1)**.

Pokud jde o axiom proporcionality **(F7)**, pak zřejmě platí $P_{01}{}^{St} = c$, resp. $Q_{01}{}^{St} = d$ pro konstantu c splňující $p(1) = c.p(0)$, resp. konstantu d splňující $q(1) = d.q(0)$.

Platnost **(F8)** je zřejmá.

Dodatek: platnost (F3) pro 1. Stuvelovo číslo

Označíme $A=\sum_{i=1}^{n} p_i(0)q_i(0)$, $B=\sum_{i=1}^{n} p_i(1)q_i(0)$, $C=\sum_{i=1}^{n} p_i(0)q_i(1)$ $D=\sum_{i=1}^{n} p_i(1)q_i(1)$

S těmito symboly máme

$$P_{01}{}^{L}=\frac{B}{A}\text{ , }Q_{01}{}^{L}=\frac{C}{A}\text{ , }P_{10}{}^{L}=\frac{C}{D}\text{ , }Q_{10}{}^{L}=\frac{B}{D}\text{ , }\frac{M(1)}{M(0)}=\frac{D}{\acute{A}}\text{ , }\frac{M(0)}{M(1)}=\frac{A}{D}$$

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\left(\frac{\frac{B}{A}-\frac{C}{A}}{2}+\sqrt{\left(\frac{\frac{B}{A}-\frac{C}{A}}{2}\right)^2+\frac{D}{A}}\right).\left(\frac{\frac{C}{D}-\frac{B}{D}}{2}+\sqrt{\left(\frac{\frac{C}{D}-\frac{B}{D}}{2}\right)^2+\frac{A}{D}}\right)=$$

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\left(\frac{B-C}{2A}+\sqrt{\left(\frac{B-C}{2A}\right)^2+\frac{D}{A}}\right).\left(\frac{C-B}{2D}+\sqrt{\left(\frac{C-B}{2D}\right)^2+\frac{A}{D}}\right)=$$

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\frac{1}{2A}\left(B-C+\sqrt{(B-C)^2+4AD}\right).\frac{1}{2D}\left(C-B+\sqrt{(C-B)^2+4AD}\right)=$$

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\frac{1}{4AD}\left(\begin{array}{l}(B-C)(C-B)+(C-B).\sqrt{(B-C)^2+4AD}+(B-C)\sqrt{(C-B)^2+4AD}+\\ \sqrt{(B-C)^2.(C-B)^2+16AD+(C-B)^2 4AD+(B-C)^2.4AD}\end{array}\right)$$

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\frac{1}{4AD}\left(-(B-C)^2+(C-B).\sqrt{(B-C)^2+4AD}+(B-C)\sqrt{(C-B)^2+4AD}+\sqrt{\left(4AD+(B-C)^2\right)^2}\right)$$

Prostřední dva členy se vyruší, čtvrtý je odmocnina z kvadrátu, takže máme

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\frac{1}{4AD}\left(-(B-C)^2+4AD+(B-C)^2\right)\text{ a tedy}$$

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\frac{1}{4AD}(4AD)=1 \qquad \square\,.$$