Obecný problém dekompozice - Divisiův přístup a řešení

Odlišný způsob k problematice indexních čísel uplatnil v polovině 20.let 20.století francouzský matematik **Francois Divisia**[1]. Formuloval úlohu nalezení agregátního indexu tak, že hledal - pro libovolné časové období t - multiplikativní rozklad „makroagregátu“ $P(t) \cdot Q(t)$ reprezentujícího součin cenového a kvantového indexního čísla do tvaru

(4.1) $$P(t) \cdot Q(t) = \sum_{i=1}^{N} p_i(t) \cdot q_i(t) \quad ,$$

tj. tak , aby ve všech okamžicích spojitě uvažovaného času platila aditivní dekompozice agregátu na dílčí součiny příslušné ***cenové a kvantové „mikrofunkce“*** všech komodit. Funkce $P(t)$ jako indikátor všeobecné cenové úrovně má přitom co nejlépe vystihovat pohyb cenové hladiny, podobně funkce $Q(t)$ jako reprezentant souhrnného fyzického objemu vývoj množstevního indexu.

O „mikrofunkcích“ cen a kvantit $p_i(t)$, resp. $q_i(t)$ Divisia předpokládal, že mají:
- spojité první derivace (podle času),
- kladné hodnoty na celém uvažovaném intervalu $< 0, T >$,
- konečnou variaci na každém podintervalu $< t-1, t >$ spadajícího do $< 0, T >$.

Takto obecně formulovaná úloha však není bez dalšího jednoznačně řešitelná, což snižuje její uplatnitelnost pro reálné potřeby. Je zřejmé, že spolu s funkcemi $P(t)$ a $Q(t)$ je řešením úlohy také každá dvojice tvaru $c \cdot P(t)$ a $\dfrac{Q(t)}{c}$ pro nějakou kladnou konstantu c.

4.1 Spojitý přístup

Vzhledem k derivovatelnosti funkcí $P(t)$ a $Q(t)$, můžeme derivaci (4.1) zapsat jako (4.2)

$$Q(t) \cdot \frac{\partial P(t)}{\partial t} + P(t) \cdot \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial p_k(t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial q_k(t)}{\partial t} \quad .$$

Předpokládáme-li kladnost funkcí $P(t)$ a $Q(t)$ na celém intervalu $< 0, T >$, můžeme dělit součinem $P(t) \cdot Q(t) > 0$. Dostaneme (4.3)

$$\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{\partial P(t)}{\partial t} + \frac{1}{Q(t)} \cdot \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial p_k(t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial q_k(t)}{\partial t} \quad .$$

Dále samostatně uvažujeme aditivní rozklad cenové změny v (4.3) na

(4.4A) $$\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{\partial P(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial p_k(t)}{\partial t} \quad ,$$

resp. kvantové změny v témže výrazu na

[1] Divisia, F.: L´indice monétaire et la Theorie de la monnaie-revue d´Economie politique (1925)

(4.4B)
$$\frac{1}{Q(t)}\cdot\frac{\partial Q(t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t)\cdot q_i(t)}\cdot\frac{\partial q_k(t)}{\partial t}\quad .$$

Aditivním rozkladem změny cenové a kvantové situace a dále úpravami využívajícími aparátu Stieltjesova integrálu *(pro funkce s konečnou variací)* lze dospět k aproximativnímu tvaru

(4.5)
$$\frac{1}{P\left(t^*\right)}\cdot\left[P(t)-P(t-1)\right]=\sum_{i=1}^{N}g_k\left(t_k^*\right)\cdot\left[p_k(t)-p_k(t-1)\right]$$

pro nějaké body t^*, t_k^* z intervalu $< t-1, t >$ a nějakou váhovou funkci g_k , např. tvaru

(4.6A)
$$g_k\left(t_k^*\right)=\frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t)\cdot q_i(t)}\quad .$$

Pokud za oba tyto body vezmeme levý krajní bod intervalu, tj. $t^* = t_k^* = t-1$ a podobně dosadíme za funkci $g_k\left(t_k^*\right)=g_k(t-1)$ výraz

(4.6B)
$$g_k\left(t_k^*\right)=\frac{q_k(t-1)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t-1)\cdot q_i(t-1)}\quad ,$$

obdržíme po úpravě vztah

(4.7)
$$\frac{P(t)}{P(t-1)}=\frac{\sum_{i=1}^{N}p_k(t)\cdot q_k(t-1)}{\sum_{i=1}^{N}p_k(t-1)\cdot q_k(t-1)}\quad ,$$

neboli Laspeyresovo cenové indexní číslo vztažené k bodům $t-1,\ t$ intervalu. Cenové indexní číslo pro celé uvažované období $< 0, T >$ pak získáme zřetězením, tedy

(4.8)
$$P_{0T}^{D}=\overline{P_{0T}^{L}}=P_{01}^{L}\cdot P_{12}^{L}\cdot\ldots\cdot P_{T-1,T}^{L}\quad .$$

Nahrazením $t^* = t_k^* = t$ a dosazením $g_k\left(t_k^*\right)=g_k(t)$ výrazu

(4.9)
$$g_k(t)=\frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t)\cdot q_i(t)}$$

odvodíme tímto postupem *zřetězené Paascheho cenové indexní číslo* $P^{P}{}_{01}$. Podobně lze jinými speciálními volbami získat i jiná zřetězená indexní čísla, např. *Edgeworthovo*.

Kvantová indexní čísla bychom získali obdobně z rozkladu kvantové změny v (4.4B). Dosazením $t^* = t_k^* = t-1$ obdržíme $Q_{t-1,t}^{L}$ a již popsaným následným zřetězením Q_{0t}^{L} .

4.2 Diskrétní přístup

Postup lze obdobně použít také na diskrétní případ, kdy v intervalu $< 0, T >$ uvažujeme množinu ekvidistantních izolovaných bodů $t = 0,1,2,....,T$. Opět uvažujeme rozklad agregátu

(4.10) $$P(t)\cdot Q(t) = \sum_{i=1}^{N} p_i(t)\cdot q_i(t) \qquad t = 0,1,2,....,T \quad \text{v } T+1 \text{ okamžicích.}$$

Nejprve vyjádříme levou stranu změny agregátu mezi obdobími $t-1$ a t (libovolnými následujícími): $P(t)\cdot Q(t) - P(t-1)\cdot Q(t-1)$ v podílovém vyjádření (4.11)

$$\frac{[P(t)-P(t-1)]\cdot Q(t) + [Q(t)-Q(t-1)]\cdot P(t-1)}{P(t-1)\cdot Q(t)} = \frac{[P(t)-P(t-1)]}{P(t-1)} + \frac{[Q(t)-Q(t-1)]}{Q(t)}$$

Odpovídající souhrnnou změnu N dílčích změn cen a kvantit napravo vyjádříme jako

(4.12) $$\sum_{k=1}^{N} \frac{[p_k(t)-p_k(t-1)]\cdot q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1)\cdot q_i(t)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{[q_k(t)-q_k(t-1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1)\cdot q_i(t)} .$$

Přijmeme-li, že se cenová a množstevní změna hodnotového komplexu odehrávají nezávisle na sobě, můžeme porovnat "stejnolehlé" cenové a kvantové složky samostatně.

Pro relativní cenovou složku dostaneme rozklad tvaru

(4.13) $$\frac{P(t)-P(t-1)}{P(t-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [p_k(t)-p_k(t-1)]\cdot q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1)\cdot q_i(t)} = P_{t-1,t}^{P} - 1 \ ,$$

Kde $P_{t-1,t}^{P}$ představuje Paascheho cenové indexní číslo pro změnové období $t-1,t$.

Obdobně odvodíme pro relativní kvantovou změnovou komponentu vyjádření

(4.14) $$\frac{Q(t)-Q(t-1)}{Q(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [q_k(t)-q_k(t-1)]\cdot p_k(t-1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1)\cdot q_i(t)} = 1 - \left(Q_{t-1,t}^{L}\right)^{-1} , \qquad \text{kde}$$

$Q_{t-1,t}^{L}$ zastupuje Laspeyresovo kvantové indexní číslo pro změnové období $t-1,t$.

(Po odstranění -1 na obou stranách dostaneme $\dfrac{P(t)}{P(t-1)} = P_{t-1,t}^{P}$ a $\dfrac{Q(t)}{Q(t-1)} = Q_{t-1,t}^{L}$) .

Sestavíme-li řetězové indexy $\dfrac{P(1)}{P(0)}, \dfrac{P(2)}{P(1)}, ... , \dfrac{P(T-1)}{P(T-2)}, \dfrac{P(T)}{P(T-1)}$ a tyto vynásobíme, dostaneme vyjádření $\dfrac{P(T)}{P(0)} = P_{t,1}^{P}\cdot P_{1,2}^{P}\cdot ....\cdot P_{t-2,t-1}^{P}\cdot P_{t-1,t}^{P} = P^{*P}_{0T}$, což je zřetězené Paascheho cenové indexní číslo P^{*P}_{0T}. Podobně bychom získali pro $\dfrac{Q(T)}{Q(0)}$ zřetězené Laspeyresovo kvantové indexní číslo Q^{*L}_{0T} .

Poznámka Pokud bychom vycházeli z dekompozice hodnotového makroagregátu způsobem

(4.17) $$[P(t)-P(t-1)]\cdot Q(t-1)+[Q(t)-Q(t-1)]\cdot P(t) \quad ,$$

obdrželi bychom analogickou cestou dvojici zřetězených indexních čísel P^{*L}_{0T}, Q^{*P}_{0T} .

Postupem podle Divisiova schématu obdržíme pro spojitý i diskrétní případ *zřetězené indexní číslo splňující axiom záměny faktorů.* Nevyhneme se však nejednoznačnosti určení v důsledku neurčitosti volby multiplikativního rozkladu (*diskrétní případ*), resp. odhadu aproximujícího Stieltjesova integrálu *(spojitý případ)*.

Problém spojený s praktickou aplikací Divisiova přístupu je ten, že ceny a kvantity nelze měřit kontinuálně, ale vždy jen v určitých odstupech. Pro praktické užití by musely být Divisiovy indexy se spojitým časem aproximovány diskrétními, přičemž existuje více možností jak takovou aproximaci provést.

E.Diewert [1980] ukázal, že kromě Laspeyresova a Paascheho indexu mohou být získány jako speciální aproximace $P(1)/P(0)$ další indexy, např. Törnquistův index, pokud vezmeme

$$\ln P_{01}^{\ T} = 1/2.\sum_{i=1}^{N}(s_i(0)+s_i(1)).\ln(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}) \quad , \text{ kde účasti } s_i(t)=\frac{p_i(t)q_i(t)}{\sum_{j=1}^{N}p_j(t)q_j(t)}$$

Postup, který použil Divisia v případě indexů se spojitým časem, uplatnil již o něco dříve anglický statistik T.L.Bennet[2] až na to, že neuplatnil v (4.1) dělení výrazem $\boldsymbol{p}(t).\boldsymbol{q}(t)$.

T.L.Bennet [1920] navíc navrhl následující diskrétní aproximaci k měření diferencí (nikoliv tedy podílů jako Divisia) na agregátních cenových a množstevních úrovních:

(4.18) $$\Delta P \equiv P(1)-P(0) \equiv 1/2.\sum_{i=1}^{N}(q_i(0)+q_i(1)).(p_i(1)-p_i(0)) \quad ,$$

(4.19) $$\Delta Q \equiv Q(1)-Q(0) \equiv 1/2.\sum_{i=1}^{N}(p_i(0)+p_i(1)).(q_i(1)-q_i(0)) \quad .$$

Ukázal přitom, že rozdíl výdajů mezi obdobími $\sum_{i=1}^{N}p_i(1)q_i(1)-\sum_{i=1}^{N}p_i(0)q_i(0)$ dává přesně výraz rovný $\Delta P+\Delta Q$, kde ΔP a ΔQ jsou definovány pravými stranami (4.18), (4.19).

Poznámka Obecná definice Divisiova spojitého indexu je čistě matematickou konstrukcí a nemusí mít žádnou souvislost s rozklady indexních čísel, dokonce ani nemusí mít žádný vztah k ekonomickému prostředí.

Jean Villé [1951-52] a **C.R.Hulten** [1973] analyzovali Divisiovy indexy v prostředí cen a spotřebovaných množství za předpokladu, že spotřebitel optimalizuje své chování (z hlediska minimalizace nákladů) a že příslušná užitková funkce je lineárně homogenní [3].

Protože se indexy $P_{01}^{\ L}, P_{01}^{\ P}, P_{01}^{\ T}$ mohou lišit, Divisiův přístup nevede k jednoznačnému návodu, jak řešit problém. Jiné návrhy, jak aproximovat Divisiův index se spojitým časem pomocí diskrétních dat podali **Paul A. Samuelson** a **Subramanian Swamy** [1974].

[2] **Bennet,T.L.**: The Theory of Measurement of Changes in Cost of Living. Journal of the Royal Statistical Socierty 83/1920 s.455-462

[3] **Lineárně homogenní funkce N – proměnných** $\mathbf{x} = (x_1,\dots, x_N)$ splňuje vlastnost $F(\lambda\, \mathbf{x}) = \lambda.F(\mathbf{x})$ pro libovolné skalární $\lambda > 0$.