Zobecnění Koňusových kvantových indexních čísel.

Základní poznatky přinesli v tomto směru R.G.D.Allen, P.Samuelson, R.Pollak, S.Swamy a E.Diewert. Některé navržené konstrukty nesou příslušná autorská pojmenování: **Pollakův, Malmquistův** a **Allenův kvantový** (též ***množstevní*** nebo ***objemový***) **index.** Koňusova kvantová indexní čísla definovaná v (5.5) a (5.6) jsou vesměs jejich speciálními příklady nebo jsou použita v konstrukci těchto složitějších indexů.

Nejprve uvedeme Pollakův-Koňusův kvantový (objemový) index, jehož obsahem je podíl objemu výdajů běžného a základního období a Koňusova cenového indexního čísla

Definice 5.5

Pollakův-Koňusův kvantový (objemový) index [Pollak 1971] je definován jako

(5.39)
$$Q_{01}{}^{PK}(\boldsymbol{q}^*(t)) = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i{}^*(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i{}^*(t)}} = \frac{\dfrac{M(1,1)}{M(0,0)}}{\dfrac{M^*(1,t)}{M^*(0,t)}} = \frac{\dfrac{E(u(\boldsymbol{q}(1));p(1))}{E(u(\boldsymbol{q}^*(t));p(1))}}{\dfrac{E(u(\boldsymbol{q}(0));p(0))}{E(u(\boldsymbol{q}^*(t));p(0))}} ,$$

V poslední z těchto definičních forem je užita notace s výdajovou funkcí $E(u(\boldsymbol{q}(t)),\boldsymbol{p}(t.))$. Označení "$t$" v argumentech cenového a množstevního vektoru zastupuje příslušnost k období, v němž jsou měřeny ceny či kvantity; toto období však nemusí být nutně jen základní nebo běžné. Je patrné, že definice $Q_{01}{}^{PK}(\boldsymbol{q}^*(t))$ závisí na referenčním vektoru $\boldsymbol{q}^*$, který se v ní vyskytuje. Zavedení Pollakova-Koňusova kvantového indexu vychází z analogie z jednokomoditního případu, kdy je možné psát objemový index pomocí cenového jako

(5.40A)
$$^{(1)}\widetilde{Q}_{01}(1) = \frac{\dfrac{p(1).\,q(1)}{p(0).\,q(0)}}{\dfrac{p(1)}{p(0)}}$$

Pro obecnou N – komoditní situaci tak obdobně dostaneme

(5.40B)
$$ {}^{(N)}\widetilde{Q}_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1)q_i(1)}{p_i(0)q_i(0)}}{{}^{(N)}\widetilde{P}_{01}} , $$

přičemž jednoznačnost bude dána až po konkrétní volbě cenového indexu ${}^{(N)}\widetilde{P}_{01}$.

Konkretizujeme-li volbu období t v cenovém indexu ${}^{(N)}\widetilde{P}_{01}$ tak, že vezmeme základní, resp. běžné období, získáme – pro případ cen $\boldsymbol{p}(0)$ - Koňusův-Paascheho kvantový index

$$ Q_{01}{}^{KP} = \frac{E(u(\boldsymbol{q}(1), \boldsymbol{p}(1))}{E(u(\boldsymbol{q}^*(1), \boldsymbol{p}(0))} = \frac{M(1,1)}{M^*(1,0)} $$

- pro případ vzetí $\boldsymbol{p}(1)$ dostaneme Koňusův-Laspeyresův kvantový index

$$ Q_{01}{}^{KL} = \frac{E(u(\boldsymbol{q}^*(0), \boldsymbol{p}(1))}{E(u(\boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{p}(0))} = \frac{M^*(0,1)}{M(0,0)} $$

Oba tyto indexy však mohou být zobecněny i jiným způsobem, než je Pollakův návrh.

K formulaci dalšího zobecňujícího indexu, Malmquistova kvantového indexu, je nutné zavést pojem ***distanční*** (někdy též ***deflační***) funkce[1]. ***Deflační*** funkce definovaná ve vztahu k užitkové funkci $u(\boldsymbol{q})$ a k danému (*referenčnímu)* komoditnímu vektoru $\boldsymbol{q}$ je dána takovou hodnotou konstanty $k > 0$, kterou je třeba vynásobit (tj. proporčně zvětšit nebo zmenšit) daný referenční vektor $\boldsymbol{q}$, aby hodnota $u(\boldsymbol{q})$ spadla přesně na indiferenční křivku odpovídající hladině užitku ${}^0u$. Vyslovme definici

Definice 5.6 **Distanční (*deflační*) funkce** [R.W.Shephard 1953/1971]

Mějme pevně dánu hladinu užitku ${}^0u$ a (přímou) užitkovou funkci $u(\boldsymbol{q})$, v níž jsou hodnoty komoditního vektoru $\boldsymbol{q}(t)$ získány v čase t. Pak definujeme

(5.41)
$$ D({}^0u, \boldsymbol{q}(t)) \equiv Max_k \left\{ k \,; u(\boldsymbol{q}(t)/k) \geq {}^0u ; k > 0 \right\} $$

[1] Pojem distanční funkce zavedl (v kontextu dalších pojmů teorie produkce) R.W.Shephard v Theory of Cost and Production Functions 1953/1970.

Deflační funkce definovaná ve vztahu k užitkové funkci $u(\boldsymbol{q})$ a danému (*referenčnímu*) komoditnímu vektoru $\boldsymbol{q}$ je dána takovou hodnotou konstanty $k > 0$, kterou je třeba vynásobit (tj. proporčně zvětšit nebo zmenšit) daný referenční vektor $\boldsymbol{q}$, aby spadl přesně na indiferenční křivku odpovídající hladině užitku $u(\boldsymbol{q})$.

Poznámka 5.3 Hodnota distanční funkce, jak patrno z definice (5.41) informuje o tom, zda je uvažovaný komoditní vektor $\boldsymbol{q}(t)$ zapotřebí proporcionálně zvětšit – při $k < 1$- nebo naopak je ho možno proporcionálně zmenšit – při $k > 1$, abychom s ním dosáhli právě velikost užitku ${}^0u$. V případě neutrální (jedničkové) hodnoty distanční funkce je tento vektor právě tak „postačující“ k získání hladiny užitku ${}^0u$. To ovšem neznamená, že by byly všechny statky využity právě v minimálních nutných množstvích (jde o proporční změnu $\boldsymbol{q}(t)$).

Hodnoty distanční funkce tedy leží v rozmezí $(0, +\infty)$, přičemž hodnoty $D({}^0u, \boldsymbol{q}(t))$ větší než 1 znamenají, že komodity jsou nasazeny ve „zbytečně velkých množstvích“, zatímco hodnoty menší než 1 indikují „nedostatečná“ množství statků pro dosažení požadované úrovně ${}^0u$. V takto zavedeném kontextu je pak

Definice 5.7

Malmquistův kvantový (objemový) index [S. Malmquist 1953] definován jako

(5.42) $$Q_{01}{}^M(\boldsymbol{q}) = \frac{D(u(\boldsymbol{q});\boldsymbol{q}(1))}{D(u(\boldsymbol{q});\boldsymbol{q}(0))} ,$$

kde $D(u,\boldsymbol{q}(t)) \equiv Max_k\{k; u(\boldsymbol{q}(t)/k) \geq u; k > 0\}$ je deflační/distanční funkce, která odpovídá užitkové funkci $u(\boldsymbol{q})$. Znamená to tedy, že

Výraz $D(u(\boldsymbol{q});\boldsymbol{q}(1))$ znamená nejvyšší hodnotu k, kterou je třeba deflovat vektor kvantit $\boldsymbol{q}(1)$, aby se dostal na hranici ***užitkové množiny vstupů*** $L(u(\boldsymbol{q})) = \{z, u(z) \geq u(\boldsymbol{q})\}$[2] odpovídající referenčnímu vektoru kvantit $\boldsymbol{q}(1)$,

Výraz $D(u(\boldsymbol{q});\boldsymbol{q}(0))$ znamená nejvyšší hodnotu k, kterou je třeba deflovat vektor kvantit $\boldsymbol{q}(0)$, aby spadl na hranici ***užitkové množiny vstupů*** $L(u(\boldsymbol{q})) = \{z, u(z) \geq u(\boldsymbol{q})\}$ odpovídající referenčnímu vektoru kvantit $\boldsymbol{q}(0)$.

[2] V angličtině jde o „***utility input set***“ jako obdoby „***production input set***“ v produkčním kontextu.

Malmquistův index je definován jako podíl obou těchto hodnot. Jeho nevýhodou je tedy, podobně jako u jiných funkcionálních indexních čísel, závislost na nepozorovatelné užitkové funkci $u(\boldsymbol{q})$. Diewert v [6] ukázal, že také pro tento kvantový index je možné odvodit dolní a horní hranici podobně jako pro Koňusova indexní čísla a že tento objemový index splňuje podmínky obdobné testu střední hodnoty (F10) formulovaného pro množstevní indexní čísla. Platí totiž nerovnosti[3]

(5.43) $$\min_i \left\{ \frac{q_i(1)}{q_i(0)} \right\} \le Q_{01}{}^{M}(\boldsymbol{q}) \le \max_i \left\{ \frac{q_i(1)}{q_i(0)} \right\}$$

Předpoklad o výdajově minimalizujícím chování spotřebitele není nezbytný ani k definici samotného Malmquistova kvantového indexu ani k zajištění platnosti omezení (5.43). Abychom však mohli dále stanovit hranice těsněji vymezující hodnoty Malmquistova kvantového indexu, potřebujeme již předpokládat, že spotřebitel minimalizuje své výdaje ve vztahu k dosahovanému užitku a současně musíme doplnit předpoklad o tom, že vektor $\boldsymbol{q}(t)$ (jinak určený obecným obdobím t) musí být buď $\boldsymbol{q}(0)$ nebo $\boldsymbol{q}(1)$. Za těchto podmínek platí:

(5.44) $$Q_{01}{}^{M}(q(1)) \ge \frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(1)q_i(0)} = Q_{01}{}^{P} \quad \text{a také} \quad Q_{01}{}^{M}(q(0)) \le \frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} = Q_{01}{}^{L}$$

tzn. hodnota kvantového Malmquistova indexu je zdola omezená Paascheho a shora Laspeyresovým množstevním indexem. Diewert rovněž ukázal, že platí-li hypotéza o výdajově minimalizačním chování spotřebitele, existuje $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$ takové, že $Q_{01}{}^{M}[\lambda.\boldsymbol{q}(0)+(1-\lambda).\boldsymbol{q}(1)]$ leží mezi $P_{01}{}^{P}$ a $P_{01}{}^{L}$. Tím je řečeno, že Paascheho, resp. Laspeyresovo kvantové indexní číslo vymezují Malmquistův index do intervalu pro nějakou indiferenční hladinu indexovanou množstevním vektorem , který je váženým průměrem s vahami λ a $1-\lambda$ dvou pozorovatelných vektorů $\boldsymbol{q}(0)$ resp. $\boldsymbol{q}(1)$.

Definice 5.8

Allenův kvantový (objemový) index [Allen 1949] je definován v kontextu přímé užitkové funkce $u(\boldsymbol{q})$ a k ní příslušné výdajové funkce $E(u(\boldsymbol{q}(*)), \boldsymbol{p}(t))$ jako

(5.45) $$Q_{01}{}^{A} = \frac{E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(1)); \boldsymbol{p}(t))}{E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(0)); \boldsymbol{p}(t))} ,$$

---

[3] Jde o obdobnou nerovnost – vyjádřenou pro *poměry množství* – jako je podmínka testu střední hodnoty **(F10)**.

kde $E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(1)), \boldsymbol{p}(1))$ je výdajová funkce odpovídající užitkové funkci s komoditními množstvími $\tilde{q}_1(1), \tilde{q}_2(1), \ldots, \tilde{q}_N(1)$ a podobně $E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(0)), \boldsymbol{p}(0))$ je hodnota výdajové funkce příslušná k užitkové funkci s komoditami v množstvích $\tilde{q}_1(0), \tilde{q}_2(0), \ldots, \tilde{q}_N(0)$ [4]. Index je tedy definován jako podíl dvou výdajových funkcí, z nichž v jedné se uplatňují množství statků nakoupená v běžném období, ve druhé množství statků nakoupená v základním období. Vše uvažujeme v situacích, kdy se spotřebitel změnami nákupů přizpůsobuje cenovým změnám.

Definice Allenova indexu je tedy spojena s trojicí vektorů $\tilde{\boldsymbol{q}}(0), \tilde{\boldsymbol{q}}(1), \boldsymbol{p}(t)$, přičemž určení cenového vektoru $\boldsymbol{p}(t)$ není blíže specifikováno.

Poznámka 5.4 Jestliže do Allenova kvantového indexu (5.45) dosadíme za cenový vektor $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)$, obdržíme Koňusovo-Paascheho kvantové indexní číslo $Q_{01}{}^{KP}$; podobně jestliže vezmeme $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(1)$, obdržíme Koňusův-Laspeyresův kvantový index. $Q_{01}{}^{KL}$.

Je totiž bezprostředně vidět, že po těchto dosazeních budeme mít

$$(5.46A)\quad Q_{01}{}^{A}(\boldsymbol{p}(0)) = \frac{E(u(\boldsymbol{q}^{*}(1), \boldsymbol{p}(0))}{E(u(\boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{p}(0))} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i^{*}(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)} = \frac{M^{*}(0,1)}{M(0,0)} = Q_{01}^{KL} \quad ,$$

a analogicky

$$(5.46B)\quad Q_{01}{}^{A}(\boldsymbol{p}(1)) = \frac{E(u(\boldsymbol{q}(1), \boldsymbol{p}(1))}{E(u(\boldsymbol{q}^{*}(0), \boldsymbol{p}(1))} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i{}^{*}(0)} = \frac{M(1,1)}{M^{*}(1,0)} = Q_{01}^{KP} \quad ,$$

„Neutrální“ hodnota Allenova indexu (5.45) je zřejmě 1 – bude jí dosaženo právě tehdy, jestliže oba množstevní vektory $\tilde{\boldsymbol{q}}(0), \tilde{\boldsymbol{q}}(1)$ poskytnou stejný užitek. Za této situace a vzhledem k ryzí monotónnosti přímé užitkové funkce i výdajové funkce v užitku ${}^{0}u$ [5] bude platit $E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(1); \boldsymbol{p}) = E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(0); \boldsymbol{p})$. Jestliže $E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(1); \boldsymbol{p}) > E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(0); \boldsymbol{p})$, pak je dle (5.45)

---

[4] V případě, že se ceny změní z $\boldsymbol{p}(0)$ na $\boldsymbol{p}(1)$, dosazujeme $\tilde{\boldsymbol{q}}(1) = \boldsymbol{q}^{*}(1), \tilde{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{q}(0)$, v opačném případě – při změně cen z $\boldsymbol{p}(1)$ na $\boldsymbol{p}(0)$ - dosazujeme $\tilde{\boldsymbol{q}}(1) = \boldsymbol{q}(1), \tilde{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{q}^{*}(0)$,

[5] Výdajová funkce je rostoucí v užitku, tzn. pro ${}^{0}u <{}^{1}u$ platí $E({}^{0}u; \boldsymbol{p}) < E({}^{1}u; \boldsymbol{p})$

hodnota Allenova indexu větší než 1, naopak při $E(u(\widetilde{\boldsymbol{q}}(1);\boldsymbol{p}) < E(u(\widetilde{\boldsymbol{q}}(0);\boldsymbol{p})$ dává tento index hodnotu menší než 1. Hodnota Allenova indexu tak přímo indikuje, zda je komoditní kombinace $\widetilde{\boldsymbol{q}}(0)$ více či méně „užitkotvorná" než komoditní kombinace $\widetilde{\boldsymbol{q}}(1)$.

Za zmínku dále stojí, že Allenův kvantový index splňuje „kvantový protějšek" testu záměny faktorů **(F3)** , tj. platí pro něj vztah

(5.47) $$Q_{01}{}^{A}(\boldsymbol{p}(t)).Q_{10}{}^{A}(\boldsymbol{p}(t)) = 1 \quad , \qquad t = 0{,}1 .$$

Z (5.46A-B), jakož i z obou dříve uvedených Koňusových nerovností vyslovených pro kvantová indexní čísla (5.9) a (5.10),dále plyne, že

(5.48A) $$Q_{01}{}^{A}(\boldsymbol{p}(0)) = Q^{KL} \le \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)} = Q_{01}{}^{L}$$

a podobně

(5.48B) $$Q_{01}{}^{A}(\boldsymbol{p}(1)) = Q^{KP} \ge \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(0)} = Q_{01}{}^{P}$$

Také pro Allenův kvantový index (při dosazeních $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(0)$, resp. $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(1)$) tedy existují hranice omezující jeho hodnotu zdola a shora. Toto zjištění má svůj význam, neboť hodnota $Q_{01}{}^{A}$ (jinak nepozorovatelné veličiny závisející na volbě užitkové funkce $u(\boldsymbol{q})$) je takto aspoň jednostranně omezena (z pozorování určitelnými) hodnotami, které na tvaru užitkové funkce nezávisí.

Diewert [1981] s využitím dřívějších výsledků Pollaka [1971] a Samuelsona-Swamyho [1974] dále ukázal, že jestliže je užitková funkce ***neoklasická***[6] , pak pro všechny *kladné vektory cen* a ***kladné vektory kvantit*** platí vztahy

(4.49) $$Q_{01}{}^{P} \le Q_{01}{}^{A}(\boldsymbol{p}(t)) = Q_{01}{}^{PK}(\boldsymbol{q}(t)) = \frac{u(1)}{u(0)} \le Q_{01}{}^{L}$$

[6] O užitkové funkci řekneme, že je *neoklasická*, jestliže je *kladná*, *spojitá* a *lineárně homogenní*.

Jestliže je užitková funkce *neoklasická*, pak se *Allenův kvantový index* rovná (pro všechny cenové referenční vektory $\boldsymbol{p}(t)$) *Pollakovu-Koňusovu* kvantovému indexu (pro všechny referenční vektory kvantit $\boldsymbol{q}(t)$) a oba se současně rovnají podílu $u(1)/u(0)$. Navíc jsou v takovémto případě jak Allenův, tak *Pollakův-Koňusův* index zdola omezeny *Paascheho* kvantovým indexem $Q_{01}{}^{P}$ a shora omezeny *Laspeyresovým* kvantovým indexem $Q_{01}{}^{L}$.

V obecném případě (není-li užitková funkce *neoklasická*), ukázal Diewert, že existuje $\lambda \in <0,1>$ takové, že $Q_{01}{}^{PK}(\lambda.\boldsymbol{q}(0)+(1-\lambda).\boldsymbol{q}(1))$ leží mezi $Q_{01}{}^{P}$ a $Q_{01}{}^{L}$ a existuje též (obecně jiné) $\lambda^{*} \in <0,1>$ takové, že, $Q_{01}{}^{A}(\lambda.\boldsymbol{p}(0)+(1-\lambda).\boldsymbol{p}(1))$ též leží mezi $Q_{01}{}^{P}$ a $Q_{01}{}^{L}$. Znamená to tedy, že (prosté) Paascheho a Laspeyresův kvantové indexy, (které jsou na rozdíl od $Q_{01}{}^{KP}$, $Q_{01}{}^{KL}$ a $Q_{01}{}^{A}$ založeny na pozorovatelných veličinách), ohraničují zdola i shora Koňusovy kvantové indexy i Allenův index, pokud volíme příslušné referenční vektory vhodně mezi $\boldsymbol{q}(0)$ a $\boldsymbol{q}(1)$, resp. mezi $\boldsymbol{p}(0)$ a $\boldsymbol{p}(1)$.

V (5.30) jsme již ukázali, že oba *Koňusovy cenové indexy* $P_{01}{}^{KP}, P_{01}{}^{KL}$ vyhovují podmínce Fisherova testu proporčnosti (F7): jestliže $\boldsymbol{p}(1)=c.\boldsymbol{p}(0)$, pak $P_{01}{}^{KL}=P_{01}{}^{KP}=c$. Je to dáno tím, že výdajová funkce je *lineárně homogenní v cenách.* Obdobnou podmínku však nelze uplatnit ve vztahu ke kvantitám: Ani Polakův-Koňusův kvantový index (5.39) ani Allenův kvantový index (5.45) nejsou lineárně homogenní, nelze tedy obecně psát (při $\boldsymbol{q}(1)=c.\boldsymbol{q}(0)$ s kladným skalárem c)

$$Q_{01}{}^{PK}(\boldsymbol{q}^{*}) = \frac{\dfrac{E(u(\boldsymbol{q}^{c}(1));p(1))}{E(u(\boldsymbol{q}^{*}(t));p(1))}}{\dfrac{E(u(\boldsymbol{q}(0));p(0))}{E(u(\boldsymbol{q}^{*}(t));p(0))}} = c. \qquad ,$$

ani $$Q_{01}{}^{A}(\boldsymbol{q}^{c}(1)) = \frac{E(u(\boldsymbol{q}^{c}(1));\boldsymbol{p}(t))}{E(u(\boldsymbol{q}(0));\boldsymbol{p}(t))} = c.\frac{E(u(\boldsymbol{q}(0));\boldsymbol{p}(t))}{E(u(\boldsymbol{q}(0));\boldsymbol{p}(t))} = c$$

To je mj. důvodem pro vyvození Malmquistova indexu, který tuto vlastnost má.