1. Úvod do teorie portfolia

Úvodní poznámky

Portfolio (dříve užívaný termín ***portfej***) znamenalo původně brašnu na listiny. Ve finanční terminologii to dnes znamená zásobu cenných papírů, které jsou základem určitého druhu příjmů, popřípadě i určitého vlivu v majetkovém rozhodování příslušné organizace (akciové společnosti). Samotné slovo portfolio můžeme též rozdělit na dvě části a to slovo port (přístav nebo něco přenosného) a slovo folio (dvě protilehlé strany, výnos a riziko). Snažit se exaktně definovat, co to teorie portfolia je, je poněkud problematické, a proto se spokojíme s vymezením, které si neklade žádný nárok na exaktní přesnost a zcela vyčerpávající definici.
O teorii portfolia můžeme říci, že se jedná o mikroekonomickou disciplinu, která zkoumá, jaké kombinace aktiv je vhodné držet, aby takto vytvořené portfolio mělo předem určené vlastnosti. Jednodušeji řečeno, jak zbohatnout pomocí různých finančních operací typu: „ ***Levně nakoupit a draze prodat***“ (Brada, J., 1996, str. 9). Nebo portfolio lze definovat jako soubor různých investic (peněžní hotovost, cenné papíry včetně derivátů, nemovitosti atd.), které investor vytváří se záměrem minimalizovat riziko spojené s investováním a současně maximalizovat výnos z těchto investic (Cipra, T., 1995, str. 185).

Moderní teorie portfolia a její základy je možno hledat již v článku J. Hickse: „Application of Mathematical Methods to the Theory of Risk“, z roku 1934. V tomto článku si autor všímá toho, že ekonomické subjekty se řídí při investičním rozhodování statistickými charakteristikami rozdělení pravděpodobnosti výnosů z těchto investic. Za počátek vzniku teorie portfolia bývá považován až článek H. Markowitze: „Portfolio selection“ v roce 1952. V něm Markowitz předpokládá, že investor má na počátku období k dispozici určité množství kapitálu, který bude investovat na předem určené časové období. Na jeho konci pak investor nakoupené a držené cenné papíry prodá a zisk buď použije pro vlastní potřebu nebo jej opět reinvestuje. Na investování se Markowitz dívá jako na periodickou aktivitu, při které si investor vybírá mezi investicemi s různými očekávanými výnosy a s různou mírou jistoty, že očekávaného výnosu bude dosaženo. Podle Markowitze sleduje investor dva protichůdné cíle a to maximalizaci výnosu na jedné straně a minimalizaci rizika (že tohoto cíle nebude dosaženo) na straně druhé.

Další významnou etapou ve vývoji teorie portfolia bylo zavedení modelu oceňování kapitálových aktiv (Capital Asset Pricing Model – CAPM). Zásluhy o rozvoj modelu CAPM jsou připisovány W. F. Sharpovi, který ve svém článku z roku 1964 „Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk“ rozšiřuje portfolio rizikových aktiv o bezrizikovou investici a přímku kapitálového trhu (Capital Market Line – CML). Sharpe chápe přímku kapitálového trhu jako úrokovou míru z rizikové investice, kterou je investor ochoten akceptovat v podmínkách, kdy na trhu existuje možnost bezrizikové investice. To znamená, že požaduje, aby úroková míra z rizikové investice byla vyšší než bezriziková úroková míra tzv. prémie za riziko.Dále se zde zavádí přímka cenného papíru SML (Security Market Line – SML), z které lze odvodit očekávaný výnos jednotlivých aktiv i celého portfolia.

Další kapitolou ve vývoji teorie portfolia je tak zvaná arbitrážní teorie oceňování (Arbitrage Pricing Theory – APT), jejíž původní odvození lze nalézt v práci S. A. Rosse: „The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing“ z roku 1976. APT na rozdíl od předešlých teorií není založena na myšlence, že všichni investoři pohlížejí na portfolio ve smyslu očekávaného výnosu a rizika dosažení tohoto výnosu. Místo toho APT pouze předpokládá, že investoři dávají přednost vyšší úrovni bohatství před nižší.

1.1 Použití teorie portfolia

- ***Instituce kolektivního investování***

Portfolio těchto společností (podílové fondy, investiční společnosti, penzijní fondy) je tvořeno koupenými cennými papíry a depozity u bankovních nebo nebankovních institucí. Cílem těchto institucí je dosáhnout rozumné míry výnosnosti při snesitelné míře rizika. Význam kolektivního investování u nás v poslední době narůstá vzhledem k řešení otázek důchodového zabezpečení, neboť vede k tvorbě nejrůznějších penzijních fondů, kde teorie portfolia nachází značné uplatnění.

- ***Řízení aktiv a pasiv obchodních bank***

  a) portfolio aktiv – je tvořeno hlavně poskytnutými úvěry a nakoupenými cennými papíry
  b) portfolio pasiv – je tvořeno přijatými vklady a nakoupenými cennými papíry.Při řízení aktiv a pasiv banky má značný význam zkoumání nedostatku likvidity banky.
  c) portfolia měnová – jsou to portfolia složená z různých měn. Jsou většinou složena z cenných papírů, které jsou v různých měnách. Takto vytvořené portfolio minimalizuje rizika změn měnových kurzů. Platí, že čím více se mění jednotlivé měnové kurzy, tím je potřebnější tvorba měnových portfolií.
  d) portfolio komoditní (mezinárodní trh) – předmětem těchto portfolií bývají především options a futures na komodity (např. ropa, plyn, různé suroviny atd.) především pro plynulé zabezpečení výrobního procesu.

1.2 Motivy vedoucí k sestavování portfolia

- ***motiv získání kapitálu*** – každý ekonomický subjekt, který potřebuje získat určitý kapitál se jej snaží získat sám, nebo prostřednictvím finančních institucí. Velké ekonomické subjekty si mohou obstarávat volné peněžní prostředky buď emisí akcií nebo dluhopisů.
- ***motiv spekulační*** – ekonomické subjekty (spekulanti), kteří očekávají, že v budoucnu dojde například k růstu tržních cen konkrétních akcií, k poklesu krátkodobých úrokových měr v ekonomice, k devalvaci určité měny mohou tyto získané informace využít k nadměrným ziskovým obchodům (tzv. spekulace) na peněžních a kapitálových trzích. Charakteristikou spekulace je to, že jde o obchod velice ***rizikový***, který může skončit velkým ziskem, nebo velkou ztrátou.
- ***motiv arbitráže*** – investoři zvaní *arbitražeři,* kteří dosahují nadměrných zisků pomocí obchodů, v kterých využívají místních a časových rozdílů mezi jednotlivými finančními trhy (burzami) s cennými papíry. Jedná se o nákup a prodej finančního aktiva (cenného papíru, měny) na různých trzích ve stejném čase, čili nákup aktiva na jednom trhu a prodej na trhu druhém za výhodných podmínek. Znamená to využití cenových nebo výnosových rozdílů na různých trzích v daném časovém okamžiku. V současné době je tento způsob vlivem výpočetní a komunikační techniky v podstatě zcela nemožný, neboť sdělení jakékoliv informace trvá pouze několik vteřin.

- ***motiv zajišťovací*** – investoři se snaží pojistit výnos z portfolia aktiv, vyvažováním aktuálního i budoucího očekávaného rizika a udržují tzv. uzavřené pozice (pod tímto pojmem se rozumí rovnost aktiv a pasiv) slaďováním aktiv a pasiv. Za nejefektivnější způsob řízení finančního rizika, respektive jeho vyvažování jsou v současné době považovány *finanční deriváty.* Umožňují na jedné straně vysoké zajištění (hedging) proti finančnímu riziku, na druhé straně pak spekulace a arbitráže. Snaží se využíváním finančních derivátů, obchodů s termínovými kontrakty na budoucí dodávky určitých aktiv za podmínek sjednaných v současnosti, redukovat nebo zcela eliminovat riziko poklesu cen výnosnosti svého portfolia finančních aktiv vzestupem cen termínovaných kontraktů (forwardů, futurit, opcí, swapů a jejich kombinací).

1.3 Způsoby správy portfolia

1) ***Aktivní správa portfolia*** – po celou dobu, kdy portfolio existuje investor vyhledává na trhu nové investiční příležitosti a složení portfolia podle potřeby a určitých zásad obměňuje. Při očekávání snížení výnosnosti některého z aktiv se snaží tohoto aktiva zbavit (prodat jej) a při předpokládaném růstu výnosnosti některého z aktiv jej získat (koupit jej). Tento prodej a nákup provádí většinou na základě metod technické a fundamentální analýzy.

2) ***Pasivní správa portfolia*** – investor podle určitých zásad portfolio sestaví, a potom po celou dobu trvání tohoto portfolia (do okamžiku realizace, předem známého) portfolio neobměňuje. U pasivního držení portfolií jde o mimořádně levnou záležitost, neboť v průběhu trvání portfolia není třeba platit makléřské poplatky za obchodování s cennými papíry. Nevýhodou může být to, že nedosáhneme mimořádně vysoké výnosy. U pasivního držení portfolia však můžeme dosáhnout větší výnosnosti v případě, že kupónové platby budou reinvestovány formou bankovních nebo termínovaných vkladů.

Ke správě portfolia může existovat i odlišný postoj, kdy cílem investora (sestavovatele portfolia) je získat kontrolní podíl v určité firmě, jejíž akcie jsou obchodovány na trhu, a potom využíváním (nebo zneužíváním) svých akcionářských práv může rozhodovat o přesunu (nebo přelévání zisků do společností, kde investor – sestavovatel má velký akciový podíl) části toku důchodů firmy a tak realizovat mimořádný zisk i přes nesouhlas minoritních (drobných) akcionářů vysávané (tunelované) firmy. V současné době u nás převažuje způsob správy portfolia, kdy investiční fondy nebo investiční společnosti, založené a ovládané především bankami, upřednostňují převody zisků spravovaných firem prostřednictvím poskytování úvěrů. Stejně je tomu i u jiných fondů (společností), kde převádění zisků do firem, kde má velké podíly management , který ovládá investiční fondy nebo investiční společnost zjevem velmi častým.

2. Aktiva

Jelikož předmětem teorie portfolia jsou aktiva, uděláme si stručný přehled základních typů aktiv a ukážeme si jaké mají použití z hlediska tvorby portfolií.

Aktivum je cokoliv, co je předmětem vlastnictví například:

- ***cenné papíry*** (akcie, obligace, podílové listy),
- ***nemovitosti*** (obytné a kancelářské budovy, výrobní objekty, pozemky),
- ***movitý majetek*** (automobily, zásoby materiálu a surovin)

Investice je aktivum, které přináší svému majiteli tok důchodů. Tento tok důchodů může být i záporný.

Členění aktiv:

- ***hmotná*** – movitosti (zboží na skladě, automobil, zásoby surovin a polotovarů, stroje a zařízení atd.)
- ***nehmotná*** – know-how, software atd.
- ***finanční*** – peníze v hotovosti a na účtech, nakoupené cenné papíry směnky, dluhopisy atd.

Nyní si podrobněji probereme jednotlivé druhy aktiv, i když pro teorii portfolia jsou nejdůležitější finanční aktiva.

2.1 Hmotná aktiva

Teorie portfolia, jak již bylo řečeno, se hmotnými aktivy příliš nezabývá. Tento typ majetku se však často používá za spekulačními účely (očekávaný růst jeho ceny v budoucnu, výnosy získané jeho pronájmem, očekávané zvýšení cen starožitností atd.) a také za účelem zajištění (ochrana před inflací, zástava za úvěr).

a) ***Movitý majetek***

- ***sbírkové předměty*** – většinou jde o historické předměty se značnou historickou nebo uměleckou cenou, různé sbírky (známky, mince, šperky, knihy atd.)

- ***zvířata*** – drůbež, dobytek, dostihoví koně a chrti, chov exotických zvířat atd.

- ***stroje a zařízení budov*** – soustruhy, frézy, zařízení pro truhlářskou výrobu, zařízení obchodu nebo výrobny atd.

b) ***Nemovitý majetek***

- ***obytné budovy*** – hlavním zdrojem zisku je příjem z prodeje nemovitosti. Dalším zdrojem důchodů jsou nájmy, které jsou však nevýhodné, neboť legislativou je omezená možnost volně s touto nemovitostí disponovat (vystěhovat nájemníky) a libovolně zvyšovat nájem. Obecně platí, že nákup obytných budov přináší malý výnos.

- ***kancelářské budovy*** – nejvýnosnější typ podnikání (pronájem kancelářských budov nebo místností) v oblasti nemovitostí.

- ***výrobní budovy*** – pronájem nemovitostí je typickým příkladem hlavně pro skladovací prostory.

- ***pozemky*** – vlastnictví lesní a zemědělské půdy je obvykle velmi málo výnosné. Výjimku tvoří ta půda, která byla vyjmuta z půdního fondu a má sloužit pro výstavbu nemovitostí. S vlastnictví takovéto půdy se velmi často spekuluje pro získání značného zisku z prodeje, zvláště ve velmi lukrativních oblastech nebo místech.

2.2 Finanční aktiva

Finanční aktiva mají v teorii portfolia nezastupitelné místo a dominantní postavení. Finanční aktiva ještě dělíme na:

a) ***Hotovost a depozita***

- ***hotovost*** – udržovat větší objem hotovostních prostředků v portfoliu není ekonomické a ani obvyklé

- ***depozita*** – některé fondy kolektivního investování musí mýt dostatek dostupných prostředků na běžných nebo termínových účtech pro zajištění likvidity aktiv ve svém portfoliu (příklad: otevřené podílové fondy).

b) ***Cenné papíry***

a) majetkové – majiteli cenného papíru dávají právo na podíl z majetku a na jeho správě.

- ***akcie*** – je cenný papír, kterým emitent (firma) umožňuje (osvědčuje) akcionáři:
  - *právo spolupodílet se na řízení společnosti*
  - *právo podílet se na zisku společnost většinou formou divident*
  - *právo podílet se na likvidační kvótě z majetku společnosti*
- ***druhy akcií***
  - *kmenové* – jedná se o standardní akcie emitované pro získání nebo zvýšení základního kapitálu
  - *prioritní* – zajišťují výplatu držiteli akcií v podobě pevně daných divident
  - *úrokové* – vynášejí majiteli pevný úrok nebo i podíl na zisku

- ***účast*** – jde o cenný papír, který majiteli potvrzuje právo podílet se na vytvořeném zisku a na likvidačním zůstatku společnosti nebo firmy. Proti akcii zde chybí právo podílet se na rozhodování společnosti. Tyto akci emitují většinou firmy nebo společnosti, kterým zákon neumožňuje emitovat akcie.

- ***podílové listy*** – jde o cenný papír, který zajišťuje majiteli podíl v instituci kolektivního investování. Tento typ cenného papíru je svým charakterem velmi blízký účasti. V ČR jednotlivé investiční společnosti vytvářejí podílové fondy a podílové listy těchto fondů pak opravňují majitele pobírat podíl na majetku v tomto fondu.

b) ***Dluhové cenné papíry***

- ***směnka*** – je listina, která obsahuje zákonem vymezené náležitosti a jejímu majiteli z ní vyplývá právo na zaplacení peněžní pohledávky, která je na směnce uvedena. Tuto částku musí vystavovatel této směnky zaplatit tomu, kdo na tuto listinu napsal svůj závazek a podepsal jej.

- ***splatné cenné papíry a kupóny*** – jedná se o splatné kupóny akcií a dluhopisů, neboť se obchoduje i s dluhopisy, které dospívají během jednoho roku.

- ***obligace (dluhopis, bond)*** – je cenný papír, na němž se vystavovatel zavazuje jeho majiteli vyplatit dlužnou nominální částku a vyplácet výnosy tohoto cenného papíru k určitému, na daném CP uvedenému, datu.

Obligace emitují:

- ***stát*** – státní obligace (dluhopisy).
- ***průmyslové podniky*** – průmyslové (podnikové) obligace
- ***banky*** - bankovní obligace.
- ***orgány státní správy*** – regionální, místní nebo městské obligace.

Druhy obligací:

- ***ziskové*** – majitel obligace má právo pobírat i část zisku z emitentovy firmy.
- ***diskontované*** – z těchto obligací se nevyplácí úrok, ale prodávají se za menší hodnotu něž nominální (face value).
- ***prémiové*** – tyto obligace většinou mají menší úrokovou sazbu, ale za určitý počet let, pevně daný, se vyplácí prémie
- ***indexované*** – velikost úroku těchto obligací závisí na velikosti inflace (velikost inflace je většinou měřena indexem spotřebitelských cen).
- ***prioritní*** – při likvidaci firmy dávají majiteli přednostní právo na vyplacení této obligace (přednostní vypořádání).

- ***zástavní listy (hypoteční listy)*** – je to obligace, u které je splacení závazků emitenta zabezpečeno hypotekárně jištěnými pohledávkami. Případný emitentův věřitel má při nesolventnosti emitenta možnost získat pohledávky prodejem nemovitosti emitenta.

- ***státní dluhopisy*** dlouhodobější cenný papír jejichž emitováním si organizace (firma, banka, stát) může opatřit potřebný kapitál. Základní dělení obligací je na obligace s *nulovým kupónem* (zero-coupon bonds, pure-discount bonds) a *kupónové obligace* (coupon bonds). Kupónové obligace nepřinášejí úrok a jsou emitovány s diskontem. Této diskont je součástí nominální hodnoty obligace, která musí být proplacena majiteli obligace k předem stanovenému datu. Obvyklejší jsou však kupónové obligace, které přinášejí úrok. Úrok je vyplácen ve formě pravidelných kupónových plateb, jejichž výplata je předem stanovena a je udávaná ve formě procent z nominální hodnoty obligace, tak zvaná *kupónová sazba.*

- ***vkladové listy (depozitní certifikáty)*** – je krátkodobý obchodovatelný zúročitelný cenný papír, který vydávají banky výměnou za termínované vklady. Doba splatnosti se pohybuje od jednoho do několika měsíců, i když někdy se také emitují střednědobé depozitní certifikáty s dobou splatnosti větší než jeden rok. Prodej depozitních certifikátů je většinou založen na diskontním principu.

- ***pokladniční poukázky ČNB*** – je cenný papír, který slouží ke krytí deficitu státního rozpočtu. Dávají jej do oběhu ministerstva financí. Ve srovnání s jinými cennými papíry mají největší likviditu. Kalkulace zisku spojeného s koupí poukázky je téměř bez rizika, neboť je zde státní garance a vzhledem ke krátké době splatnosti se redukuje i vliv inflace a změn úrokových sazeb.

c) ***Nárokové cenné papíry***

- ***pojistná smlouva*** – je smlouva uzavřená mezi subjekty, kdy jeden subjekt je oprávněn požadovat plnění od jiného subjektu, jestliže nastane smlouvou konkrétně specifikovaná událost (např. smlouva na smíšené pojištění, dovršení určitého věku atd.).

- ***los*** – losy nebývají součástí portfolia

- ***termínové kontrakty*** – (někteří autoři považují tyto smlouvy za cenné papíry, kdežto jiní je chápou jako typ uzavřeného obchodu). Jedná se především o termínové kontrakty typu:
  - *forward*, který vzniká na základě domluvy mezi účastníky obchodu o množství, ceně, druhu zboží a na termínu dodání tohoto zboží. Tento druh je uváděn proto, že mnoho portfolií je svázáno termínovými smlouvami, které chrání portfolio před nepředvídanými událostmi (např. změna měnového kurzu).
  - *futures* – vysoce standardizovaný forward, což umožňuje jeho obchodování na specializovaných burzách. Často se říká, že futurem je forward obchodovaný na burze.
  - *Option* (česky: opce) – termínová transakce, při níž získává držitel (majitel) opce právo: koupit určité zboží ve vymezeném termínu od emitenta opce (kupní opce-call options). Emitent opce má povinnost dodat zboží, pokud držitel kupní opce má o toto zboží zájem, nebo prodat určité zboží ve vymezeném termínu emitentovi opce (prodejní opce-put options). Znamená to, že emitent opce má povinnost odkoupit toto zboží, pokud držitel opce bude mít o tento prodej zájem. Opce můžeme ještě rozdělit podle času plnění a to na: *americkou opci,* kdy majitel smí požadovat plnění kdykoliv před vypršením termínu opce, nebo *evropská opce*, kdy majitel smí požadovat plnění po vypršení termínu opce.

3. Investice jako náhodná veličina

Náhodná veličina je definována jako veličina, jejíž hodnota je určena výsledkem náhodného pokusu. Nejdůležitějším rysem náhodné veličiny je proměnlivost jejích hodnot v průběhu opakování pokusu vlivem náhodných činitelů. To znamená, že není možné předem jednoznačně určit hodnotu této náhodné veličiny.

V našem případě se bude jednat o náhodnou veličinu **X**, která popisuje výnos z investice. Můžeme mít sice menší či větší důvod se domnívat, že investice přinese určitý výnos, jistotu však nemáme nikdy (nejedná-li se ovšem o tzv. bezrizikovou investici). Velikost výnosu z investice je závislá na mnoha ekonomických ale i neekonomických vlivech, z nichž některé nám nemusí být ani známy. Dalším důležitým rysem je to, že i jednotlivé investice mohou na sebe vzájemně působit. Výnosy z některých investic pak mají tendenci pohybovat se společně nahoru a dolů, výnosy z jiných investic mají naopak tendenci opačnou. Žádná z těchto závislostí však není nikdy striktní.

Některé náhodné veličiny mohou nabývat jen izolovaných hodnot, jiné však mohou nabývat všech hodnot z určitého intervalu. V prvním případě se jedná o diskrétní (nespojité) náhodné veličiny, ve druhém případě o spojité náhodné veličiny. Na náhodnou veličinu **X** (výnos z investice) lze pohlížet jako na diskrétní náhodnou veličinu (nabývá pouze celočíselných hodnot, popř. na dvě desetinná místa atd.). Jednou z výhod tohoto postupu je jednoduchost používaných vzorců.

K poznání zákonitostí, jimiž se řídí náhodná veličina, je třeba určit hodnoty, které tato náhodná veličina může nabývat a popsat pravděpodobnostní chování této veličiny, tj. určit pravděpodobnosti, se kterými náhodná veličina **X** nabývá daných hodnot **x**. V mnoha případech je určení zákona rozdělení náhodné veličiny značně obtížné a proto je výhodné i účelné určit rozložení náhodné veličiny **X** přibližně, pomocí číselných charakteristik. Tyto problémy byly již řešeny v předmětech statistika I a statistika II v minulých ročnících. Přesto si některé základní pojmy, neboť s těmito veličinami se budeme v dalších částech těchto skript setkávat, zopakujeme. Nejběžnější charakteristiky rozdělení pravděpodobnosti jsou ***střední hodnota*** náhodné veličiny a její ***rozptyl***. Jinak řečeno: *střední hodnota je určitou mírou polohy náhodné veličiny a rozptyl určitou mírou variability této veličiny.*

3.1 Statistické charakteristiky náhodné veličiny

3.1.1 Střední hodnota E(X)

Je jednou ze základních charakteristik náhodné veličiny **X**. Značíme ji **E(X)**. Je to charakteristika polohy. Reprezentuje jakýsi „střed“ náhodné veličiny, kolem kterého budou hodnoty náhodné veličiny při opakování pokusu náhodně kolísat. V našem případě můžeme také místo o střední hodnotě náhodné veličiny **X** mluvit o očekávaném výnosu z investice.

Je-li **X** diskrétní náhodná veličina (nabývá konečný počet hodnot), která nabývá hodnoty **x** s pravděpodobností **p(x)**, respektive spojitá náhodná veličina (nabývá libovolné hodnoty z určitého intervalu) s hustotou pravděpodobnosti **f(x)**, potom střední hodnota **E(X)** bude:

$$E(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) \text{..........diskrétní náhodná veličina}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx \text{..........spojitá náhodná veličina}\end{cases} \qquad (3.1)$$

za předpokladu. Že nekonečná řada, respektive nevlastní integrál konvergují absolutně. Střední hodnota je nejdůležitější charakteristikou polohy náhodné veličiny. Někdy ji nazýváme ***očekávaná hodnota*** nebo ***matematická naděje***. Vedle označení **E(X)** se požívá často označení μ nebo $\bar{x}$.

Vlastnosti střední hodnoty:

a) **E(k) = k**, kde **k** je konstanta
b) **E(k.x) = k.E(X)**
c) **E(X + Y) = E(X) + E(Y)**
d) **E(X.Y) = E(X).E(Y)**
e) $E(\sum_{i=1}^{n} k_i X_i) = k_1E(X_1) + k_2E(X_2) + ... + k_nE(X_n)$

3.1.2 Rozptyl D(X)

Charakteristikou proměnlivosti (variability) náhodné veličiny je její rozptyl. Udává, kolísání (rozptýlení) hodnot náhodné veličiny kolem její střední hodnoty. Rozptyl (disperze, variance, variabilita) nám udává velikost tohoto kolísání (rozptýlení hodnot náhodné veličiny). Rozptyl je pak definován vztahem:

$$D(X) = E[X - E(x)]^2 \text{, či-li}$$

$$D(x) = \begin{cases}\sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2.p(x_i) \text{ .... diskrétní náhodná veličina}\\ \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2.f(x) \text{ .... spojitá náhodná veličina}\end{cases} \qquad (3.2)$$

Opět za předpokladu, že nekonečná řada a nevlastní integrál konvergují absolutně. Pro rozptyl se používá též označení σ^2 nebo **var(X)**.

Vlastnosti rozptylu:

a) **D(k) = 0**
b) **D(k.X) = k².D(X)**

Nejužívanější mírou variability hodnot náhodné veličiny ve statistickém souboru je rozptyl a směrodatná odchylka, což je druhá odmocnina z rozptylu. Rozptyl je pak definován jako aritmetický průměr ze čtverců odchylek od aritmetického průměru :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_i)^2 \text{ většinou pro } n > 30$$

Výpočet tohoto rozptylu je zatížený určitou chybou, a proto pro **n < 30** je výhodnější pro rozptyl použít vztah:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}.\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_i)^2 \qquad (3.3)$$

Pro jednodušší výpočet lze též používat upravený vzorec:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_i)^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2.x_i.\overline{x}_i + \overline{x}_i^2) = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2.\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}x_i.\overline{x}_i + \frac{n.\overline{x}_i^2}{n}) =$$

$$= \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2.\overline{x}_i^2 + \overline{x}_i^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}_i^2$$

3.1.3 Kovariance

Všechny dříve uvedené charakteristiky popisují pouze rozdělení náhodných veličin. Neříkají nic o tom, zda se tyto náhodné veličiny vzájemně ovlivňují. Prostředkem pro měření těsnosti vztahů mezi dvěma náhodnými veličinami **X, Y** je kovariance. Budeme ji značit **cov(X,Y)**. Kovarianci dvou náhodných veličin definujeme jako střední hodnotu součinu odchylek obou veličin od jejich středních hodnot.

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\{[X - E(X)].[Z - E(Y)]\} \qquad (3.4)$$

Nejčastěji při běžných výpočtech z dvojice pozorování náhodných veličin podle následujícího upraveného výrazu (vzorce): $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}x_i.y_i - \frac{1}{n^2}.\sum_{i=1}^{n}x_i.\sum_{i=1}^{n}y_i$, kde x_i a y_i jsou hodnoty náhodných veličin.

Pro kovarianci platí:

a) $\mathrm{cov}(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$

b) $\mathrm{cov}(X,X) = D(X) = \sigma^2(X)$

c) Pro rozptyl součtu dvou náhodných veličin platí:

$$D(x + Y) = D(X) + D(Y) + 2.\mathrm{cov}(X,Y)$$

Na kovarianci je také založen koeficient korelace

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \qquad (3.5)$$

Nejčastěji při běžných výpočtech z dvojice pozorování náhodných veličin řešíme úlohy podle následujícího upraveného výrazu (vzorce):

$$\rho(X,Y) = \frac{n.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i.\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.\sqrt{n.\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}} \tag{3.6}$$

kde x_i a y_i jsou hodnoty náhodných veličin.

Kovariance může nabývat hodnot z intervalu $(-\infty,\infty)$ a je pouze pomocným nástrojem pro měření intenzity vztahu mezi dvěma veličinami.

Koeficient korelace se používá jako ***míry lineární závislosti*** mezi veličinami **X** a **Y**. Koeficient korelace je bezrozměrná veličina a nabývá hodnot z intervalu $\langle -1,1 \rangle$. Je-li náhodná veličina **Y** lineární funkcí náhodné veličiny **X**, tzn. $Y = aX + b$. Potom pro $\rho(X,Y) = 1$ jde o přímou úměrnost a pro $\rho(X,Y) = -1$ jde o nepřímou úměrnost mezi veličinami **X** a **Y**. Jestliže $\rho(X,Y) = 0$, říkáme, že ***náhodné veličiny jsou nekorelované***. To ještě nemusí nutně znamenat, že jsou nezávislé. Může mezi nimi existovat velmi těsný vztah, a to v případech, kdy regresní funkce neprobíhá lineárně (není lineární).

U hodnot koeficientu korelace $|\rho(X,Y| < 0{,}3$ můžeme předpokládat, že mají malou lineární závislost a u $|\rho(X,Y| > 0{,}8$ předpokládáme silnou lineární závislost.

3.2 Charakteristiky aktiva

Některé vlastnosti aktiva nazýváme ***charakteristikami aktiva***. Nejdůležitějšími charakteristikami pak jsou:

- ***očekávaný výnos*** – míra výnosnosti (ziskovosti) aktiva (investice)
- ***riziko aktiva*** – jde o pravděpodobnost, že nebude dosaženo očekávaného výnosu (změna výnosu daného aktiva po dobu jeho držení)
- ***likvidita aktiva*** – jedná se o schopnost aktiva být přeměno na hotovost (některé cenné papíry jsou neprodejné, neboť poptávka po nich je minimální až nulová a nepřináší žádný finanční efekt)

Tržní cena akcie se vytváří na základě zákona nabídky a poptávky a odráží řadu faktorů, jako je například výnos na akcii (earnings per share), výše divident nebo ekvivalentně hodnota *výplatního poměru* (payout ratio), který udává, jak velký podíl zisku na jednu akcii se vyplácí jako dividenda, vyhlídky budoucí prosperity firmy, akciové společnosti, kvalita managementu, všeobecné ekonomické klima a mnoho dalších nepředvídatelných faktorů, zahrnující i různé politické události.

3.2.1 Očekávaná výnosnost a riziko změny výnosnosti cenného papíru

Známe-li pravděpodobnostní strukturu, to znamená, že budeme znát s jakou pravděpodobností $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$, bude **i-tý** cenný papír nabývat hodnot $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_i, \cdots, r_n$, potom pro *střední míru zisku* platí:

$$\bar{r}_i = r_1.p_1 + r_2.p_2 + r_3.p_3 + \cdots + r_i.p_i + \cdots + r_n.p_n = \sum_{i=1}^{n} r_i.p_i$$

a pro *riziko změny výnosnosti cenného papíru* pak:

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r}_i)^2.p_i}$$

V praxi však většinou není pravděpodobnostní struktura známá a proto se tato míra zisku odhaduje z minulých pozorovaných hodnot.

$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} r_{i_t}$ a riziko změny výnosnosti pak

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{T-1} \cdot \sum_{i=1}^{T} (r_{i_t} - \bar{r}_i)^2} \qquad (3.7)$$

kde r_{i_t} je pozorovaná míra zisku **i-té** akcie (cenného papíru) v čase $t = 1,2,3,\cdots,T$ a **T** je počet období.

$$r_{i_t} = \frac{P_{i_t} - P_{i_{t-k}} + D_{i_t}}{P_{i_{t-k}}} \qquad (3.8)$$

kde: P_{i_t} - tržní cena **i-té** akcie na začátku následujícího období (prodejní cena akcie, pokud ji chceme prodat)

$P_{i_{t-k}}$ - tržní cena **i-té** akcie na počátku období

D_{i_t} - dividenda **i-té** akcie za příslušné období

Jestliže budeme uvažovat pouze kapitálový výnos (bez výnosu dividendového), potom vycházíme z předpokladu, že očekávaný výnos z portfolia za dobu jeho trvání je tvořen součtem krátkodobých výnosu akcií za tuto dobu trvání. Historický přístup i přes určitá negativa patří k základním orientačním způsobům kvantifikace výnosu, a je v podstatě jediným způsobem jak kvantifikovat kovariance mezi náhodnými veličinami, které popisují výnos jednotlivých aktiv. Obvykle v ekonomice je dividendový výnos mnohem menší než výnos kapitálový (Ibotson atd.). Potom výnos **i**-tého aktiva bude:

$$r_{i_{tk}} = \frac{P_{i_t} - P_{i_{t-k}}}{P_{i_{t-k}}} \qquad (3.9)$$

Pro účely praxe je obvykle uvažovat **k = 1**, to znamená uvažovat velikost jednodenní změny tržní ceny cenného papíru. Potom výnos **i-tého** aktiva za celou dobu trvání portfolia **T** bude:

$$r_i = \frac{1}{T-k} \cdot \sum_{t=1}^{T-k} r_{i_t} , \qquad (3.10)$$

neboť parametr **k** bývá při praktických odhadech zpravidla pevně zvolen. Takovémuto postupu se říká ***historická metoda očekávaného výnosu aktiva***.

3.2.2 Historická metoda kvantifikace očekávaného výnosu a rizika aktiva.

Příklad1

Mějme zadány hodnoty cen akcií z hypotetického kurzovního lístku (pro snadnější a jednodušší výpočty), které neodpovídají cenám z burzy cenných papírů.

Tab. 1: Hypotetické kurzy cenných papírů

Hypotetický kurzovní lístek			
Obchodní den na burze	*Kurzy akcií*		
(v praxi je uveden datum obchodního dne)	**F1**	**F2**	**F3**
1.	100	200	1 000
2.	110	210	1 050
3.	121	200	1 050
4.	95	150	1 000
5.	98	210	950

Úloha: *Vypočítat historický výnos **a)** jednodenní **b)** dvoudenní*

a) jednodenní

$$\mathbf{P_{i\,t}} = \frac{\mathbf{P_{i\,t}} - \mathbf{P_{i\,t-1}}}{\mathbf{P_{i\,t-1}}}$$ *, časový okamžik = jeden obchodní den na burze*

Tab. 2: Jednodenní výnosy cenných papírů

Hypotetický kurzovní lístek			
Obchodní den na burze	*Kurzy akcií*		
(v praxi je uveden datum obchodního dne)	Cenný papír **F1**	Cenný papír **F2**	Cenný papír **F3**
1.	0	0	0
2.	0,1	0,05	0,05
3.	0,1	-0,04762	0
4.	-0,21488	-0,25	-0,04762
5.	0,031579	0,4	-0,05
Očekávaný jednodenní výnos akcie	**0,004176**	**0,038095**	**-0,0119**
Riziko změny jednodenního výnosu akcie	**0,149554**	**0,2717**	**0,04726**

***Řešení*:**

$$r_{F1} = \frac{P_{F1_2} - P_{F1_{2-1}}}{P_{F1_{2-1}}} = \frac{P_{F1_2} - P_{F1_1}}{P_{F1_2}} = \frac{110 - 100}{100} = 0{,}1$$

$$r_{F2} = \frac{P_{F2_2} - P_{F2_{2-1}}}{P_{F2_{2-1}}} = \frac{P_{F2_2} - P_{F2_1}}{P_{F2_1}} = \frac{210 - 200}{200} = 0{,}05$$

$$r_{F3} = \frac{P_{F3_2} - P_{F3_{2-1}}}{P_{F3_{2-1}}} = \frac{P_{F3_2} - P_{F3_1}}{P_{F3_1}} = \frac{1050 - 1000}{1000} = 0{,}05$$

a) dvoudenní $$\mathbf{P_{i\,t}} = \frac{\mathbf{P_{i\,t}} - \mathbf{P_{i\,t-2}}}{\mathbf{P_{i\,t-2}}}$$

Tab. 3: Dvoudenní výnosy cenných papírů

Hypotetický kurzovní lístek			
Obchodní den na burze	*Kurzy akcií jednotlivých firem*		
(v praxi je uveden datum obchodního dne)	Cenný papír **F1**	Cenný papír **F2**	Cenný papír **F3**
1.	0	0	0
2.	0	0	0
3.	0,21	0	0,05
4.	-0,13636	-0,28571	-0,04762
5.	0,19008	0,05	-0,09524
Očekávaný dvoudenní výnos akcie	**-0,03882**	**-0,07857**	**-0,03095**
Riziko změny dvoudenního výnosu akcie	**0,217148**	**0,181125**	**0,07404**

$$r_{F1} = \frac{P_{F1_3} - P_{F1_{3-2}}}{P_{F1_{3-2}}} = \frac{P_{F1_3} - P_{F1_1}}{P_{F1_1}} = \frac{121-100}{100} = 0{,}21$$

$$r_{F2} = \frac{P_{F2_3} - P_{F2_{3-2}}}{P_{F2_{3-2}}} = \frac{P_{F2_3} - P_{F2_1}}{P_{F2_1}} = \frac{200-200}{200} = 0$$

$$r_{F3} = \frac{P_{F3_3} - P_{F3_{3-2}}}{P_{F3_{3-2}}} = \frac{P_{F3_3} - P_{F3_1}}{P_{F3_1}} = \frac{1050-1000}{1000} = 0{,}05$$

3.2.3 Expertní metoda kvantifikace očekávaného výnosu a rizika aktiva.

Dalším důležitým prostředkem zjišťování výnosnosti a rizika jednotlivých aktiv, která chceme zařadit do našeho portfolia, jsou odhady expertů tržních cen jednotlivých aktiv v okamžiku realizace portfolia. Budeme u každého experta předpokládat, že provede odhad pro všechny cenné papíry, které chceme mít ve svém portfoliu. Dále nebudeme uvažovat úročení nebo diskontování toku výnosů, které plynou z tohoto portfolia během jeho držení.

Při expertních odhadech výnosů budeme používat následujícího značení:

1. $\mathbf{TC_i}$ - tržní cena **i-tého** aktiva v době vzniku portfolia
2. $\mathbf{N_{ij}}$ - celkový počet odhadů budoucí tržní ceny $\mathbf{c_{ijk}}$ a $\mathbf{d_{ijk}}$ **i-tého** aktiva, který provedl **j-tý** expert.
3. $\mathbf{p_{ijk}}$ - pravděpodobnost, že **i-té** aktivum podle **j-tého** experta dosáhne v okamžiku realizace portfolia **k-tého** výnosu z doby jeho trvání

Na trhu je známá velikost současných tržních cen všech aktiv ($\mathbf{TC_i}$), které jsou platné v okamžiku vzniku portfolia (BCPP, RM-SM). Námi vybraní experti odhadnou čísla $\mathbf{c_{ijk}}$ a $\mathbf{d_{ijk}}$ a pravděpodobnosti jejich dosažení pro i = 1, 2, 3, …, n; j = 1, 2, …, N_e (počet expertů); k = 1, 2, …, N_{ij}. Nechť každý expert zadá pravděpodobnosti $\mathbf{p_{ijk}}$ tak, aby se splnil vztah:

$$\sum_{k=1}^{N_{ij}} p_{ijk} = 1$$

Vyjdeme opět ze vztahu: $r_{ijk} = \dfrac{c_{ijk} + d_{ijk} - TC_i}{TC_i}$. (3.11)

Potom: $p_{ik} = \dfrac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} p_{ijk}$.

Předpokládejme, že jsme dostali od tří nezávislých expertů informace o odhadu velikosti tržních cen **i-té** akcie v okamžiku realizace portfolia spolu s pravděpodobnostmi, že bude dosažena jimi odhadnutá cena. Dále pro jednoduchost a přehlednost budeme uvažovat, že dividendy z tohoto cenného papíru budou rovny nule. Dále předpokládejme, že současná hodnota i-té akcie bude 100,00 Kč. Jednotlivé hodnoty si uvedeme v tabulce.

Tab. 4 Odhad expertů výnosností cenných papírů

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
c_{ij}	$r_{ik} = \dfrac{c_{ik} - TC_i}{TC_i}$	p_{i1k}	p_{i2k}	p_{i3k}	$\sum_{j=1}^{N_e} p_{ijk}$	$p_{ik} = \dfrac{1}{N_e}\sum_{j=1}^{N_e} p_{ijk}$
90	-0,1	5	0	0	5	**5/3**
100	0	80	20	0	100	**100/3**
110	0,1	5	30	50	85	**85/3**
130	0,3	0	40	20	60	**60/3**
160	0,6	10	10	20	40	**40/3**
180	0,8	0	0	10	10	**10/3**

Jelikož známe pravděpodobnosti náhodné veličiny, můžeme kvantifikovat její střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku jako riziko změny výnosu cenného papíru.

$$E(r_i) = \sum_{k=1}^{6} r_{i_k} \cdot p_{i_k} = 19{,}3\overline{3}\% \text{ (v relativním vyjádření pak } 0{,}193\overline{3}\text{)}$$

$$Var(r_i) = \sum_{k=1}^{6} p_{i_k} \cdot (r_{i_k})^2 - [E(R_i)]^2 = 0{,}0903\overline{3} - 0{,}038678 = 0{,}051656$$

$$\sigma(r_i) = \sqrt{Var(R_i)} = 0{,}227279 \Rightarrow 22{,}7279\%$$

Otázky a problémy k zamyšlení:

Úloha 1.

Kurzy akcií pro hypotetické kurzovní lístky			
Obchodní den na burze	**Kurzy akcií jednotlivých firem**		
	F1	*F2*	F3
1.	100	200	1000
2.	110	210	1050
3.	121	205	1080
4.	95	150	1020
5.	98	210	950

Hypotetický kurzovní lístek			
Obchodní den na burze	**Kurzy akcií**		
(v praxi je uveden datum obchodního dne)	**F1**	**F2**	**F3**
1.			
⋮	⋮	⋮	⋮
5.			
Očekávaný jednodenní výnos akcie			
Riziko změny jednodenního výnosu akcie			

Hypotetický kurzovní lístek			
Obchodní den na burze	***Kurzy akcií jednotlivých firem***		
(v praxi je uveden datum obchodního dne)	F1	F2	F3
1.			
⋮	⋮	⋮	⋮
5.			
Očekávaný dvoudenní výnos akcie			
Riziko změny dvoudenního výnosu akcie			

Úloha:
Vypočítejte jednodenní a dvoudenní výnosy jednotlivých akcií a riziko změny jejich výnosností

Úloha 2.

Od tří expertů jsme dostali informace o odhadu tržních cen i-té akcie v okamžiku realizace portfolia. Předpokládejme, že tržní cena akcie při tvorbě portfolia byla 100,- Kč

Odhady jednotlivých expertů:

Odhady 1. experta		**Odhady 2. experta**		**Odhady 3. experta**	
$c_{i\,1k}$	$r_{i\,1k}$ v %	$c_{i\,2k}$	$r_{i\,2k}$ v %	$c_{i\,3k}$	$r_{i\,3k}$ v %
80	10	100	20	120	50
100	80	120	30	160	50
180	10	150	50	0	0

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
c_{i_k}	$r_{i\,k} = \dfrac{c_{i\,k} - TC_i}{TC_i}$	p_{i1k}	p_{i2k}	p_{i3k}	$\sum_{j=k}^{N_e} p_{ijk}$	$p_{i\,k} = \sum_{j=k}^{N_e} p_{ijk}$
80						
100						
120						
160						
150						
180						

Úloha:

Vypočítat pravděpodobnosti náhodné veličiny, její střední hodnoty, rozptyl a směrodatnou odchylku jako riziko změny výnosnosti cenného papíru.

Úloha 3.
Kurzy vybraných akcií na počátku čtvrtletí

	R o k							
	2001				**2002**			
Emise	**I.**	**II.**	**III.**	**IV.**	**I.**	**II.**	**III.**	**IV.**
ČEZ	1010	1055	1100	1031	988	1065	918	1060
Čokoládovny	2650	3000	3848	3228	3638	4205	3979	4731
KB	1505	2030	2190	2325	2250	2443	1700	1796
Most	178	300	325	396	351	370	335	327
Nová huť	281	372	358	494	460	539	443	468
SPT	2645	3125	3400	3330	3400	3425	3475	4100
Škoda	547	800	803	1070	975	952	997	944

Úloha:

Vypočítat výnosnosti jednotlivých akcií za jednotlivá čtvrtletí, riziko změny výnosnosti, střední hodnotu a riziko změny jejich výnosností za dva roky. Vypočítejte kovarianční a korelační matici.

3.2.4 Odhady kovariance

Abychom mohli vypočítat riziko změny výnosu nejen cenného papíru, ale i riziko změny výnosu celého portfolia musíme znát kovariance mezi dvojicemi cenných papírů, které budou popisovat výnos z jednotlivých aktiv v portfoliu. Jde tedy o to jakým způsobem můžeme řešit tento problém a kvantifikovat kovariance.
Budeme se dále zabývat, určením kovariance (vztahu mezi dvěma náhodnými veličinami) mezi jednotlivými cennými papíry a pro naše potřeby bude postačovat odhad této kovariance z historických dat, neboť nás také zajímá jak se změna výnosnosti jednoho cenného papíru projeví ve výnosech ostatních cenných papírů. Mějme dva cenné papíry **i** a **j**.

Potom kovariance bude: $$\sigma_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \bar{r}_i).(r_{jt} - \bar{r}_j) \qquad (3.12)$$

r_{i_t} … výnosnost cenného papíru **i**, **j** za období **t**, σ_{ij} … kovariance výnosností mezi cennými papíry **i**, **j**

Korelační koeficient potom bude mít tvar: $$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i . \sigma_j}$$

Po výběru cenných papíru do námi žádaného portfolia však potřebujeme vyřešit vztahy mezi jednotlivými cennými papíry a jejich kovariance. K tomu nám poslouží kovarianční a korelační matice.

$$\textbf{\textit{Kovarianční matice:}}\ \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3.13)$$

Kovarianční matice je symetrická, neboť platí, že $\boldsymbol{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$. Na hlavní diagonále má rozptyly náhodných veličin, neboť platí jak bylo řečeno dříve: $\mathbf{cov(X_i, X_i) = D(X_i)}$

$$\textbf{\textit{Korelační matice:}}\ \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{\rho_{12}} & \cdots & \boldsymbol{\rho_{1n}} \\ \boldsymbol{\rho_{21}} & \mathbf{1} & \cdots & \boldsymbol{\rho_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\rho_{n1}} & \boldsymbol{\rho_{n2}} & \cdots & \mathbf{1} \end{vmatrix} \qquad (3.14)$$

Stejně jako kovarianční matice je i matice korelační symetrická, kde $\boldsymbol{\rho_{ij} = \rho_{ji}}$ a pro $\mathbf{i = j}$ bude: $\boldsymbol{\rho_{ii} = 1}$, neboť platí: $\boldsymbol{\rho_{ii} = \frac{cov(X_i, X_i)}{\sigma(X_i).\sigma(X_i)} = \frac{D(X_i)}{\sigma^2(X_i)}}$ (3.15)

Příklad 1

Mějme vybrané cenné papíry obchodované na Burze cenných papíru v Praze, ke dni 10. 3. 2000. Výpočet byl provedený na základě kurzů cenných papírů od 10. 3. 1999 – 10. 3. 2000 .

Tab. 5: Výnosy a rizika cenných papírů

Označení cenného papíru	*Výnosnost* r_i	*Riziko* σ_i
CP_1	***18,5***	***18,6***
CP_2	***8,7***	***6,1***
CP_3	***15,3***	***22,1***
CP_4	***32,5***	***42,5***
CP_5	***30,0***	***41,9***
CP_6	***23,1***	***37,4***
CP_7	***19,4***	***34,2***

Z uvedené tabulky je vidět, že nejvyšší výnos bude z akcie **CP_4** a to 32,5% p.a. Zároveň se jedná o nejrizikovější investici, neboť riziko změny výnosnosti bude 42,5%.

Tab. 6: Kovarianční matice

Označení CP	**CP_1**	**CP_2**	**CP_3**	**CP_4**	**CP_5**	**CP_6**	**CP_7**
CP_1	*344,2*	*20,4*	*38,5*	*-75,7*	*184,9*	*296,2*	*316,8*
CP_2	*20,4*	*36,7*	*10,0*	*13,6*	*-24,1*	*33,0*	*56,0*
CP_3	*38,5*	*10,0*	*487,8*	*-163,7*	*21,2*	*75,6*	*178,9*
CP_4	*-75,7*	*13,6*	*-163,7*	*1810*	*-237,1*	*1,8*	*49,1*
CP_5	*184,9*	*-24,1*	*21,2*	*-237,1*	*1752*	*-172,2*	*-31,7*
CP_6	*296,2*	*33,0*	*75,6*	*1,8*	*-172,2*	*1390*	*719,5*
CP_7	*316,8*	*56,0*	*178,9*	*49,1*	*-31,7*	*719,5*	*1171*

Z kovarianční matice je vidět, že je symetrická, neboť $\mathbf{a_{ij} = a_{ji}}$. Na hlavní diagonále jsou rozptyly jednotlivých cenných papírů (zvýrazněné).

Tab. 7: Korelační matice

Označení CP	**CP_1**	**CP_2**	**CP_3**	**CP_4**	**CP_5**	**CP_6**	**CP_7**
CP_1	*1*	*0,18*	*0,09*	*-0,10*	*0,24*	*0,43*	*0,50*
CP_2	*0,18*	*1*	*0,07*	*0,05*	*-0,10*	*0,15*	*0,27*
CP_3	*0,09*	*0,07*	*1*	*-0,17*	*0,02*	*0,09*	*0,24*
CP_4	*-0,10*	*0,05*	*-0,17*	*1*	*-0,13*	*0,00*	*0,03*
CP_5	*0,24*	*-0,10*	*0,02*	*-0,13*	*1*	*-0,11*	*-0,02*
CP_6	*0,43*	*0,15*	*0,09*	*0,00*	*-0,11*	*1*	*0,56*
CP_7	*0,50*	*0,27*	*0,24*	*0,03*	*-0,02*	*0,56*	*1*

Z uvedené korelační matice vidíme přesný obraz závislosti výnosů jednotlivých cenných papírů. Kladná čísla blížící se k jedné vyjadřují vysokou pozitivní korelaci výnosů. Pokud bude výnosnost jednoho cenného papíru narůstat, bude se stejně chovat i druhý cenný papír. Záporná čísla znamenají negativní korelaci výnosů. Mezi těmito cennými papíry platí nepřímá úměrnost. Jestliže poroste výnosnost jednoho cenného papíru bude výnosnost druhého cenného papíru klesat. Pokud bude korelace rovna nule, není mezi cennými papíry žádný vztah-jsou nekorelovány. To znamená, že změní-li se výnos jednoho cenného papíru, výnosnost druhého vůbec neovlivní.

4. *Rozbor jednotlivých modelů teorie portfolia*

4.1 Markowitzův model (problém výběru portfolia)

Markowitzův přístup k investování začíná předpokladem, že investor má v současné době k dispozici určité množství peněz. Tyto peníze budou investovány na určité časové období, které je známé jako investorova *doba držení portfolia*. Na konci doby držení investor prodá cenné papíry, které zakoupil na začátku tohoto období, a buď utratí výnos z tohoto portfolia pro svoji potřebu nebo je reinvestuje do různých cenných papírů (nebo udělá od každého trochu). Na Markowitzův přístup lze pohlížet jako na přístup na jedno období, kde začátek období je označen t = 0 a konec období je označen t = 1. V t = 0 musí investor učinit rozhodnutí, které cenné papíry má nakoupit a držet do t = 1. Protože portfolio je kolekce cenných papírů, je toto rozhodnutí ekvivalentní výběru optimálního portfolia z množiny možných portfolií a tento postup se často označuje za ***problém výběru portfolia***.

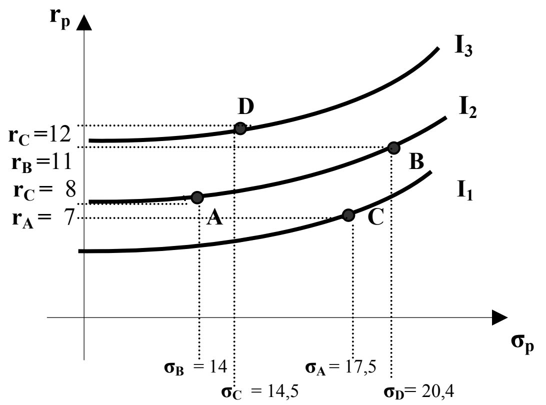
Při rozhodování v čase t = 0 by si měl investor uvědomit, že výnosnosti cenných papírů (a tedy i výnosnost portfolia) za dobu držení jsou neznámé. Přesto by investor mohl odhadnout očekávané výnosnosti (neboli střední výnosnosti) různých cenných papírů, které připadají v úvahu, a potom investovat do cenného papíru s nejvyšší očekávanou výnosností. Typický investor tedy chce, aby jeho výnosnost byla co nejvyšší, současně ale požaduje, aby bylo riziko změny výnosnosti co nejmenší. To znamená, že investor při hledání jak maximální očekávané výnosnosti, tak minimálního rizika, sleduje dva konfliktní cíle, které musí být při rozhodování o koupi v čase t = 0 vzájemně vyvažovány. Markowitzův přístup k tomu, jak by měl investor toto rozhodnutí provádět, bere oba cíle plně v úvahu.

Jedním zajímavým důsledkem těchto dvou konfliktních cílů je to, že by se investor měl snažit o diverzifikaci prostřednictvím nákupu několika cenných papírů místo jednoho.

Podle Markowitze by tedy měl investor pohlížet na výnosnost spojenou s příslušným portfoliem jako na něco, co je ve statistice známo jako náhodná veličina. Markowitzův přístup k investování říká, že investor by měl odhadnout očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku každého portfolia a potom vybrat „nejlepší“ na základě relativní velikosti těchto dvou parametrů.

4.1.1 Křivky indiference

Metoda, která má být použita při výběru nejžádanějšího portfolia, využívá *křivek indiference*. Tyto křivky reprezentují investorovy preference rizika a výnosnosti a mohou tedy být nakresleny v dvourozměrném prostoru (v rovině), kde na vodorovné ose je riziko měřené směrodatnou odchylkou označenou $\boldsymbol{\sigma_p}$ a na svislé ose odměna měřená očekávanou výnosností označenou $\mathbf{r_p}$.



Obr.1

Obr.1 představuje „mapu" křivek indiference, které jsou vlastní hypotetickému investorovi. Každá zakřivená čára představuje jednu křivku indiference daného investora a reprezentuje všechny kombinace portfolií, které by investor považoval za stejně žádoucí. Například investor s křivkami indiference z výše uvedeného obrázku by shledával portfolia A a B stejně žádoucími, i když mají různé očekávané výnosnosti a směrodatné odchylky, neboť obě leží na stejné křivce indiference I_2. Portfolio **B** má vyšší směrodatnou odchylku než portfolio **A**, a je proto z tohoto důvodu méně výhodné. Toto riziko však kompenzuje zisk z vyšší očekávané výnosnosti **B** vzhledem k **A**. Tento příklad ukazuje první důležitou vlastnost křivek indiference:

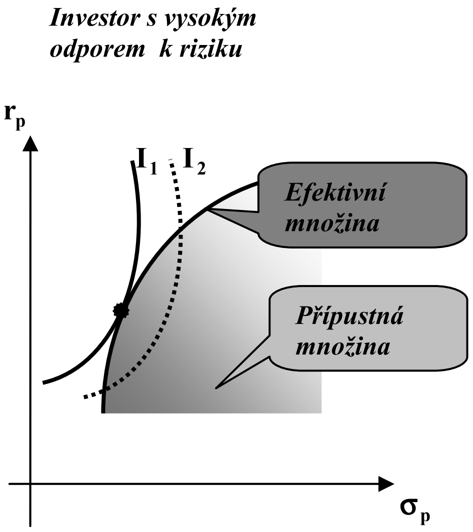
1) ***Všechna portfolia, která leží na dané křivce indiference, jsou pro investora stejně žádoucí***.
Důsledkem této vlastnosti je, že ***křivky indiference se nemohou protínat***.
Druhá vlastnost křivek indiference je:

2) ***Investor bude považovat za žádoucnější libovolné portfolio, které leží na křivce indiference, jež je umístěna „výše" než jiné křivky indiference, na nichž leží další portfolia***.

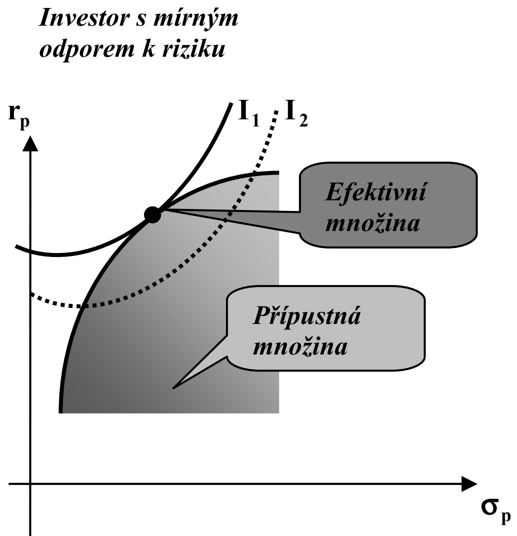
Také bychom si měli všimnout, že investor má nekonečně mnoho křivek indiference. To jednoduše znamená, že kdykoliv jsou na obrázku nakresleny dvě křivky indiference, je možné nakreslit třetí křivku indiference, která leží mezi nimi.

Stranou nesmí zůstat ani tvar indiferentních křivek. Jak vlastně investor stanoví tvar svých křivek indiference? Každému investorovi přísluší mapa křivek indiference, které mají uvedené vlastnosti a jsou pro daného jednotlivce jedinečné. Existuje řada metod, které se používají pro stanovení individuálních křivek indiference. Obecně tvar křivek indiference ovlivňují následující dva předpoklady: ***nenasycenost a odpor k riziku***. Předpoklad nenasycenosti znamená, že investoři budou dávat vždy přednost vyšší úrovni koncového bohatství před nižší úrovní tohoto bohatství. Je to proto, že vyšší úroveň bohatství umožní investorovi více utratit na spotřebu v čase t = 1. Budou-li tedy dána dvě portfolia se stejnou směrodatnou odchylkou , potom si investor vybere portfolio s vyšší očekávanou výnosností. Ale jak si investor vybere v případě dvou portfolií se stejnou očekávanou výnosností, ale s různou směrodatnou odchylkou. Na to dává odpověď druhý předpoklad, odpor k riziku. Obecně se předpokládá, že investoři mají odpor k riziku, čímž je míněno, že si investor vybere portfolio s menší směrodatnou odchylkou.

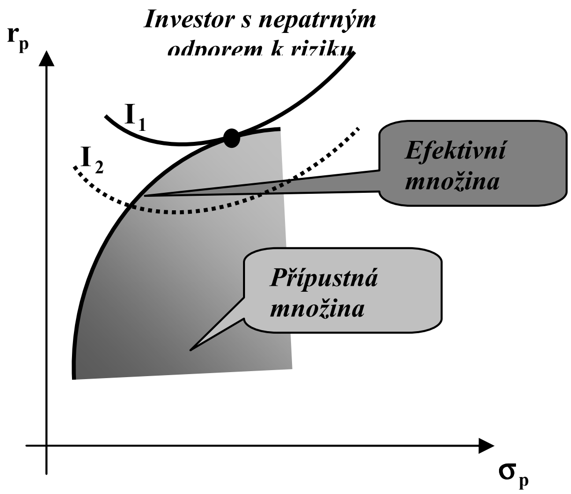
Právě tyto dva předpoklady nenasycenosti a odporu k riziku vedly ke křivkám indiference, které jsou konvexní. I když se předpokládá, že všichni investoři mají odpor k riziku, nepředpokládá se, že mají stejný stupeň odporu k riziku. Někteří investoři mohou mít vysoký odpor k riziku a jiní pouze mírný. To znamená, že různí investoři mohou mít různé mapy křivek indiference. Následující obrázky zobrazují mapy křivek indiference investorů, kteří mají po řadě vysoký, mírný a nepatrný odpor k riziku. Jak lze vidět z těchto křivek, investorovi s vyšším odporem k riziku odpovídají křivky se strmějším sklon



Obr. 2a



Obr. 2b

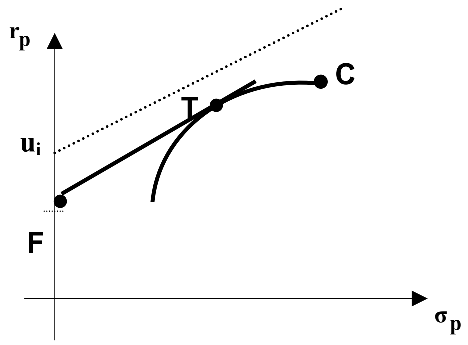


Obr. 2c

Na obrázku 2 jsou uvedeny křivky indiference pro investory s různým odporem k riziku

4.1.2 Odhadování tolerance rizika

Každý investor by rád identifikoval všechny křivky indiference, které odpovídají postoji k riziku a očekávané výnosnosti. V běžné praxi se však spokojíme s mírnějším požadavkem, a to, získat představu o těchto křivkách indiference v pravděpodobné oblasti rizika a očekávané výnosnosti, kam nejspíše bude směřovat investorova optimální volba. Body na obr. 12 představují portfolia, z kterých investor vybírá svoje optimální portfolio. Křivka **FTC** ukazuje charakteristiku rizika a výnosnosti všech možných portfolií a bod **T** označuje portfolio zvolené investorem. Za předpokladu, že z možných portfolií bylo vybráno portfolio **T**, lze říci, že směrnice křivky indiference, dotýkající se efektivní množiny, bude rovna směrnici křivky **FTC** v bodu **T**. Jak jsme již dříve uvedli, bod dotyku křivky indiference je bodem zvoleného optimálního portfolia investorem na efektivní množině. Výběr portfolií a bezrizikového aktiva nám dává určitou informaci o křivce indiference, pouze však pro jediný bod. Pro překonání tohoto omezení můžeme učinit předpoklad, že v rozsahu alternativních portfolií v okolí daného bodu, má investor konstantní toleranci rizika (neutrální postoj k riziku).



Obr. 3

Na obr. 4 je možno vidět podstatu tohoto předpokladu. Na obr. 4a jsou zakresleny křivky indiference, kdy vodorovnou osou je rozptyl portfolia $\boldsymbol{\sigma_p^2}$. To znamená, že křivky indiference jsou přímky, má-li investor konstantní toleranci rizika. Potom daná rovnice bude mít tvar:

$$\mathbf{r_p = u_i + k.\sigma_p^2} \qquad (4.1)$$

kde: $\mathbf{u_i}$ je úsek na ose výnosnosti portfolia $\mathbf{r_p}$

k je směrnice dané přímky

Tuto rovnici můžeme též zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{r_p = u_i + \frac{1}{\tau}\sigma_p^2} \qquad (4.2)$$

kde: $\mathbf{u_i}$ je úsek , kterou utíná směrnice křivky indiference na ose výnosnosti $\mathbf{r_p}$

$\mathbf{\frac{1}{\tau}}$ je směrnice křivky indiference **I**

Na obr. 4b si můžeme všimnout, že křivky indiference se navzájem liší o hodnotu úseku na ose $\mathbf{r_p}$. Pokud zakreslíme křivky indiference do souřadnicových os $\mathbf{\sigma_p}$, $\mathbf{r_p}$ budou tyto křivky konvexní. Jak bylo dříve uvedeno, bude směrnice křivek indiference $\mathbf{\frac{1}{\tau}}$ rovna směrnici efektivní množiny v místě zvoleného portfolia, které jsme označili jako portfolio **T**. Potom pro odhad hodnoty $\boldsymbol{\tau}$ platí:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{\frac{2.(\bar{r}_T - r_f).\sigma_c^2}{(\bar{r}_c - r_f)^2}} \qquad (4.3)$$

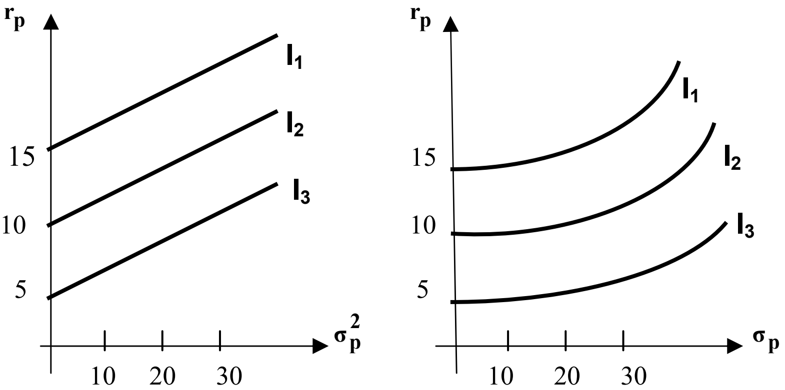
kde:

$\mathbf{\bar{r}_T}$ - očekávaná výnosnost portfolia, které si investor zvolil

$\mathbf{\bar{r}_c}$ - očekávaná výnosnost portfolia **C**

$\mathbf{r_f}$ - očekávaná výnosnost bezrizikového aktiva

$\mathbf{\sigma_c^2}$ - rozptyl portfolia **C**



a) *b)*

Obr. 4

Důkaz:

Vycházíme z předpokladu, že jakékoliv dvě investorovi křivky indiference budou mít stejné směrnice. Abychom mohli odhadnout investorovu toleranci rizika τ potom bude směrnice křivek indiference $\frac{1}{\tau}$ rovna směrnici tečny k efektivní množině v bodu **T**, kde se tyto křivky indiference dotýkají efektivní množiny. Nechť X_C je proporce investovaná do portfolia akcií **C** a $(1-X_C)$ je proporce investovaná do bezrizikového aktiva. Víme, že očekávaná výnosnost portfolia je: $\bar{r}_p = X_C.\bar{r}_C + (1 - X_C).r_f$ kde:

$\bar{r}_C$ - výnosnost portfolia **C**

$\bar{r}_f$ - výnosnost bezrizikového aktiva

Z dané rovnice vypočítáme proporce (podíl, váhu) X_C investované do portfolia **C.**

$$X_C = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\bar{r}_C - r_f} \qquad (4.4)$$

Rozptyl portfolia bude: $\sigma_p^2 = X_C^2.\sigma_C^2 + (1 - X_C)^2.\sigma_f^2 + 2.X_C.(1 - X_C).\sigma_{Cf}$

kde σ_C^2 - rozptyl portfolia

σ_f^2 - rozptyl bezrizikového aktiva, které je však rovno nule, stejně jako kovariance σ_{cf} bezrizikového aktiva s portfoliem **C**. Potom se tato rovnice redukuje na tvar: $\sigma_p^2 = X_C^2.\sigma_C^2$. Za proporci X_C do této rovnice dosadíme (4.7):

$$\sigma_p^2 = \frac{(\bar{r}_p - r_f)^2}{(\bar{r}_C - r_f)^2}.\sigma_C^2 \qquad (4.5)$$

Tato rovnice popisuje funkční závislost mezi očekávanou výnosností a rozptylem libovolného portfolia, které se dá vytvořit kombinací portfolia **C** a bezrizikové investice. To znamená, že pro takové konkrétní portfolio z **C** a bezrizikového aktiva bude mít očekávanou výnosnost $\bar{r}_p$. To nám umožňuje pomocí diferenciálního počtu určit směrnici křivky, která spojuje portfolio **C** s bezrizikovou investicí. Pro zjednodušení výpočtu můžeme tuto směrnici určit derivováním $\frac{d\sigma_p^2}{d\bar{r}_p}$, neboť platí $\frac{d\bar{r}_p}{d\sigma_p^2} = \frac{1}{\frac{d\sigma_p^2}{d\bar{r}_p}}$.

Takže směrnice této přímky **k** bude: $$k = \frac{(\bar{r}_C - r_f)^2}{2.(\bar{r}_p - r_f).\sigma_C^2} \qquad (4.6)$$

Jestliže si uvědomíme, že portfolio, ležící na křivce spojující bezrizikovou investici a portfolio **C**, je tangenciální portfolio **T**, potom směrnici přímky v tomto bodu obdržíme dosazením hodnoty $\bar{r}_T$ za $\bar{r}_p$ do (4.9).

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(\bar{r}_C - r_f)^2}{2.(\bar{r}_T - r_f).\sigma_C^2}$$

Z uvedené rovnice pak vypočítáme τ.

Potom:
$$\tau = \frac{2.(\bar{r}_T - r_f).\sigma_C^2}{(\bar{r}_C - r_f)^2} \qquad (4.7)$$

Pro bod **T** se dá na rovnice (4.7) přepsat na tvar $(\bar{r}_C - r_f).X_C = (\bar{r}_T - r_f)$. Dosazením do rovnice (4) a úpravě pak získáme zjednodušený tvar pro výpočet τ.

$$\tau = \frac{2.(\bar{r}_C - r_f).X_C.\sigma_C^2}{(\bar{r}_C - r_f)^2} = \frac{2.X_C.\sigma_C^2}{(\bar{r}_C - r_f)} \qquad (4.8)$$

Ukázkový příklad:

Mějme portfolio **C** kde σ_C = 20% a $\bar{r}_C - r_f$ = 5%. Jak velké bude τ?

$$\tau = \frac{2.X_C.20^2}{5} = \frac{2.X_C.400}{5} = 160.X_C$$

4.1.3 Ekvivalent výnosnosti

Člen u_i si můžeme představit jako ekvivalent výnosnosti libovolného portfolia, ležící na investorově křivce indiference **I**. Portfolio **T** na obr. 12 je investorem stejně žádoucí jako portfolio s očekávanou výnosností u_i a žádným rizikem. To znamená takové, které poskytne tuto výnosnost s jistotou. Potom tento ekvivalent jistoty bude:

$$u_i = \bar{r}_p - \frac{1}{\tau}.\sigma_p^2 \qquad (4.9)$$

Uvažujme hypotetické portfolio, které bude mít výnosnost $\bar{r}_p$ = 10%, σ_p = 8% a hodnota tolerance rizika τ = 50. Potom: $u_i = \bar{r}_p - \frac{1}{\tau}.\sigma_p^2 = 10 - \frac{64}{50} = 10 - 1{,}28 = 8{,}72\%$

Ekvivalentně bude pokuta za riziko $\frac{64}{50} = 1{,}28\%$. Z uvedeného příkladu je vidět, že čím větší bude τ tím větší bude i hodnota u_i. Stejně tak, bude-li σ_p co nejmenší

4.1.4 Výpočet očekávaných výnosností a směrodatných odchylek portfolií

Předchozí část nastínila problém výběru portfolia, se kterým se setkává každý investor. Markowitzův přístup je jednou z metod řešení tohoto problému. Při tomto přístupu by měl každý investor vyhodnotit alternativní portfolia na základě jejich očekávaných výnosností a směrodatných odchylek pomocí křivek indiference. V případě investora s odporem k riziku bude pro investování vybráno portfolio, které leží na „nejvýše vlevo“ položené křivce indiference. Zůstává však nezodpovězena otázka, jak investor vypočítá očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku portfolia.

a) Očekávaná výnosnost portfolia

Při Markowitzově přístupu k investování se každý investor soustřeďuje na konečný kapitál K_1. Z toho vyplývá, že každý investor se rozhoduje jakým způsobem použije svého počátečního kapitálu K_0 k nákupu cenných papírů do portfolia, nebo nákupu portfolia, které má již svoje složení z cenných papírů. Jak víme z předcházejícího, portfolio se skládá z kolekce cenných papírů, a tedy každý cenný papír přinese do portfolia svoji očekávanou výnosnost a také svoje riziko změny výnosnosti po dobu držení portfolia. Stejně důležité bude i to, jaký podíl (váhu) bude mít každý z těchto cenných papírů v daném portfoliu. Pro výpočet očekávané výnosnosti portfolia se použijí očekávané výnosnosti jednotlivých cenných papírů, které toto portfolio tvoří. Na příkladu si ukážeme jakým způsobem lze výnosnost portfolia z tří cenných papírů vypočítat. Tento výpočet lze zobecnit i na daleko větší kolekci cenných papírů v daném portfoliu. Abychom si ukázali, jak očekávaná výnosnost portfolia závisí na očekávané výnosnosti jednotlivých cenných papírů a jejich podílu v portfoliu si uvedeme příklad:

Ukázkový příklad:

Mějme vybrané 3 cenné papíry s jejich počáteční tržní hodnotou a jejich očekávanou výnosností na konci držení portfolia (nebudeme uvažovat jejich rizika změny výnosnosti). Nechť investor má počáteční kapitál K_0 ve výši 718 833 Kč.

Název cenného papíru	*Tržní cena cenného papíru TC_i*	*Výnosnost cenného papíru r_i v %*
CP_1	456	**4,5**
CP_2	3 255	**3,1**
CP_3	715	**6,1**

Tab. 8: Hodnoty cenných papírů a jejich podíly v portfoliu

Cenný papír	*Počet cenných papírů v portfoliu*	*Tržní cena cenného papíru*	*Celková investice*	*Podíl cenného Papíru v portfoliu*
	(1)	(2)	(1)*(2)=(3)	(3) /K_0
CP_1	100	456	45 600	**0,059367**
CP_2	200	3 255	651000	**0,847546**
CP_3	100	715	71 500	**0,093087**
$\sum$	**400**		**K_0 = 768 100**	**1**

Tab. 9: Výpočet očekávané výnosnosti portfolia na konci jeho držení

Cenný papír	*Počet cenných papírů v portfoliu*	$K_1 = K_0 \cdot (1 + \bar{r}_i)$	*Očekávaná hodnota W_1 na konci držení portfolia*
	(1)	(2)	(3)=(1)*(2)
CP_1	100	476,52	**47 652**
CP_2	200	3 355,905	**671 181**
CP_3	100	758,615	**75 861,50**
$\sum$	**400**		**794 694,50**
	$\bar{r}_p = \frac{K_1 - K_0}{K_0} = 0{,}03462 \Rightarrow 3{,}462\ \%$		

Pokud známe podíly cenných papírů v portfoliu potom můžeme očekávanou výnosnost portfolia vypočítat jako vážený průměr očekávaných výnosností cenných papírů:

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot r_i \qquad (4.10)$$

kde:

$\bar{r}_p$ … očekávaná výnosnost portfolia

X_i … podíl **i**-tého cenného papíru investovaného do portfolia

$\bar{r}_i$ … očekávaná výnosnost cenného papíru **i**

n … počet cenných papírů v portfoliu

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{3} X_i . r_i = 0{,}2941176.32{,}5 + 0{,}2647058.23{,}1 + 0{,}4411764.30{,}0 =$$
$$= 9{,}558822 + 6{,}114704 + 13{,}235292 = 28{,}90882$$

Protože očekávaná výnosnost portfolia je váženým průměrem očekávaných výnosností jeho cenných papírů, přispěje každý cenný papír svým podílem a výnosností k celkové očekávané výnosnosti portfolia. Z uvedeného plyne, že investor, který chce jen největší možnou očekávanou výnosnost, by měl držet pouze jeden cenný papír, a to ten, který má podle jeho názoru nejvyšší očekávanou výnosnost.Velmi málo investorů však tvoří portfolio z jednoho cenného papíru, neboť podstupuje značné riziko při změně jeho výnosnosti za dobu jeho držení. Proto každý investor se snaží mít v portfoliu množinu různých rizikových cenných papírů, aby v co největší míře snížil možné riziko očekávané výnosnosti drženého portfolia. Doposud jsme mluvili pouze o očekávané výnosnosti cenného papíru a jeho riziku a o očekávané výnosnosti portfolia, kde jsme neuvažovali riziko změny jeho výnosnosti. Každý cenný papír z vybrané množiny všech cenných papírů totiž přináší sebou do portfolia nejen svoji výnosnost, ale také i svoje riziko změny výnosnosti po dobu držení daného portfolia. V další části si vysvětlíme právě výpočet rizika takového portfolia, které se vyjadřuje jako směrodatná odchylka tohoto portfolia.

Otázky a problémy k zamyšlení

Úloha 1.

Předpoklad : Doba držení portfolia je 1 rok. Za tuto dobu odhaduje investor očekávanou výnosnost akcií:

Druh akcie	***očekávaná výnosnost*** r_i
ČEZ	**16,2**
Spolana	**24,6**
ČKD	**22,8**

Hodnoty cenných papírů a portfolia*:*

Název CP	***Počet akcií***	***Počáteční tržní cena***	***Celková investice***	***Podíl na počáteční tržní hodnotě***
ČEZ	**100**	**40**		
Spolana	**200**	**35**		
ČKD	**100**	**62**		
Součet				

Očekávaná míra zisku:

Název CP	***Počet akcií***	***Očekávaná hodnota na konci***	***Celková hodnota na konci***
ČEZ	**100**		
Spolana	**200**		
ČKD	**100**		
Součet			

Očekávaná výnosnost portfolia:

Název CP	*Podíl na počáteční tržní hodnotě*	*Míra zisku portfolia*
ČEZ		
Spolana		
ČKD		
Součet		

Úloha:

Vypočítat výnosnosti jednotlivých akcií za dobu držení a výnosnost portfolia

4.1.5 Směrodatná odchylka

Směrodatná odchylka vyjadřuje odhad pravděpodobné odchylky skutečné výnosnosti od očekávané výnosnosti.

Pro portfolio, které se skládá z **n** cenných papírů platí pro riziko změny výnosnosti (směrodatnou odchylku):

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij} \right]^{1/2} \qquad (4.11)$$

σ_{ij} … označuje kovarianci výnosností mezi cennými papíry **i** a **j**.

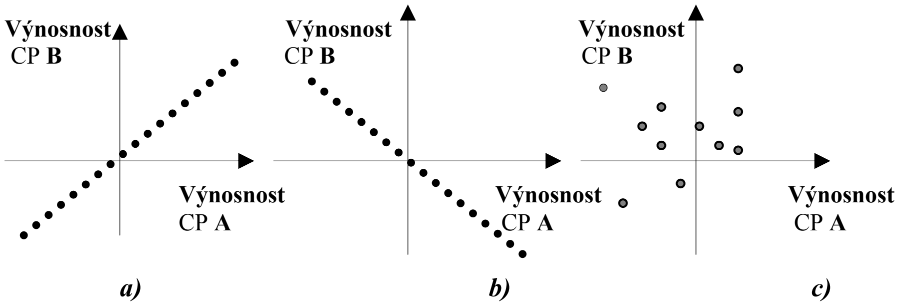
X_i, X_j … podíly (váhy) jednotlivých cenných papírů v portfoliu

σ_{ij} je statistická míra vztahu mezi dvěma náhodnými veličinami a udává jak se dvě náhodné veličiny, např. výnosnosti cenných papírů **i** a **j**, vzájemně ovlivňují. Kladná hodnota kovariance znamená, že výnosnosti cenných papírů mají tendenci se měnit souhlasně - například lepší než očekávaná výnosnost jednoho cenného papíru se pravděpodobně objeví současně s lepší než očekávanou výnosností druhého cenného papíru. Jak již bylo napsáno v úvodu, s kovariancí souvisí koeficient korelace. Platí, že kovariance mezi dvěma náhodnými veličinami je rovna jejich korelaci vynásobené součinem jejich směrodatných odchylek:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \text{, kde}$$

ρ_{ij} ... korelační koeficient mezi výnosností cenného papíru **i** a výnosností cenného papíru **j**.

Korelační koeficient mění měřítko kovariance, aby zprostředkoval srovnání s odpovídajícími hodnotami jiných dvojic náhodných veličin. Korelační koeficient leží vždy v intervalu $\langle -1,1 \rangle$. Hodnota **-1** představuje dokonalou negativní korelaci a hodnota **+1** dokonalou pozitivní korelaci. Většina případů leží mezi těmito dvěma mezními hodnotami. Následující obrázek ukazuje diagram výnosností hypotetických cenných papírů **A** a **B** v případě, že mezi těmito cennými papíry existuje dokonalá pozitivní korelace obr. 3a, dokonalá negativní korelace obr. 3b a v posledním případě výnosnosti nekorelovaných cenných papírů obr. 3c.



Obr. 5

Ještě než si uvedeme příklad, řekneme si jakým způsobem budeme provádět dvojnásobné sčítání:

$$\boldsymbol{\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij}\right]^{1/2} = \left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} X_1 X_j \sigma_{1j} + \sum_{j=1}^{n} X_2 X_j \sigma_{2j} + \cdots + \\ + \sum_{j=1}^{n} X_{n-1} X_j \sigma_{n-1j} + \sum_{j=1}^{n} X_n X_j \sigma_{nj} + \end{array}\right]^{1/2} =}$$

$$\boldsymbol{= \left[\begin{array}{l} X_1X_1\sigma_{11} + X_2X_2\sigma_{22} + \cdots + X_nX_n\sigma_{nn} + 2X_1X_2\sigma_{12} + \\ 2X_1X_3\sigma_{13} + \cdots + 2X_1X_n\sigma_{1n} + \cdots + 2X_2X_3\sigma_{23} + \cdots + \\ 2X_2X_n\sigma_{2n} + 2X_3X_4\sigma_{34} + \cdots + 2X_3X_n\sigma_{3n} + \cdots + \\ + 2X_{n-1}X_n\sigma_{n-1,n} \end{array}\right]^{1/2} =}$$

$$\boldsymbol{= \left[X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + X_3^2\sigma_3^2 + \cdots + X_n^2\sigma_n^2 + \cdots + 2X_{n-1}X_n\sigma_{n-1,n}\right]^{1/2}}$$

Jestliže **i** = **j**, je zřejmé, že se indexy vztahují k jednomu cennému papíru. To znamená, že korelace libovolného cenného papíru se sebou samým, bude rozptyl tohoto cenného papíru, neboť platí $\boldsymbol{\rho_{11} = 1}$

a tedy: $\boldsymbol{\sigma_{11} = 1.\sigma_1.\sigma_1 = \sigma_1^2}$

Pro $\boldsymbol{i \neq j}$ platí $\boldsymbol{X_i.X_j = X_j.X_i}$ a $\boldsymbol{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$. Z toho vyplývá:

$$\boldsymbol{2X_iX_j\sigma_{ij} = X_iX_j\sigma_{ij} + X_jX_i\sigma_{ji}}$$

Výpočet rizika portfolia si opět ukážeme na příkladu tří cenných papírů, kde použijeme hodnoty z tabulky 7.

Tab. 10: Kovarianční matice vybraných cenných papírů z tab. 7

Cenný papír	**CP_4**	**CP_5**	**CP_6**
CP_4	*1810*	*-237,1*	*1,8*
CP_5	*-237,1*	*1752*	*-172,2*
CP_6	*1,8*	*-172,2*	*1396*

Podíly (váhy) cenných papírů v portfoliu zvolme: $X_4 = 0{,}2941176$; $X_5 = 0{,}2647058$; $X_6 = 0{,}4411764$;

n = 3. Pro jednoduchost zvolme: X_1=X_4; X_2=X_5; X_3=X_6 potom:

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} X_i X_j \sigma_{ij}\right]^{1/2} = \left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{3} X_1 X_j \sigma_{1j} + \sum_{j=1}^{3} X_2 X_j \sigma_{2j} + \\ + \sum_{j=1}^{3} X_3 X_j \sigma_{3j} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} X_1X_1\sigma_{11} + X_1X_2\sigma_{12} + X_1X_3\sigma_{13} + X_2X_1\sigma_{21} + X_2X_2\sigma_{22} + \\ + X_2X_3\sigma_{23} + X_3X_1\sigma_{31} + X_3X_2\sigma_{32} + X_3X_3\sigma_{33} \end{array}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[X_1^2\sigma_1^2 + + X_2^2\sigma_2^2 + X_3^2\sigma_3^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1X_3\sigma_{13} + 2X_2X_3\sigma_{23}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} 0{,}2941176^2.1810 + 0{,}2647058^2.1752 + 0{,}4411764^2.1396 + \\ + 2.0{,}2941176.0{,}2647058.(-237{,}1) + 2.0{,}2941176.0{,}4411764.1{,}8 + \\ + 2.0{,}2647058.0{,}4411764.(-172{,}2) \end{array}\right]^{1/2} = \mathbf{11,977442}$$

Námi provedeným výpočtem jsme zjistili, že sestavené portfolio z uvedených cenných papíru bude mít riziko změny výnosnosti **11,977442%**.

Markowitzův přístup k investování je založen na statistických metodách s předpokladem, že výnosnosti cenných papírů jsou náhodné veličiny. Stejně jako náhodné veličiny, výnosnosti cenných papírů (a také výnosnosti portfolií) mohou být porovnávány zkoumáním jejich statistických momentů. Markowitz navrhl, aby se investor zajímal o dva z těchto momentů-očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku výnosnosti (riziko změny výnosnosti). To znamená, že bude-li dána množina portfolií, měl by investor nejprve stanovit očekávanou výnosnost a riziko změny výnosnosti těchto portfolií. Jestliže investor provedl tuto analýzu, může učinit kvalifikované rozhodnutí, které z těchto portfolií nakoupit. Toto rozhodnutí by se mělo opírat o investorovy postoje k riziku a výnosnosti, které je možno vyjádřit jeho křivkami indiference.

4.2 Efektivní množina

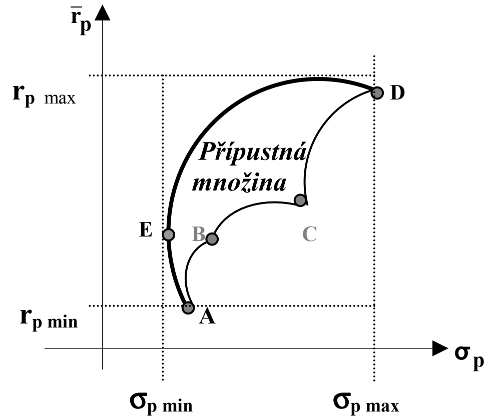
V předchozí kapitole jsme uvedli jak investor postupuje při tvorbě portfolia z vybraných cenných papírů. Otázkou ale zůstává, jak se má investor zachovat při výběru z nekonečně mnoha portfolií, neboť z množiny **n** cenných papírů může investor vytvořit nekonečný počet portfolií. Uvažujme situaci společností C_4, C_5, C_6, kde n = 3. Investor by si mohl koupit buď jen akcie C_4 nebo jen C_5. Alternativně by si mohl koupit kombinaci akcií C_4 a C_5, kdy do C_4 by investoval například 25% a do C_5 75% svého kapitálu. Již bez uvažování investic do C_6 dostáváme nekonečný počet možných portfolií, do kterých můžeme investovat s tím, že podíly (váhy) jednotlivých aktiv mohou být z intervalu $\langle \mathbf{0,100} \rangle$.

Naštěstí však investor nemusí vyhodnocovat všechna tato portfolia. Klíč k tomu, proč se musí investor zajímat jen o podmnožinu dostupných portfolií, leží ve větě o *efektivní množině*, která říká, že:
Investor si vybere své optimální portfolio z množiny portfolií, která:

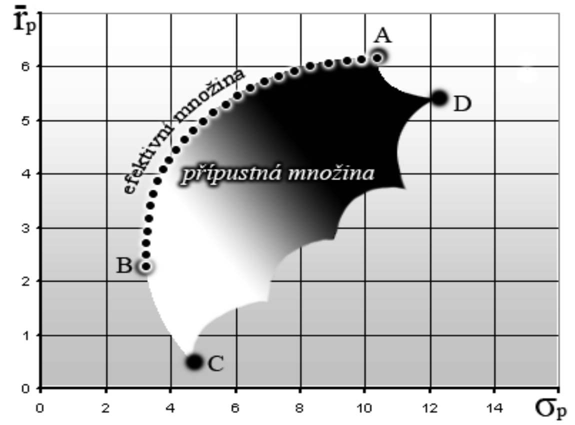
1. ***nabízejí maximální očekávanou výnosnost při různých úrovních rizika***
2. ***nabízejí minimální riziko při různých úrovních očekávané výnosnosti.***

Množina portfolií, která splňují tyto dvě podmínky, je známa jako *efektivní množina* nebo *efektivní hranice*.

Obrázek ilustruje umístění přípustné množiny, známe také jako množina příležitostí, ze které se potom vybírá efektivní množina. Přípustná množina jednoduše reprezentuje množinu všech portfolií, která mohou být vytvořena ze skupiny **n** cenných papírů. Všechna možná portfolia leží buď na hranici nebo uvnitř hranice přípustné množiny (body označené A, B, C, D a E jsou příkladem takových portfolií).
Efektivní množina může být nyní nalezena použitím věty o efektivní množině na přípustnou množinu. Nejprve musí být nalezena množina, která splňuje první podmínku věty o efektivní množině. Na obr. 4a vidíme, že žádné portfolio nenabízí menší riziko, než portfolio E. Neexistuje také žádné portfolio, které by nabízelo vyšší riziko než portfolio D. Množina portfolií, která nabízejí maximální výnosnost při různých úrovních rizika, je tedy množina portfolií, která leží na „horní" hranici přípustné množiny mezi body E a D. Při uvažování druhé podmínky zjistíme, že neexistuje žádné portfolio, které by nabízelo očekávanou výnosnost vyšší než portfolio D. Podobně neexistuje žádné portfolio, které by nabízelo očekávanou výnosnost nižší než portfolio A.



Obr. 6a

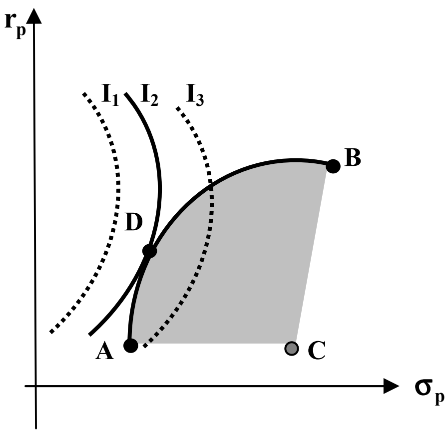


Obr. 6b

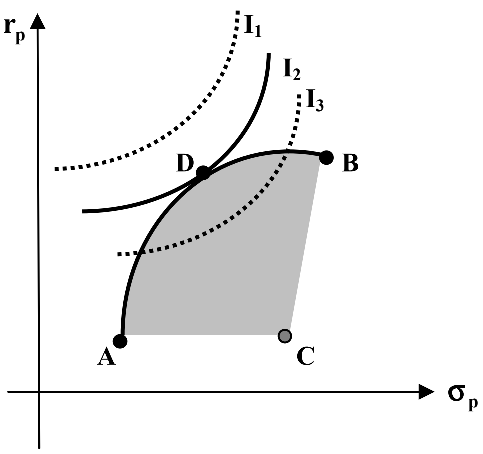
Množina portfolií, která nabízejí minimální riziko při různých úrovních výnosnosti je tedy množina portfolií, která leží na „levé“ hranici přípustné množiny mezi body A a D. Pro efektivní množinu však musí platit obě podmínky. Proto efektivní množinu tvoří pouze portfolia, která leží na „levé horní“ hranici přípustné množiny mezi body E a D. Tato portfolia tvoří efektivní množinu a právě z této množiny efektivních portfolií si bude investor vybírat své optimální portfolio. Všechna ostatní portfolia jsou „neefektivní“ a můžeme je ignorovat. Stejně tak na obr. 4b vidíme, že žádné portfolio nenabízí menší riziko než portfolio B a největší riziko než portfolio D. Jenomže portfolio D v tomto případě má menší výnosnost než portfolio A, které skýtá při menším riziku maximální výnosnost. Tudíž efektivní množinu nám tvoří portfolia ležící na efektivní množině mezi portfolii A a B. Ostatní portfolia budou pro investora neefektivní.

4.2.1 Výběr optimálního portfolia

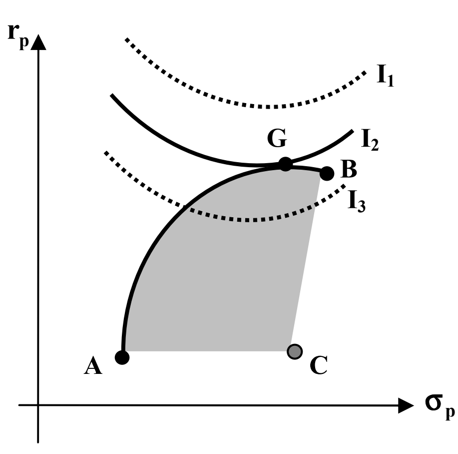
Jak investor provede výběr optimálního portfolia? Jak je vidět na obr. 5, investor by měl nakreslit své křivky indiference do stejného obrázku jako efektivní množinu a potom vybrat takové portfolio, které leží na křivce indiference, jež je umístěna „nejvýše vlevo“. Toto portfolio bude odpovídat bodu, kde se křivka indiference právě dotýká efektivní množiny. Jak je z obrázku vidět, je to portfolio **D**, ležící na křivce indiference I_2. Investor by sice ještě více preferoval portfolia na křivce indiference I_1, ale žádná taková neexistují. Jak daná křivka indiference ukazuje, investor s vysokým odporem k riziku vybere portfolio blízko bodu D nebo přímo v bodu D a investor, který má jen mírný odpor k riziku,



Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9

vybere portfolio blízko bodu **G** na indiferentní křivce **I_2** nebo přímo bod **D** na této indiferentní křivce obr. 7.

4.2.2 Konkávnost efektivní množiny

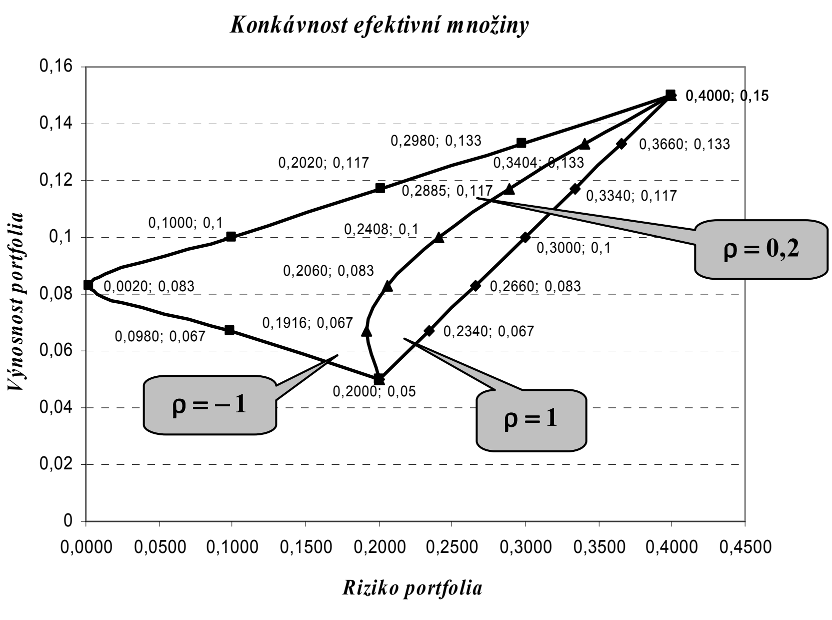
I když na grafech obr. 7 – 9 jsme předpokládali, že každá efektivní množina je konkávní, budeme uvažovat úlohu kde si zobrazíme takovýto graf z investic do dvou cenných papírů, a toto tvrzení si dokážeme.

Mějme následující úlohu, kdy investor uvažuje všechna možná portfolia, která by mohl nakoupit kombinováním těchto dvou cenných papírů :

Tab. 11 Tabulka hypotetických výnosů a rizik cenných papírů a jejich podílů v portfoliu

Cenný papír	*výnosnost*	*riziko*
C_1	0,05	0,20
C_2	0,15	0,40

Váhy/Portfolia	A	B	C	D	E	F	G
X_1	1	0,83	0,67	0,5	0,33	0,17	0
X_2	0	0,17	0,33	0,5	0,67	0,83	1
r_p	0,05	0,067	0,083	0,1	0,117	0,133	0,15
σ_p pro $\rho = 1$	0,2000	0,2340	0,2660	0,3000	0,3340	0,3660	0,4000
$\rho = -1$	0,2000	0,0980	0,0020	0,1000	0,2020	0,2980	0,4000
$\rho = 0,2$	0,2000	0,1916	0,2060	0,2408	0,2885	0,3404	0,4000



Obr. 10

Z obr. 10 vidíme, že při volbě koeficientu korelace +1 a -1 obdržíme hranice přípustné množiny a při další volbě korelačního koeficientu $\rho \in (-1;+1)$ obdržíme množinu konkávních křivek, které leží uvnitř zobrazeného trojúhelníku. Bude-li se blížit ρ k hodnotě jedna budou se konkávní křivky blížit k levé hranici tohoto trojúhelníku a naopak.

4.3 Bezrizikové investování

Definování bezrizikového aktiva:

Co je přesně bezrizikové aktivum v kontextu Markowitzova přístupu? Protože tento přístup používá investování na jednu dobu držení, znamená to, že výnosnost bezrizikového aktiva $\mathbf{r_f}$ je jistá. Protože o konečné hodnotě bezrizikového aktiva není žádná pochybnost (výnosnost může být ovlivněna pouze mírou inflace, je směrodatná odchylka (riziko) $\boldsymbol{\sigma_f}$ bezrizikového aktiva rovna nule, což znamená, že kovariance mezi výnosností bezrizikového aktiva a výnosností libovolného rizikového aktiva je rovna nule. Za bezrizikové aktivum může být považován státní pokladniční cenný papír s dobou splatnosti, která přesně odpovídá době držení portfolia investorem (státní pokladniční poukázky na pokrytí rozpočtu začátkem roku, většinou s dobou splatnosti za tři měsíce). Předpokládejme, že investor nakoupí pokladniční cenný papír splatný za rok. Takový cenný papír je však rizikový, neboť investor nic neví o tom jaká bude jeho tržní cena za tento rok, tedy na konci jeho držení. Protože přítomnost takovéhoto cenného papíru, vzhledem k nepředvídatelné změně jeho tržní ceny za tak dlouhou dobu držení, kdy jeho výnos v době splatnosti je nejistý, nemůže být tento cenný papír bezrizikovým aktivem.
Z předcházejících úvah víme, že kovariance mezi libovolnými cennými papíry **i** a **j** je rovna součinu koeficientu korelace mezi danými aktivy a směrodatných odchylek (rizik) těchto cenných papírů.
Tedy: $\boldsymbol{\sigma_{ij} = \rho_{ij} . \sigma_i . \sigma_j}$. Protože $\boldsymbol{\sigma_f = 0}$ potom i $\boldsymbol{\sigma_{ij} = 0}$. Po zavedení bezrizikového aktiva je investor nyní schopen vložit část svého kapitálu do tohoto aktiva a zbytek do libovolného z rizikových portfolií v přípustné množině. Přidání těchto nových příležitostí rozšiřuje významně přípustnou množinu a co je důležitější, mění umístění části Markowitzovy efektivní množiny.

4.3.1 Investování do bezrizikového aktiva a do rizikového aktiva

Předpokládejme opět tři akci $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$, jejichž očekávané výnosnosti a kovariance jsou následující:

$$\bar{r}_i = \begin{bmatrix} 16{,}2 \\ 24{,}6 \\ 22{,}8 \end{bmatrix} \qquad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 146 & 187 & 145 \\ 187 & 854 & 104 \\ 145 & 104 & 289 \end{bmatrix}$$

Bezrizikové aktivum bude mít výnosnost $\mathbf{r_f = 4\%}$

Po definování bezrizikového aktiva jako cenného papíru $\mathbf{C_4}$ budeme uvažovat všechna portfolia, která využívají investování do kmenové akcie $\mathbf{C_1}$ s výnosností $\mathbf{r_1 = 16{,}2}$ a do bezrizikového aktiva. Nechť $\mathbf{X_1}$ označuje proporci investorových fondů do $\mathbf{C_1}$ a $\mathbf{X_4 = 1 - X_1}$ nechť označuje proporci investovanou do bezrizikového aktiva. Kdyby investor vložil veškeré své peníze do bezrizikového aktiva, potom by bylo $\mathbf{X_1 = 0}$ **a** $\mathbf{X_4 = 1}$. Sestavme pět následujících portfolií:

Tab. 12

X_i / P_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
X_1	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
X_4	1,00	0,75	0,50	0,25	0,00

Za předpokladu, že bezrizikové aktivum má výnosnost, kterou budeme značit $\mathbf{r_f}$ = 4%, můžeme vypočítat očekávané výnosnosti a směrodatné odchylky těchto portfolií. Pro výpočet očekávané výnosnosti použijeme již známou rovnici:

$$\mathbf{\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} X_i . \bar{r}_i}$$

A pro výpočet směrodatných odchylek použijeme rovnici:

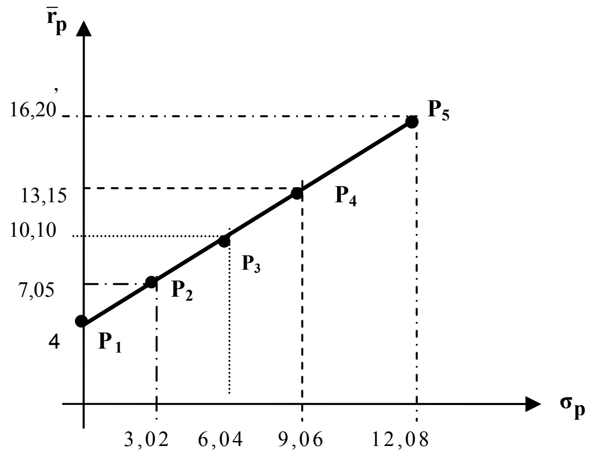
$$\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{p} = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X_i . X_j . \boldsymbol{\sigma}_{ij}} \right]^{1/2}$$

Vypočítané údaje uvedeme v následující tabulce:

Tab. 13

Portfolio	X_1	X_4	*Očekávaná výnosnost*	*Směrodatná odchylka*
$\mathbf{P_1}$	0,00	1,00	4,00	0,00
$\mathbf{P_2}$	0,25	0,75	7,05	3,02
$\mathbf{P_3}$	0,50	0,50	10,10	6,04
$\mathbf{P_4}$	0,75	0,25	13,15	9,06
$\mathbf{P_5}$	1,00	0,00	16,20	12,08

Tato portfolia jsou nakreslena na obr. 11. Na tomto obrázku je vidět, že všechna portfolia leží na přímce, která spojuje body reprezentující umístění bezrizikového aktiva P_5 a P_1.



Obr.11

4.3.2 Investování do bezrizikového aktiva a rizikového portfolia

Dále uvažujme, co se stane, když portfolio tvořené více než jedním rizikovým cenným papírem je kombinováno s bezrizikovým aktivem. Uvažujme například rizikové portfolio, které sestává z cenných papírů **A** a **C** například v poměru 0,80 a 0,20. Jeho očekávaná výnosnost (označená $\mathbf{\bar{r}_{P_{AC}}}$) a směrodatná odchylka (označená $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{P_{AC}}}$) jsou rovny:

$$\mathbf{\bar{r}_{P_{AC}}} = 17{,}52\%, \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{P_{AC}}} = 12{,}30\%$$

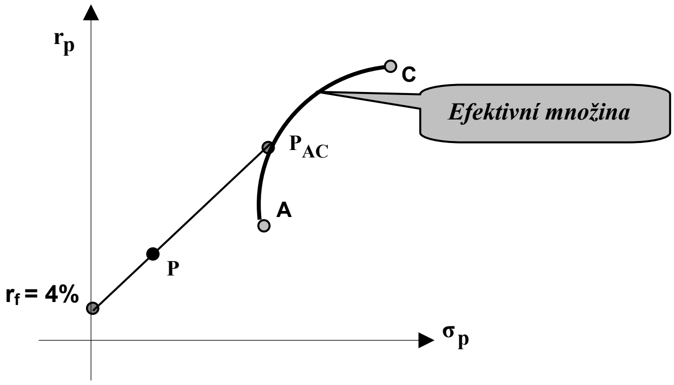
Libovolné portfolio, které je tvořeno investicí jak do $\mathbf{P_{AC}}$ tak do bezrizikového aktiva, bude mít očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku, které mohou být vypočítány stejným způsobem, jaký byl předtím ukázán pro kombinaci jednotlivého rizikového aktiva a bezrizikového aktiva. To znamená, že portfolio, které je zastoupeno podílem $\mathbf{X_{P_{AC}}}$ investovanou do portfolia $\mathbf{P_{AC}}$ a podíl $\mathbf{X_4 = 1 - X_{P_{AC}}}$ do bezrizikového aktiva, bude mít očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku, které jsou po řadě rovny:

$$\bar{r}_p = X_{P_{AC}}.17{,}52 + X_4.4 \quad \text{a} \quad \sigma_p = X_{P_{AC}}.12{,}30$$

Uvažujme investici do portfolia, které je tvořeno portfoliem $\mathbf{P_{AC}}$ a bezrizikovým aktivem v poměru 0,25 a 0,75. Toto portfolio bude mít očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku:

$$\bar{r}_p = 7{,}38\% \qquad \sigma_p = 3{,}075\%$$

Na obr. 9 vidíme,že toto portfolio leží na přímce spojující bezrizikové aktivum a portfolio $\mathbf{P_{AC}}$. Na přímce je označeno bodem **P**. Další portfolia tvořená různými kombinacemi portfolia $\mathbf{P_{AC}}$ a bezrizikového aktiva budou také ležet na této přímce a jejich přesná poloha bude záviset na proporcích investovaných do $\mathbf{P_{AC}}$ a bezrizikového aktiva. Bude-li podíl investovaný do rizikového portfolia větší, blížící se k **1,** než podíl investovaný do bezrizikové aktiva, bude se i bod **P** na přímce blížit k bodu $\mathbf{P_{AC}}$ a naopak.

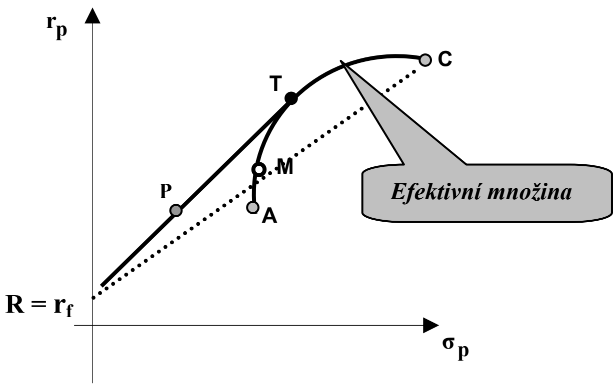


Obr. 12

Na závěr můžeme říci, že kombinování bezrizikového aktiva s rizikovým portfoliem se v ničem neliší od kombinování bezrizikového aktiva s jednotlivým rizikovým cenným papírem. V obou případech výsledné portfolio leží na přímce, která spojuje bod s výnosem bezrizikové investice a jeho nulovým rizikem s bodem, který odpovídá výnosnosti a riziku portfolia, ležícím na efektivní množině se svou očekávanou výnosností a směrodatnou odchylkou.

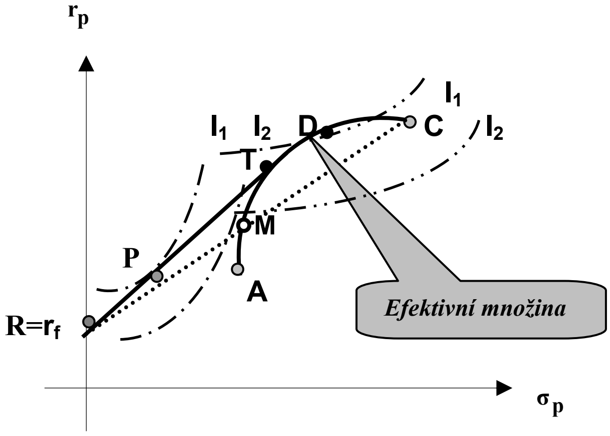
4.3.3 Vliv bezrizikové investice na efektivní množinu

Jak jsme se již zmínili, přípustná množina se zavedením bezrizikové investice významně změnila.



Obr. 13

Na obr. 13 vidíme jak se změnila přípustná množina. Všimněme si existence dvou hranic této přípustné množiny, kterou tvoří přímka, spojující bezrizikové aktivum s rizikovým cenným papírem **C** a přímka spojující bezrizikové aktivum s tečným bodem **T** na efektivní množině. Tento bod **T** označuje rizikové portfolio z této efektivní množiny. Neexistuje však žádné jiné portfolio, které by po spojení přímkou s bezrizikovým aktivem leželo od něho "výše vlevo" . Ze všech přímek, které vycházejí z bezrizikového aktiva a končí v libovolném bodu efektivní množiny, nesvírá větší úhel s osou $\boldsymbol{\sigma_p}$ (nemá větší směrnici) než ta, která prochází tečným bodem **T**. Nová efektivní množina je potom tvořena polopřímkou danou bodem **R** a bodem **T** a také křivkou spojující bod **T** a **C**. Například portfolia **A** a **M** jsou pro investora neefektivní, jestliže je možno investovat do bezrizikového aktiva. Dále je vidět, že se investor může rozhodnout investovat svůj kapitál do bezrizikové investice a do portfolia **T**, nebo investovat pouze do rizikových portfolií mezi body **T** a **C** podle jeho postoje k riziku. Portfolio, které se nachází v tečném bodu **T**, nazýváme ***tangenciální portfolio***, neboť směrnice přímky je rovna tangentě úhlu, kterou svírá přímka s osou σ_p.

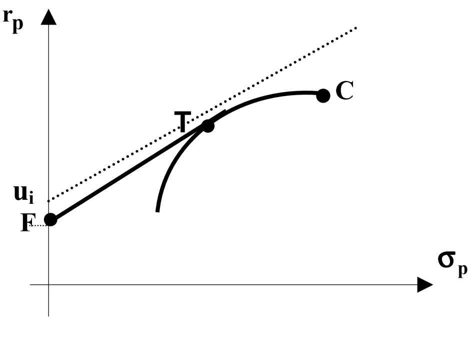


Obr. 14

Na obr. 14 vidíme jak by se měl chovat investor při výběru optimálního portfolia v závislosti na jeho křivkách indiference. Investor s velkým odporem k riziku bude investovat do portfolia **P,** ležící na spojnici bodu **R** a **T**. Svůj počáteční kapitál bude zčásti investovat do bezrizikového aktiva a zčásti do tangenciálního portfolia. Pokud bude mít investor menší, nebo malý odpor k riziku, potom počáteční kapitál bude investovat do rizikových portfolií a vůbec nevyužije bezrizikovou investici. Se svými portfolii se bude pohybovat mezi bodem **T** a **C (**na obr. 11 jde o bod **D** na křivce) .

4.3.4 Odhadování tolerance rizika

Každý investor by rád identifikoval všechny křivky indiference, které odpovídají postoji k riziku a očekávané výnosnosti. V běžné praxi se však spokojíme s mírnějším požadavkem, a to, získat představu o těchto křivkách indiference v pravděpodobné oblasti rizika a očekávané výnosnosti, kam nejspíše bude směřovat investorova optimální volba. Body na obr. 12 představují portfolia, z kterých investor vybírá svoje optimální portfolio. Křivka **FTC** ukazuje charakteristiku rizika a výnosnosti všech možných portfolií a bod **T** označuje portfolio zvolené investorem. Za předpokladu, že z možných portfolií bylo vybráno portfolio **T**, lze říci, že směrnice křivky indiference, dotýkající se efektivní množiny, bude rovna směrnici křivky **FTC** v bodu **T**. Jak jsme již dříve uvedli, bod dotyku křivky indiference je bodem zvoleného optimálního portfolia investorem na efektivní množině. Výběr portfolií a bezrizikového aktiva nám dává určitou informaci o křivce indiference, pouze však pro jediný bod. Pro překonání tohoto omezení můžeme učinit předpoklad, že v rozsahu alternativních portfolií v okolí daného bodu, má investor konstantní toleranci rizika (neutrální postoj k riziku).



Obr. 15

Na obr. 15 je možno vidět podstatu tohoto předpokladu. Na obr. 16a jsou zakresleny křivky indiference, kdy vodorovnou osou je rozptyl portfolia σ_p^2. To znamená, že křivky indiference jsou přímky, má-li investor konstantní toleranci rizika. Potom daná rovnice bude mít tvar:

$$r_p = u_i + k.\sigma_p^2 \qquad (4.4)$$

kde: u_i je úsek na ose výnosnosti portfolia r_p

k je směrnice dané přímky

Tuto rovnici můžeme též zapsat ve tvaru:

$$r_p = u_i + \frac{1}{\tau}\sigma_p^2 \qquad (4.5)$$

kde: u_i je úsek , kterou utíná směrnice křivky indiference na ose výnosnosti r_p

$\frac{1}{\tau}$ je směrnice křivky indiference **I**

Na obr. 13b si můžeme všimnout, že křivky indiference se navzájem liší o hodnotu úseku na ose r_p. Pokud zakreslíme křivky indiference do souřadnicových os σ_p, r_p budou tyto křivky konvexní. Jak bylo dříve uvedeno, bude směrnice křivek indiference $\frac{1}{\tau}$ rovna směrnici efektivní množiny v místě zvoleného portfolia, které jsme označili jako portfolio **T**. Potom pro odhad hodnoty τ platí:

$$\tau = \frac{2.(\bar{r}_T - r_f).\sigma_c^2}{(\bar{r}_c - r_f)^2} \qquad (4.6)$$

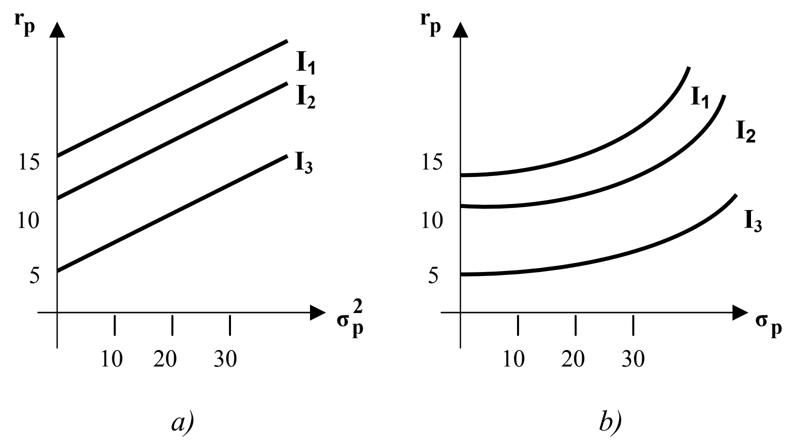
kde:

$\bar{r}_T$ - očekávaná výnosnost portfolia, které si investor zvolil

$\bar{r}_c$ - očekávaná výnosnost portfolia **C**

r_f - očekávaná výnosnost bezrizikového aktiva

σ_c^2 - rozptyl portfolia **C**



Obr. 16

Důkaz:

Vycházíme z předpokladu, že jakékoliv dvě investorovi křivky indiference budou mít stejné směrnice. Abychom mohli odhadnout investorovu toleranci rizika τ potom bude směrnice křivek indiference $\frac{1}{\tau}$ rovna směrnici tečny k efektivní množině v bodu **T**, kde se tyto křivky indiference dotýkají efektivní množiny. Nechť X_c je proporce investovaná do portfolia akcií **C** a $(1 - X_c)$ je proporce investovaná do bezrizikového aktiva. Víme, že očekávaná výnosnost portfolia je: $\bar{r}_p = X_c.\bar{r}_c + (1 - X_c).r_f$ kde:

$\bar{r}_c$ - výnosnost portfolia **C**

$\bar{r}_f$ - výnosnost bezrizikového aktiva

Z dané rovnice vypočítáme proporce (podíl, váhu) $\mathbf{X_C}$ investované do portfolia **C.**

$$\mathbf{X_C = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\bar{r}_C - r_f}} \qquad (4.7)$$

Rozptyl portfolia bude: $\mathbf{\sigma_p^2 = X_C^2.\sigma_C^2 + (1 - X_C)^2.\sigma_f^2 + 2.X_C.(1 - X_C).\sigma_{Cf}}$

kde $\mathbf{\sigma_C^2}$ - rozptyl portfolia

$\mathbf{\sigma_f^2}$ - rozptyl bezrizikového aktiva, které je však rovno nule, stejně jako kovariance $\mathbf{\sigma_{cf}}$ bezrizikového aktiva s portfoliem **C**. Potom se tato rovnice redukuje na tvar: $\mathbf{\sigma_p^2 = X_C^2.\sigma_C^2}$. Za proporci $\mathbf{X_C}$ do této rovnice dosadíme (4.7):

$$\mathbf{\sigma_p^2 = \frac{(\bar{r}_p - r_f)^2}{(\bar{r}_C - r_f)^2}.\sigma_C^2} \qquad (4.8)$$

Tato rovnice popisuje funkční závislost mezi očekávanou výnosností a rozptylem libovolného portfolia, které se dá vytvořit kombinací portfolia **C** a bezrizikové investice. To znamená, že pro takové konkrétní portfolio z **C** a bezrizikového aktiva bude mít očekávanou výnosnost $\mathbf{\bar{r}_p}$. To nám umožňuje pomocí diferenciálního počtu určit směrnici křivky, která spojuje portfolio **C** s bezrizikovou investicí. Pro zjednodušení výpočtu můžeme tuto směrnici určit derivováním $\mathbf{\frac{d\sigma_p^2}{d\bar{r}_p}}$, neboť platí $\mathbf{\frac{d\bar{r}_p}{d\sigma_p^2} = \frac{1}{\frac{d\sigma_p^2}{d\bar{r}_p}}}$.Takže směrnice této přímky **k**

bude: $$\mathbf{k = \frac{(\bar{r}_C - r_f)^2}{2.(\bar{r}_p - r_f).\sigma_C^2}} \qquad (4.9)$$

Jestliže si uvědomíme, že portfolio, ležící na křivce spojující bezrizikovou investici a portfolio **C**, je tangenciální portfolio **T**, potom směrnici přímky v tomto bodu obdržíme dosazením hodnoty $\mathbf{\bar{r}_T}$ za $\mathbf{\bar{r}_p}$ do (4.9).

$$\mathbf{\frac{1}{\tau} = \frac{(\bar{r}_C - r_f)^2}{2.(\bar{r}_T - r_f).\sigma_C^2}}$$

Z uvedené rovnice pak vypočítáme $\boldsymbol{\tau}$.

Potom: $$\mathbf{\tau = \frac{2.(\bar{r}_T - r_f).\sigma_C^2}{(\bar{r}_C - r_f)^2}} \qquad (4.10)$$

Pro bod **T** se dá rovnice (4.7) přepsat na tvar $\mathbf{(\bar{r}_C - r_f).X_C = (\bar{r}_T - r_f)}$. Dosazením do rovnice (4.10) a úpravě pak získáme zjednodušený tvar pro výpočet $\boldsymbol{\tau}$.

$$\mathbf{\tau = \frac{2.(\bar{r}_C - r_f).X_C.\sigma_C^2}{(\bar{r}_C - r_f)^2} = \frac{2.X_C.\sigma_C^2}{(\bar{r}_C - r_f)}} \qquad (4.11)$$

Ukázkový příklad:

Mějme portfolio **C** kde $\mathbf{\sigma_C}$ = 20% a $\mathbf{\bar{r}_C - r_f}$ = 5%. Jak velké bude $\boldsymbol{\tau}$?

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{2.X_C.20^2}{5} = \frac{2.X_C.400}{5} = 160.X_C$$

Ekvivalent výnosnosti

Člen $\mathbf{u_i}$ si můžeme představit jako ekvivalent výnosnosti libovolného portfolia, ležící na investorově křivce indiference **I**. Portfolio **T** na obr. 15 je investorem stejně žádoucí jako portfolio s očekávanou výnosností $\mathbf{u_i}$ a žádným rizikem. To znamená takové, které poskytne tuto výnosnost s jistotou. Potom tento ekvivalent jistoty bude:

$$\mathbf{u_i = \bar{r}_p - \frac{1}{\tau}.\sigma_p^2} \qquad (4.12)$$

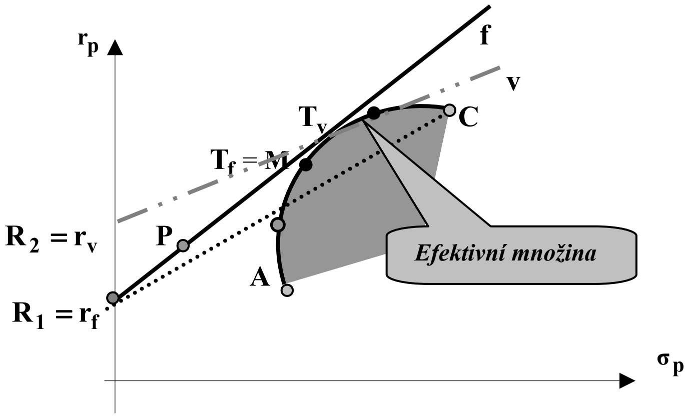
Ukázkový příklad:

Uvažujme hypotetické portfolio, které bude mít výnosnost $\bar{r}_p$ = 10%, σ_p = 8% a hodnota tolerance rizika τ = 50. Potom: $u_i = \bar{r}_p - \frac{1}{\tau}.\sigma_p^2 = 10 - \frac{64}{50} = 10 - 1{,}28 = 8{,}72\%$

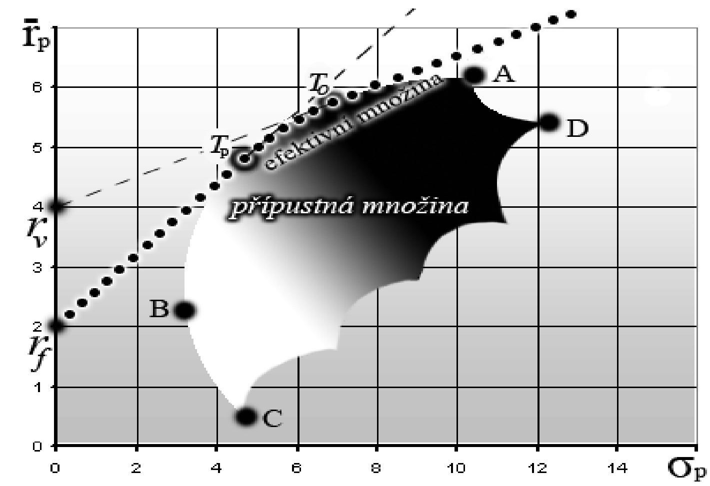
Ekvivalentně bude pokuta za riziko $\frac{64}{50} = 1{,}28\%$. Z uvedeného příkladu je vidět, že čím větší bude τ tím větší bude i hodnota $\mathbf{u_i}$. Stejně tak, bude-li σ_p co nejmenší.

4.3.5 Umožnění různých sazeb pro zapůjčování a vypůjčování

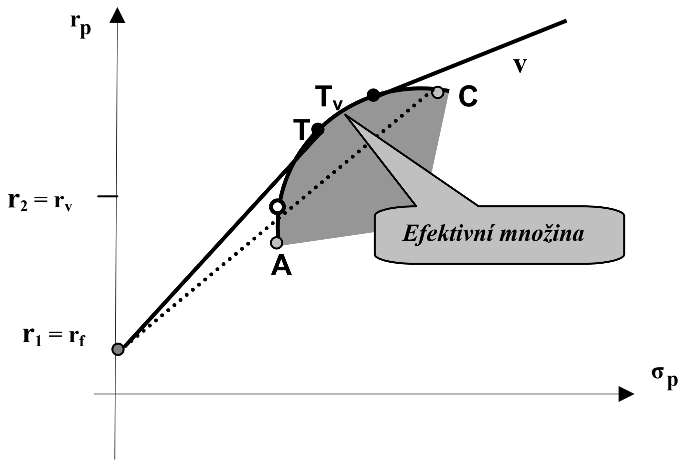
Jak jsme již dříve uvedli investor může investovat svůj kapitál z části do bezrizikové investice a z části do portfolia **T** podle investorova odporu k riziku. Předpokládejme, že si investor může vypůjčit kapitál za stejnou úrokovou sazbu jako má bezriziková investice. I tento kapitál můžeme považovat za bezrizikovou investici, neboť úroková sazba z úvěru se po dobu držení portfolia nebude měnit a investor předpokládá placení úroků a vrácení tohoto úvěru po realizaci portfolia. Na obr. 14 vidíme, že přímka **f** pokračuje dále podle toho jaký kapitál je ochoten si investor na zakoupení rizikových aktiv vypůjčit. Bude-li se výběr portfolia pohybovat po dané přímce vpravo, vidíme, že i riziko změny výnosnosti portfolia, které podstupuje investor se bude zvětšovat. To znamená, že investor bude investovat vlastní a vypůjčený kapitál do rizikového portfolia $\mathbf{T_f}$ na efektivní množině s očekáváním, že výnosnost tohoto portfolia nahradí podstoupené riziko této investice. Nyní předpokládejme, že vypůjčování a zapůjčování bylo možné za bezrizikovou sazbu $\mathbf{r_v}$. Výsledná efektivní množina by byla přímka **v**, která prochází body $\mathbf{R_2 = r_v}$ a bodem $\mathbf{T_v}$. Portfolio $\mathbf{T_v}$, jak je vidět z uvedeného grafu (obr. 14), leží na Markowitzově efektivní množině nad portfoliem $\mathbf{T_f}$, neboť odpovídá bodu dotyku odpovídajícímu vyšší bezrizikové sazbě. Protože si investor nemůže vypůjčit za bezrizikovou sazbu $\mathbf{r_f}$, ta část přímky, která vychází z bezrizikové sazby $\mathbf{r_f}$ a pokračuje za bodem (portfoliem) $\mathbf{T_f}$ není investorovi dostupná a můžeme ji z grafu vypustit. Protože si dále nemůže investor půjčovat za bezrizikovou sazbu $\mathbf{r_v}$, ta část přímky **v**, která vychází z bezrizikové sazby $\mathbf{r_v}$ a prochází bodem $\mathbf{T_v}$, ale leží vlevo od tohoto bodu, nemůže investor na této části efektivní množiny investovat. Tuto část přímky můžeme z grafu taktéž odstranit. Tím získáme efektivní množinu, která se bude skládat ze tří částí. První část (segment) tvoří polopřímka vycházející z bodu $\mathbf{R_1 = r_f}$ a končící v bodu $\mathbf{T_f}$. Tato přímka odpovídá investování do bezrizikového aktiva a rizikového portfolia $\mathbf{T_f}$ podle investorovi postoje k riziku. Druhou část tvoří křivka, vycházející z bodu $\mathbf{T_f}$ do bodu $\mathbf{T_v}$, která odpovídá kombinacím dvou různých rizikových portfolií $\mathbf{T_f}$ a $\mathbf{T_v}$. Třetí část tvoří přímka nad bodem $\mathbf{T_v}$, kdy investor za svůj a vypůjčený kapitál investuje do portfolia $\mathbf{T_v}$ (obr. 15).



Obr. 14a



Obr. 14b



Obr. 15

5. *Algoritmus hledání optimálního portfolia*

a) Formulace úlohy

Účelová funkce

Nejdříve musíme zvolit účelovou funkci, jejíž extrém budeme chtít nalézt. Máme v podstatě dvě možnosti, které vycházejí z výše uvedených pojetí množiny efektivních portfolii.

První možností je maximalizovat očekávaný výnos portfolia. V tom případě budeme maximalizovat funkci

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} X_i \bar{r}_i$$

Nevýhodou tohoto postupu je skutečnost, že pro tento typ úloh neexistuje obecně vhodná metoda jejich řešení. Ani rozepsáním nutných podmínek nedostaneme soustavu rovnic, která by byla přijatelným způsobem analyticky řešitelná.
Druhou možností je minimalizovat riziko změny výnosu portfolia. Pak musíme minimalizovat funkci

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij}$$

Tím minimalizujeme rozptyl náhodné veličiny popisující výnos portfolia. Jak jsme již dříve ukázali, minimum funkce $\sigma_p(\vec{X})$ nastane ve stejném bodě jako minimum funkce $\sigma_p^2(\vec{X})$ a hodnota tohoto minima bude druhá odmocnina z hodnoty minima funkce $\sigma_p^2(\vec{X})$.

b) Omezující podmínky

Dalším krokem je stanovení omezujících podmínek, které vyplývají z požadavků, které na portfolio klade investor.

1. podmínka

Jednou z obvyklých podmínek při sestavování portfolia je požadavek, aby se součet relativních podílů jednotlivých cenných papírů v portfoliu rovnal *jedné* (100 %). Tato podmínka zaručuje, že investor při tvorbě portfolia využije právě částku pro tento účel stanovenou $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$.

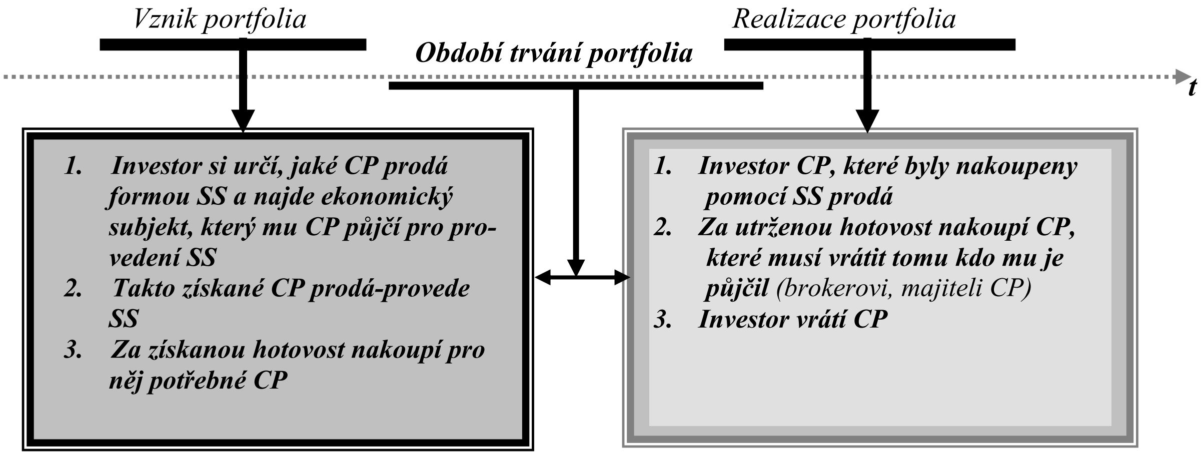
2. *podmínka*

Investor také může mít zvláštní požadavky na váhy jednotlivých cenných papírů.
$X_i \geq 0$, i =1,2,...,n. *Tato podmínka zakazuje provádění operace sell short.*

c) Sell short (Sale Short, prodej nakrátko nebo krátký prodej)

V předchozí části jsme se seznámili s pojmem bezriziková půjčka. Pokud dostane investor od nějaké bankovní či nebankovní instituce úvěr, nakoupí za tuto hotovost cenné papíry, které mu během trvání portfolia přinesou výnos větší, než by byl výnos z držby vypůjčeného bezrizikového aktiva. V okamžiku realizace portfolia investor obvykle smění část aktiv z jím drženého portfolia zpět za původně vypůjčené bezrizikové aktivum. Toto aktivum potom investor vrátí subjektu, od něhož si bezrizikové aktivum vypůjčil.Existuje možnost, aby si investor do svého portfolia nepůjčoval bezrizikové aktivum, ale aby si rovnou vypůjčil aktiva, v okamžiku vzniku portfolia takto vypůjčené cenné papíry prodal a v okamžiku realizace portfolia tyto cenné papíry koupil zpět a vrátil aktiva tomu, od koho si je půjčil. Z takto půjčených cenných papírů musí investor po dobu trvání portfolia hradit veškeré důchody (např. dividendy), na které má nárok subjekt, od něhož si investor cenné papíry vypůjčil.Samotný termín sell short cenného papíru označuje v burzovní praxi obchod, kdy spekulant na burze očekává pokles tržní ceny tohoto cenného papíru. Proto se spekulant domluví s partnerem, který má k dispozici tento cenný papír, aby mu část těchto cenných papírů zapůjčil s tím, že je v přesně definovaném termínu vrátí zpět.Nejčastějším partnerem pro provádění sell short je obchodník s cennými papíry (tzv. broker). Ten má většinou tyto cenné papíry pouze ve správě, jejich majitelem je někdo jiný. Proto žádá broker majitele cenných papírů o svolení prodat majitelovy cenné papíry formou sell short. Pokud majitel souhlasí, broker prodá cenné papíry na kapitálovém trhu a získanou hotovost (či spíše jen její část) dá k dispozici investorovi. Investor za tyto peníze nakoupí cenné papíry do svého portfolia a za nějakou předem sjednanou dobu vrátí investor cenné papíry brokerovi (a tedy majiteli cenných papírů).Sell short je věšinou záležitost velmi drahá, neboť je nutno platit poplatky za zprostředkování brokerovi, a navíc nedostává investor obvykle k dispozici celou částku za cenné papíry prodané formou sell short, ale jen její část. Zbytek zůstává u brokera jako zajištění. Přesto má sell short v teorii portfolia velký význam, neboť může pomoci dosáhnout menšího rizika změny očekávaného výnosu portfolia, ačkoliv kvůli velkým finančním nákladům sell short zpravidla neumožňuje zvýšit očekávaný výnos portfolia.

Schéma použití sell short při správě portfolia



3. podmínka

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij} = \sigma_p^2$$

Touto podmínkou stanoví investor ***maximální riziko*** σ_p , které je ochoten podstoupit. Optimální portfolio je takové, které má maximální výnos při stanoveném riziku změny výnosu. Tato podmínka má samozřejmě smysl pouze v případě, když si za účelovou funkci zvolíme $\bar{r}_p(\vec{X})$ a omezující podmínkou by pak byla funkce $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij} = \sigma_p^2$

4. podmínka

Častou podmínkou také bývá stanovení požadovaného výnosu $\bar{r}_p$, kterého musí portfolio dosáhnout.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \bar{r}_i = \bar{r}_p$$

Optimalizace portfolia potom spočívá v nalezení takového portfolia, které dosahuje požadovaný výnos s minimálním rizikem. Je zřejmé, že účelová funkce musí v tomto případě být $\sigma_p^2(\vec{X})$.

5.1 Postup řešení optimalizační úlohy

Z již dříve uvedených důvodů si pro výpočet za účelovou funkci volíme $\sigma_p^2(\vec{X})$. Optimální portfolio je tedy řešením minimalizační úlohy s kvadratickou účelovou funkcí a lineárními omezeními, které tvoří jednotlivé podmínky kladené na vlastnosti portfolia.

Langrangeova funkce

Minimalizační úlohu přepíšeme do následujícího tvaru:

$$\mathbf{f_0}\left(\vec{\mathbf{X}}\right) \to \mathbf{MIN}$$
$$\mathbf{f_i}\left(\vec{\mathbf{X}}\right) = \mathbf{0}, \; i = 1, 2, ..., m$$

K takto zapsané minimalizační úloze vytvoříme Lagrangeovu funkci:

$$\mathbf{L}\left(\vec{\mathbf{X}}\right) = \mathbf{L}\left(\vec{\mathbf{X}}, \lambda, \lambda_0\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathbf{f_i}\left(\vec{\mathbf{X}}\right), \text{ kde } \vec{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Čísla $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory (násobitelé).

Pro vyhledání extrému využijeme pravidla Lagrangeových multiplikátorů, které říká, že pokud je v bodě lokální extrém, pak existují Lagrangeovy multiplikátory, ne všechny současně rovny nule, pro něž platí

$\dfrac{\partial \mathbf{L}\left(\vec{\mathbf{X}}\right)}{\partial \mathbf{X_i}} = \mathbf{0}$ pro $i = 1,2,...,n$. Tento výraz tvoří nutné podmínky pro existenci extrému.

Při praktických úlohách se mlčky předpokládá, že $\lambda_0 \neq 0$, protože k tomu stačí, aby vektory prvních derivací omezujících podmínek $\mathbf{f_1}\left(\vec{\mathbf{X}}\right), ..., \mathbf{f_m}\left(\vec{\mathbf{X}}\right)$ byly lineárně nezávislé.

Aby platilo, že bod extrému je bodem minima, musí platit určité podmínky, které se nazývají postačující podmínky pro existenci minima. My se můžeme spokojit s konstatováním, že tyto podmínky platí, pokud je matice kvadratické formy $\mathbf{C} = \lfloor \mathbf{c_{ij}} \rfloor$, pro jejíž prvky platí $\mathbf{a_{ij}} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{L}\left(\vec{\mathbf{X}}\right)}{\partial \mathbf{X_i X_j}}$, pozitivně definitní.

Sylvestrova věta definuje čtvercovou symetrickou matici $\mathbf{C} = \lfloor \mathbf{c_{ij}} \rfloor$ řádu $\mathbf{n}$ jako pozitivně definitní, pokud jsou determinanty $\mathbf{D_{ii}} > \mathbf{0}$ pro všechna $\mathbf{i = 1, ..., n}$.

Matice $\mathbf{C} = \lfloor \mathbf{c_{ij}} \rfloor$ je kladně definitní (semidefinitní), jestliže hlavní minory (subdeterminanty),(to znamená minory, které dostáváme postupným zvětšováním minorů na hlavní diagonále počínaje prvkem $\sigma_{11} = \sigma_1^2$) jsou všechny kladné.(nezáporné). Potom **C** je též kladně definitní (semidefinitní). Potom definitní (semidefinitní) kvadratická forma je konvexní (ryze konvexní) funkcí pro všechny hodnoty $\vec{\mathbf{X}} = (\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, \cdots, \mathbf{X_n})$.

$$\mathbf{D_i} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{D_{11}} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D_{22}} = (-1)^{2+2} . \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}, \text{ atd.}$$

Kde $(-1)^{1+1}$ je algebraický doplněk a $\begin{vmatrix} \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}$ je minor (subdeterminant

U daného problému by bylo potřebné podrobněji popsat metodu kvadratického programování a podrobně popsat podmínky, které řešení tohoto problému umožňují.

Při řešení praktických úloh za účelovou funkci volíme $\sigma_p^2\left(\vec{\mathbf{X}}\right)$. S takto zvolenou účelovou funkcí a lineárními omezujícími podmínkami obdržíme matici **A** tohoto tvaru:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2.\sigma_{11} & 2.\sigma_{12} & \cdots & 2.\sigma_{1n} \\ 2.\sigma_{21} & 2.\sigma_{22} & \cdots & 2.\sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2.\sigma_{n1} & 2.\sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Z předcházejících kapitol též víme, že $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ a $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Soustava rovnic

Rozepsáním nutných podmínek získaných pomocí pravidla Lagrangeových multiplikátorů a zapsáním vedlejších podmínek získáme soustavu **n + m** rovnic o **n + m** neznámých, kde **n** je počet cenných papíru, ze kterých portfolio sestavujeme a **m** je počet omezujících podmínek, které vyplývají z požadavků kladených na portfolio.
Řešení této soustavy bude optimálním složením portfolia s požadovanými vlastnostmi.

5.2 Wolfova metoda

Patrně nejznámějším výpočetním postupem pro řešení úloh kvadratického programování je Wolfova metoda. Její předností je to, že se opírá jen o mírně pozměněnou simplexovou metodu lineárního programování, ale její nevýhodou je, že se při ní značně zvětší počet proměnných.
Maximalizujeme funkci

$$f(\vec{X}) = \alpha \vec{R}^T \vec{X} - \beta \vec{X}^T C \vec{X}$$

kde $\vec{R} = [\bar{r}_1, \bar{r}_2, ..., \bar{r}_n]$ a $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ jsou zvolené váhy, vyjadřující důležitost, jaká se přikládá výši účelové funkce (koeficient α) a spolehlivosti rozhodnutí (koeficient β).
V případě zvolení účelové funkce $\sigma_p^2(\vec{X})$ můžeme psát

$$f(\vec{X}) = -\vec{X}^T C \vec{X}$$

Riziko změny výnosu portfolia minimalizujeme vyřešením úlohy

$$f(\vec{X}) = -\vec{X}^T C \vec{X} \rightarrow MAX$$

$$A\vec{X} = b\,,\ X_i \geq 0$$

K tomu, abychom tuto úlohu kvadratického programování vyřešili, stačí vyřešit soustavu rovnic:

$$-2C\vec{X} + A^T \lambda + \vec{\xi} = 0$$

$$\vec{X}^T \vec{\xi} = 0$$

$$A\vec{X} = b$$

kde $\vec{\lambda}$ je vektor Lagrangeových multiplikátorů původní úlohy a $\vec{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ je vektor nových nezáporných proměnných.
Vzhledem k charakteru této úlohy můžeme pro výpočet použít krátkou formu Wolfovy metody.

a) Postup výpočtu

1. krok
Zavedeme nezáporné pomocné proměnné

$$\vec{z}^T = (z_1, z_2, ..., z_n),\ \vec{w}^T = (w_1, w_2, ..., w_m)$$

a simplexovou metodou minimalizujeme funkci $w_1 + w_2 + ... + w_m$ při lineárních omezeních

$$-2C\vec{X} + A^T \vec{\lambda} + \vec{\xi} + \vec{z} = 0$$

$$\mathbf{A\vec{X} + \vec{w} = \vec{b}}$$

Vycházíme přitom z báze, ve které jsou sloupce koeficientů u proměnných $\vec{\mathbf{w}}$ a $\vec{\mathbf{z}}$. Při výpočtu zachováváme pravidlo, že do báze nevezmeme žádnou z proměnných $\boldsymbol{\xi}_i$ ani $\boldsymbol{\lambda}_i$.

Má-li úloha kvadratického programování přípustné řešení, skončí první fáze vyloučením všech proměnných $\mathbf{w}_i$ z báze.

2. krok

Z přetransformované soustavy vypustíme po ukončení fáze 1 všechny sloupce s proměnnými $\mathbf{w}_i,\ \mathbf{i = 1,2,...,m}$ a těmi $\mathbf{z}_i,\ \mathbf{i = 1,2,...,n}$, které nejsou právě v bázi. Vycházejíce z takto upravené tabulky, minimalizujeme součet $\sum_{\mathbf{i}} \mathbf{z}_i$ kde se suma sčítá přes všechny proměnné $\mathbf{z}_i$, které po provedených úpravách zbyly v soustavě.

Při výpočtu zachováváme tato dodatečná pravidla:

- Je-li v bázi $\mathbf{x}_i$ nevezmeme do báze $\boldsymbol{\xi}_i$ a obráceně.
- Je-li hodnota účelové funkce $\sum_{\mathbf{i}} \mathbf{z}_i$ již nulová a zůstává-li přesto nějaké $\mathbf{z}_i$ v bázi (s nulovou hodnotou), vyloučíme je z báze.

3. krok

skončí po konečném počtu kroků a výsledné hodnoty $\mathbf{X}_i,\ \mathbf{i = 1,2,...,n}$, které čteme na pravé straně výpočetní tabulky, stejně jako při normální simplexové metodě udávají hledané řešení úlohy kvadratického programování.

5.3 Praktické úlohy optimalizace portfolia

Sestavit portfolio lze z cenných papírů uvedených v v tabulce 5 a 6, kde jsou také uvedeny charakteristiky těchto cenných papírů, které potřebujeme znát k provedení následujících výpočtů.

Ve všech případech půjde o optimalizaci portfolia. Portfolio budeme držet po dobu tří měsíců, datum jeho realizace[1].

a) Nalezení portfolia s minimálním rizikem

Při hledání portfolia s minimálním rizikem změny výnosu budeme minimalizovat funkci $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{2}}(\vec{\mathbf{X}})$.

Na velikost očekávaného výnosu portfolia nejsou kladeny žádné požadavky. Jedinou omezující podmínkou je tedy $\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{X}_i = \mathbf{1}$.

Formulace úlohy

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{2}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{7}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{7}} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ij}} \rightarrow \mathbf{MIN}$$

$$\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{7}} \mathbf{X}_i = \mathbf{1}$$

Lagrangeova funkce této úlohy bude vypadat následovně:

[1] Připomeňme, že i když zpravidla realizací myslíme přeměnu cenných papírů na hotovost. jindy to může být pouhé ocenění veškerých aktiv v portfoliu. Důvodem takového ocenění aktiv může být například zájem získat v okamžiku realizace lombardní úvěr zajištěný cennými papíry z portfolia.

$$L(\vec{X}) = \sigma_p^2 + \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{7} X_i - 1\right) =$$

$$= X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + \ldots + X_7^2\sigma_7^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1X_3\sigma_{13} + \ldots +$$

$$+ 2X_1X_7\sigma_{1,7} + 2X_2X_3\sigma_{23} + \ldots + 2X_6X_7\sigma_{6,7} + \lambda_1X_1 + \lambda_1X_2 + \ldots +$$

$$+ \lambda_1X_7 - \lambda_1$$

Soustava rovnic:

$$\frac{\partial L(\vec{X})}{\partial X_1} = 2X_1\sigma_1^2 + 2X_2\sigma_{12} + 2X_3\sigma_{13} + \ldots + 2X_7\sigma_{1,7} + \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L(\vec{X})}{\partial X_2} = 2X_2\sigma_2^2 + 2X_1\sigma_{21} + 2X_3\sigma_{23} + \ldots + 2X_7\sigma_{2,7} + \lambda_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L(\vec{X})}{\partial X_7} = 2X_7\sigma_7^2 + 2X_1\sigma_{7,1} + 2X_2\sigma_{7,2} + \ldots + 2X_6\sigma_{7,6} + \lambda_1 = 0$$

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_7 = 1$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	λ_1	Pravé strany rovnic
X_1	$2\sigma_1^2$	$2\sigma_{12}$	$2\sigma_{13}$	$2\sigma_{14}$	$2\sigma_{15}$	$2\sigma_{16}$	$2\sigma_{17}$	1	0
X_2	$2\sigma_{12}$	$2\sigma_2^2$	$2\sigma_{23}$	$2\sigma_{24}$	$2\sigma_{25}$	$2\sigma_{26}$	$2\sigma_{27}$	1	0
X_3	$2\sigma_{13}$	$2\sigma_{23}$	$2\sigma_3^2$	$2\sigma_{34}$	$2\sigma_{35}$	$2\sigma_{36}$	$2\sigma_{37}$	1	0
X_4	$2\sigma_{14}$	$2\sigma_{24}$	$2\sigma_{34}$	$2\sigma_4^2$	$2\sigma_{45}$	$2\sigma_{46}$	$2\sigma_{47}$	1	0
X_5	$2\sigma_{15}$	$2\sigma_{25}$	$2\sigma_{35}$	$2\sigma_{45}$	$2\sigma_5^2$	$2\sigma_{56}$	$2\sigma_{57}$	1	0
X_6	$2\sigma_{16}$	$2\sigma_{26}$	$2\sigma_{36}$	$2\sigma_{46}$	$2\sigma_{56}$	$2\sigma_6^2$	$2\sigma_{67}$	1	0
X_7	$2\sigma_{17}$	$2\sigma_{27}$	$2\sigma_{37}$	$2\sigma_{47}$	$2\sigma_{57}$	$2\sigma_{67}$	$2\sigma_7^2$	1	0
λ_1	1	1	1	1	1	1	1	0	1

Protože víme, že kovarianční matice je symetrická, je zřejmé, že v maticové tvaru můžeme tuto soustavu zapsat:

$$2\,C\,\vec{X} + \lambda_1\vec{e} = 0$$

$$\vec{X}^T\vec{e} = 1$$

Dosazením za σ_{ij} dostaneme následující rozšířenou matici soustavy.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7		
X_1	688,3	40,8	77,1	-151,3	369,9	592,5	633,5	1	0
X_2	40,8	73,4	20,0	27,2	-48,3	66,0	111,9	1	0
X_3	77,1	20,0	975,7	-327,4	42,4	151,3	357,9	1	0
X_4	-151,3	27,2	27,2	3619,9	-474,1	3,6	98,1	1	0
X_5	369,9	-48,3	42,4	-474,1	3505,3	-344,5	-63,4	1	0
X_6	592,5	66,0	151,3	3,6	-344,5	2792,6	1439,0	1	0
X_7	633,5	111,9	357,9	98,1	-63,4	1439,0	2342,2	1	0
	1	1	1	1	1	1	1	0	1

Tuto soustavu osmi lineárních rovnic o osmi neznámých je již jednoduché vyřešit některou z metod řešení systému lineárních rovnic (příloha 1). (K řešení je využito funkcí v Excelu – inverzní matice k matici soustavy rovnic /označena šedou barvou/ a potom násobením touto maticí, maticí pravých stran, obdržíme hodnoty neznámých vah /podílů/ cenných papírů v portfoliu)

X_1	0,05265816
X_2	0,87486631
X_3	0,06178339
X_4	0,01716197
X_5	0,02649816
X_6	0,0152311
X_7	-0,04819908
λ_1	-62,3980278

V posledním sloupci čteme vypočtené hodnoty relativních podílů jednotlivých cenných papírů v portfoliu. Optimální portfolio bude mít složení. které nám ukazuje Tabulka 11.

Tabulka 11: Portfolio s minimálním rizikem

Cenné papíry	r_i	σ_i	portfolio
CP_1	18,5	18,6	0,05265816
CP_2	8,7	6,1	0,87486631
CP_3	15,3	22,1	0,06178339
CP_4	32,5	42,5	0,01716197
CP_5	30,0	41,9	0,02649816
CP_6	23,1	37,4	0,0152311
CP_7	19,4	34,2	-0,04819908
Výnos portfolia			**10,30028**
Riziko portfolia			**12,59205**

Tedy investor, který bude chtít minimalizovat riziko změny výnosu svého portfolia, investuje do jednotlivých cenných papírů výše uvedené podíly z částky určené k sestavení portfolia. Záporné číslo u podílů některých cenných papírů znamená, že by s nimi měl investor provést operaci sell short. Určené množství těchto cenných papírů si vypůjčí a prodá je. Takto získané prostředky použije na nákup cenných papírů s kladnými podíly.

Tabulka 12: Vytvořené portfolio s minimálním rizikem za 5 000 000 Kč

Cenný papír	$\bar{r}_i$	σ_i	Podíl CP v portfoliu	Tržní cena	Počet CP v portfoliu	Investovaná částka
CP_1	18,5	18,6	0,05265816	869,20	792	688080
CP_2	8,7	6,1	0,87486631	1500,00	1869	2802895
CP_3	15,3	22,1	0,06178339	2025,00	319	646700
CP_4	32,5	42,5	0,01716197	3839,00	117	451030
CP_5	30,0	41,9	0,02649816	7875,00	52	406910
CP_6	23,1	37,5	0,0152311	204,70	319	281070
CP_7	19,4	34,2	-0,04819908	127,74	-1352	-276700
Portfolio	**10,3003**	**8,44395**	1			**4 999 985**

Uvažujme příklad investora, který má na sestavení portfolia k dispozici 5 milionů Kč. Investor zná podíly jednotlivých cenných papírů, které chce mít ve svém portfoliu. Zjistí si aktuální tržní cenu za kus těchto cenných papírů a jednoduše zjistí, kolik kusů akcií jednotlivých titulů má nakoupit resp. půjčit si a prodat. Jak vidíme z uvedené tabulky výnosnost portfolia za rok bude **10,3003** a investované prostředky činí **4 999 985** Kč. Potom zisk z této investice bude: 4999985.(1+0,103003) = 5 515 014 a zisk z takto investovaných prostředků pak 5 515 014 - 4 999 985 = 515 014,2 Kč.

b) Nalezení portfolia s minimálním rizikem a požadovaným výnosem 15%

Stejně jako v předchozí úloze budeme minimalizovat funkci $\boldsymbol{\sigma_p^2\left(\vec{X}\right)}$. Tentokrát jsou však na portfolio kladeny určité požadavky, a to, aby výnos portfolia $\mathbf{\bar{r}_p}$ byl 15 %. To se projeví přidáním omezující podmínky: $\mathbf{\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{7} X_i \bar{r}_i}$, která zaručí, že výnos portfolia bude požadovaných 15 %.

Formulace úlohy:

$$\boldsymbol{\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} X_i X_i \sigma_{ij} \rightarrow \mathrm{MIN}}$$

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{7} X_i = 1\,,\quad \sum_{i=1}^{7} \bar{r}_i X_i = 15}$$

Lagrangeova funkce této úlohy bude formulovaná následovně:

$$\boldsymbol{L\left(\vec{X}\right) = \sigma_p^2 + \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{7} X_i - 1\right) + \lambda_2\left(\sum_{i=1}^{7} \bar{r}_i X_i - 15\right) =}$$

$$\boldsymbol{= X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + \ldots + X_{10}^2\sigma_{10}^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1X_3\sigma_{13} + \ldots +}$$

$$\boldsymbol{+ 2X_1X_7\sigma_{1,7} + 2X_2X_3\sigma_{23} + \ldots + 2X_6X_7\sigma_{6,7} + \lambda_1X_1 + \lambda_1X_2 +}$$

$$\boldsymbol{+ \ldots + \lambda_1X_7 - \lambda_1 + \lambda_2\bar{r}_1X_1 + \lambda_2\bar{r}_2X_2 + \ldots + \lambda_2\bar{r}_7X_7 - 15\lambda_2}$$

Soustava rovnic:

$$\boldsymbol{\frac{\partial L\left(\vec{X}\right)}{\partial X_1} = 2X_1\sigma_1^2 + 2X_2\sigma_{12} + 2X_3\sigma_{13} + \ldots + 2X_7\sigma_{1,7} + \lambda_1 + \lambda_2\bar{r}_1 = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial L\left(\vec{X}\right)}{\partial X_2} = 2X_2\sigma_2^2 + 2X_1\sigma_{12} + 2X_3\sigma_{23} + \ldots + 2X_7\sigma_{2,7} + \lambda_1 + \lambda_2\bar{r}_2 = 0}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial L\left(\vec{X}\right)}{\partial X_{10}} = 2X_7\sigma_7^2 + 2X_1\sigma_{1,7} + 2X_2\sigma_{2,7} + \ldots + 2X_6\sigma_{6,7} + \lambda_1 + \lambda_2\bar{r}_7 = 0}$$

$$\boldsymbol{X_1 + X_2 + \ldots + X_7 = 1}$$

$$\boldsymbol{\bar{r}_1X_1 + \bar{r}_2X_2 + \ldots + \bar{r}_7X_7 = 15}$$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	λ_1	λ_2	**Pravé strany rovnic**
$2\sigma_1^2$	$2\sigma_{12}$	$2\sigma_{13}$	$2\sigma_{14}$	$2\sigma_{15}$	$2\sigma_{16}$	$2\sigma_{17}$	1	r_1	0
$2\sigma_{12}$	$2\sigma_2^2$	$2\sigma_{23}$	$2\sigma_{24}$	$2\sigma_{25}$	$2\sigma_{26}$	$2\sigma_{27}$	1	r_2	0
$2\sigma_{13}$	$2\sigma_{23}$	$2\sigma_3^2$	$2\sigma_{34}$	$2\sigma_{35}$	$2\sigma_{36}$	$2\sigma_{37}$	1	r_3	0
$2\sigma_{14}$	$2\sigma_{24}$	$2\sigma_{34}$	$2\sigma_4^2$	$2\sigma_{45}$	$2\sigma_{46}$	$2\sigma_{47}$	1	r_4	0
$2\sigma_{15}$	$2\sigma_{25}$	$2\sigma_{35}$	$2\sigma_{45}$	$2\sigma_5^2$	$2\sigma_{56}$	$2\sigma_{57}$	1	r_5	0
$2\sigma_{16}$	$2\sigma_{26}$	$2\sigma_{36}$	$2\sigma_{46}$	$2\sigma_{56}$	$2\sigma_6^2$	$2\sigma_{67}$	1	r_6	0
$2\sigma_{17}$	$2\sigma_{27}$	$2\sigma_{37}$	$2\sigma_{47}$	$2\sigma_{57}$	$2\sigma_{67}$	$2\sigma_7^2$	1	r_7	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	0	0	15

Dosazením hodnot za $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ a $\overline{r}_i$ opět dostáváme rozšířenou matici soustavy, kterou řešíme stejně jako v předchozím případě.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	λ_1	λ_2	b
X_1	688,3	40,8	77,1	-151,3	369,9	592,5	633,5	1	18,5	0
X_2	40,8	73,4	20,0	27,2	-48,3	66,0	111,9	1	8,7	0
X_3	77,1	20,0	975,7	-327,4	42,4	151,3	357,9	1	15,3	0
X_4	-151,3	27,2	27,2	3619,9	-474,1	3,6	98,1	1	32,5	0
X_5	369,9	-48,3	42,4	-474,1	3505,3	-344,5	-63,4	1	30,0	0
X_6	592,5	66,0	151,3	3,6	-344,5	2792,6	1439,0	1	23,1	0
X_7	633,5	111,9	357,9	98,1	-63,4	1439,0	2342,2	1	19,4	0
λ_1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
λ_2	18,5	8,7	15,3	32,5	30,0	23,1	19,4	0	0	15

Výpočet je proveden v příloze 2 a jeho výsledkem je následující matice, v jejímž posledním sloupci můžeme opět číst hodnoty podílů jednotlivých cenných papírů
Portfolio s minimálním rizikem při 15% výnosu tedy bude mít složení, které uvádí Tabulka 13. Oproti předchozímu příkladu, kdy jsme pouze minimalizovali riziko bez ohledu na výnos portfolia, je riziko pochopitelně větší. Větší očekávaný výnos je totiž kompenzován vyšší mírou rizika jeho změny.

Tabulka 13: Portfolio s minimálním rizikem a výnosem 15 %

	r_i	σ_i	portfolio
CP1	18,5	18,6	0,137616
CP2	8,7	6,1	0,560579
CP3	15,3	22,1	0,12934
CP4	32,5	42,5	0,090206
CP5	30,0	41,9	0,081382
CP6	23,1	37,4	0,056214
CP7	19,4	34,2	-0,05534
Výnos portfolia			**15,0**
Riziko portfolia	**16,3**	**Min.**	

Tabulka 14: Vytvoření portfolia s minimálním rizikem při 15% výnosu za 5 milionů Kč

Cenný papír	r_i	σ_i	**Podíl CP v portfoliu**	**Tržní cena**	**Počet CP v portfoliu**	**Investovaná částka**
CP1	18,5	18,6	0,137616	869,20	303	263290,8
CP2	8,7	6,1	0,560579	1 500,00	2916	4374331,6
CP3	15,3	22,1	0,12934	2 025,00	153	308916,94
CP4	32,5	42,5	0,090206	3 839,00	22	85609,85
CP5	30,0	41,9	0,081382	7 875,00	17	132490,8
CP6	23,1	37,4	0,056214	882,00	372	76155,4
CP7	19,4	34,2	-0,05534	204,70	-1887	-240995,4
Portfolio	**14,99994**	**16,3**	**100,0**			**5 000 000**

Investor by nakoupil akcie **CP1**, **CP2**, **CP3**, **CP4**, **CP5** a **CP6** v uvedených množstvích. Zbývající titul **CP7** by si vypůjčil a prodal, aby získané prostředky použil na nákup ostatních akcií. Při realizaci portfolia nakoupí tyto tituly a vrátí je původnímu majiteli a prodá tituly, které drží v portfoliu. Výsledek těchto operací bude zhodnocení investované částky o 15 % s 16,3 % rizikem změny tohoto výnosu.

c) Nalezení portfolia kde je povolen krátký prodej (Sell short) a bezrizikové půjčování i vypůjčování je možné

Při sestavování portfolia volíme takové, které leží v množině efektivních portfolií. Nyní budeme hledat úlohu, která vede k nalezení portfolia právě z této množiny. Sestavování takového portfolia je spojeno s použitím matematických metod, které spočívají v hledání vázaných, popřípadě volných extrémů funkcí více proměnných. Budeme vycházet ze známých výrazů pro výpočet výnosnosti portfolia a rizika změny výnosnosti tohoto portfolia.

$$\mathbf{r_p = \sum_{i=1}^{n} X_i . r_i} \qquad \mathbf{\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i . X_j . \sigma_{ij}}}$$

Jestliže budeme uvažovat bezrizikové aktivum $\mathbf{r_f}$ (to znamená půjčování[2] a vypůjčování) potom výraz pro výnos portfolia se změní a to:

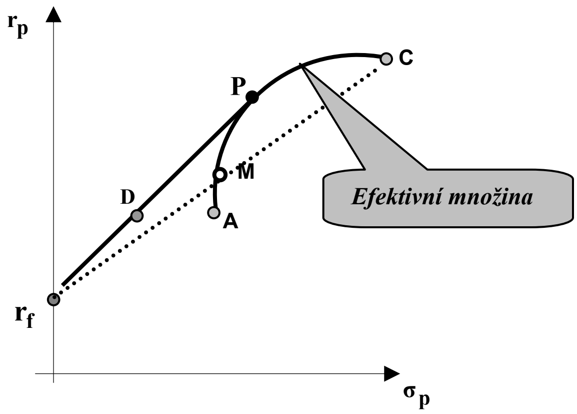
$$\mathbf{r_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} X_i . (r_i - r_f)}$$

Důkaz: víme, že součet vah cenných papírů v portfoliu je rovný jedné.

$$\mathbf{\sum_{i=1}^{n} X_i = 1}.$$

Tudíž daný výraz můžeme zapsat: $\mathbf{r_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} X_i . r_i - 1.r_f = \sum_{i=1}^{n} X_i . r_i - \sum_{i=1}^{n} X_i . r_f = \sum_{i=1}^{n} X_i . (r_i - r_f)}$

Z předešlé kapitoly víme, že investor část peněžních prostředků investuje do bezrizikového aktiva (bezrizikové úrokové míry) a část do portfolia s rizikovými cennými papíry.



Obr. 19

[2] Použijeme-li bezrizikové aktivum (státní peněžní poukázka, krátkodobý dluhopis), poskytli jsme vládě půjčku ve výši ceny tohoto krátkodobého dluhopisu s tím, že při jeho splatnosti obdržíme vynaložený kapitál zhodnocený jeho úrokovou sazbou

Například na Obr.19 je portfolio na polopřímce $\mathbf{r_f}$ a **T** preferováno před všemi portfolii s rizikovými cennými papíry. Efektivní hranicí je celá polopřímka $\mathbf{r_f}$ a **T.** V tomto případě jde o určení polopřímky s největší směrnicí (s největším sklonem). Tento úhel, který svírá můžeme snadno určit vztahem:

$$\mathbf{f(\vec{X}) = tg\,\varphi = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p}}$$

Za podmínky $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X_i} = \mathbf{1}$

Jedná se o nalezení extrému funkce omezeného jednou podmínkou a to, že součet vah v portfoliu je roven jedné. Existují dostupné metody řešení tohoto problému.

Víme, že $\mathbf{r_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} X_i.(r_i - r_f)}$ a $\mathbf{r_p = \sum_{i=1}^{n} X_i.r_i}$ $\quad \mathbf{\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i.X_j.\sigma_{ij}}}$.

$$\text{Potom } \mathbf{f(\vec{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i (r_i - r_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i.X_j.\sigma_{ij}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i (r_i - r_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2.\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} X_i, X_j.\sigma_{ij}}}}$$

Řešení uvedeného maximalizačního problému spočívá v nalezení řešení systému lineárních rovnic o **n** neznámých.

$$1)\quad \mathbf{\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial X_1} = 0}$$

$$2)\quad \mathbf{\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial X_2} = 0}$$

$$3)\quad \mathbf{\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial X_3} = 0}$$

$$\vdots$$

$$n)\quad \mathbf{\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial X_n} = 0}$$

Potom

$$\mathbf{\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial X_i} = -\left(\lambda X_1 \sigma_{1i} + \lambda X_2 \sigma_{2i} + \lambda X_3 \sigma_{3i} + \cdots + \lambda X_i \sigma_i^2 + \cdots + \lambda X_{n-1} \sigma_{n-1,i} + \lambda X_n \sigma_n + \bar{r}_i - r_f\right) = 0},$$

Kde $\boldsymbol{\lambda}$ je konstanta: $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{\frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p^2}}$. Můžeme si všimnout, že každé $\mathbf{X_k}$ je násobeno touto konstantou.

Pro další zjednodušení zaveďme substituci: $\mathbf{Z_k = \lambda.X_k}$, což představuje podíly cenných papírů investovaných do portfolia a $\mathbf{Z_k}$ jsou úměrné k těmto částem. Pro výpočet vah (podílů) $\mathbf{X_k}$ v portfoliu dělíme každé $\mathbf{Z_k}$ součtem všech hodnot $\mathbf{Z_k}$.

$$\text{Tedy } \mathbf{X_k \frac{Z_k}{\sum_{k=1}^{n} Z_k}} \text{ kde } \mathbf{k = 1, 2, 3, \dots, n}$$

Po jednoduché algebraické úpravě rovnice obdržíme:

$$\mathbf{\bar{r}_i - r_f = Z_1.\sigma_{i1} + Z_2.\sigma_{2i} + Z_3.\sigma_{3i} + \cdots + Z_i.\sigma_i^2 + \cdots + Z_{n-1}.\sigma_{1,n-1\,i} + Z_n.\sigma_{1,n\,i}}$$

Tuto rovnici rozepíšeme pro každou hodnotu **i:**

$$\bar{r}_1 - r_f = Z_1.\sigma_1^2 + Z_2.\sigma_{12} + Z_3.\sigma_{13} + \cdots + Z_n.\sigma_{1n}$$
$$\bar{r}_2 - r_f = Z_1.\sigma_{12} + Z_2.\sigma_2^2 + Z_3.\sigma_{12} + \cdots + Z_n.\sigma_{2n}$$
$$\bar{r}_3 - r_f = Z_1.\sigma_{13} + Z_2.\sigma_{23} + Z_3.\sigma_3^2 + \cdots + Z_n.\sigma_{3n}$$
$$\vdots$$
$$\bar{r}_n - r_f = Z_1.\sigma_{1n} + Z_2.\sigma_{2n} + Z_3.\sigma_{3n} + \cdots + Z_n.\sigma_n^2$$

Jestliže se podíváme na pravou stranu rovnice, vidíme, že u jednotlivých neznámých jsou hodnoty, které odpovídají rozptylu jednotlivých cenných papírů a kovariancím mezi nimi. Pro řešení takovéto soustavy použijeme nám již známou kovarianční matici a nám již známé výnosnosti cenných papírů a také bezrizikovou úrokovou míru.

Odvození:

$$f(\vec{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i (r_i - r_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i . X_j . \sigma_{ij}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i (r_i - r_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_i , X_j . \sigma_{ij}}}$$

Tento výraz můžeme též zapsat:

$$f(\vec{X}) = \left[\sum_{i=1}^{n} X_i (r_i - r_f)\right] . \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_i , X_j . \sigma_{ij}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Pro jednodušší výpočet si zaveďme pomocné proměnné:

$$F_1(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i (r_i - r_f) \quad \text{a} \quad F_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_i , X_j . \sigma_{ij}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Z matematiky známe pravidlo pro derivaci součinu, které požijeme na náš řešený problém.

$$\frac{d}{dx}[F_1(x)].[F_2(x)] = \frac{dF_1(x)}{dx}.F_2(x) + F_1(x).\frac{dF_2(x)}{dx}$$

Derivujme nejdříve funkci $F_1(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i (r_i - r_f)$

Tato funkce obsahuje mnoho členů, které neobsahují X_k a pouze jeden člen, zahrnující X_k.
Z matematiky a parciálních derivací víme, že ostatní proměnné mimo X_k jsou rovny nule (jsou konstantní, pokud jde o X_k).

Potom bude derivace vzhledem k X_k rovna:

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial X_k} = \bar{r}_k - r_f, \qquad \text{pro } k = 1, 2, 3, \cdots, n$$

Nyní budeme řešit funkci $\mathbf{F_2(x)} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_i , X_j . \sigma_{ij} \right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial F_2(x)}{\partial X_k} = -\frac{1}{2} . \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_i . X_j . \sigma_{ij} \right)^{-\frac{3}{2}} . \left(2.X_k . \sigma_k^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} X_j . \sigma_{jk} \right)$$

Jedná se o derivaci složené funkce, kde nejdříve derivujeme vnější funkci násobenou derivací vnitřní funkce.
Derivace prvního členu součtu vnitřní funkce u předcházejícího výrazu je jednoduchá, neboť se jedná o derivaci mocniny. Všechny členy, které neobsahují index $\mathbf{k}$ jsou pro nás konstanty. Potom tedy $\mathbf{X_k^2 . \sigma_k^2}$ má derivaci $\mathbf{2.X_k . \sigma_k^2}$. O něco složitější je derivace dvojnásobného součtu $\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_i , X_j . \sigma_{ij}$.

Budeme uvažovat $\mathbf{X_k}$ dvakrát. Jednou, když $\mathbf{i = k}$ a podruhé, když $\mathbf{j = k}$.

Pro $\mathbf{i = k}$, máme: $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} X_k . X_j . \sigma_{kj} = X_k . \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} X_j . \sigma_{kj}$. Potom derivace bude : $\sum_{\substack{j=j \\ j \neq k}}^{n} X_j . \sigma_{kj}$

Pro $\mathbf{j = k}$, máme: $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} X_k . X_i . \sigma_{ik} = X_k . \sum_{\substack{i=j \\ i \neq k}}^{n} X_i . \sigma_{ik}$. Potom derivace bude : $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} X_i . \sigma_{ik}$

Vzpomeňme si na tvar kovarianční matice, kde $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$. Tudíž $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} X_j . \sigma_{kj} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} X_i . \sigma_{ik}$.

Z toho obdržíme vyjádření derivace dvojnásobného součinu a to: $2. \sum_{\substack{j=j \\ j \neq k}}^{n} X_j . \sigma_{jk}$

Dosazením námi derivovaných výrazů do

$$\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial X_k} = \left[\sum_{i=1}^{n} X_i . (r_i - r_f) \right] . \left(-\frac{1}{2} \right) . \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_i . X_j . \sigma_{ij} \right)^{-\frac{3}{2}} . \left(2.X_k . \sigma_k^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} X_j . \sigma_{jk} \right) .$$

$$. \left(2.X_k . \sigma_k^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} X_j . \sigma_{jk} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_i , X_j . \sigma_{ij} \right)^{-\frac{1}{2}} . (\bar{r}_k - r_f) = 0$$

Námi vypočítanou derivaci vynásobíme výrazem: $\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_i , X_j . \sigma_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}$ a algebraickou úpravou obdržíme:

$$-\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(\bar{r}_i - r_f)}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2.\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} X_i, X_j.\sigma_{ij}}\right].\left[X_k.\sigma_k^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} X_j.\sigma_{kj}\right] + (\bar{r}_k - r_f) = 0$$

Jelikož po vyřešení soustavy **n** rovnic obdržíme váhy cenných papírů v portfoliu, můžeme výraz

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(r_i - r_f)}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2.\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} X_i, X_j.\sigma_{ij}} = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p^2} = \lambda$$

$$-\lambda.\left[X_k.\sigma_k^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} X_j.\sigma_{kj}\right] + (\bar{r}_k - r_f) = 0$$

Potom:

$$(\bar{r}_k - r_f) = \lambda.\left[X_k.\sigma_k^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} X_j.\sigma_{kj}\right] = \lambda.X_k.\sigma_k^2 + \lambda.\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} X_j.\sigma_{jk}$$

Ukázkový příklad:

Uvažujme tři cenné papíry, u kterých známe jejich výnosnosti, směrodatné odchylky a výnosnost bezrizikového aktiva.V minulých kapitolách jsme si uvedli jakým způsobem tyto hodnoty získáme z burzy s cennými papíry a také kde získáme výnosnost bezrizikového aktiva. Tyto hodnoty si uvedeme v tabulce.

Cenný papír	*Výnosnost* $\bar{r}_i$	*Riziko* σ_i	*Korelace* ρ_{ij}	*Bezrizikové aktivum*
C_1	**0,14**	**0,06**	$\rho_{12} = 0,5$	$r_f = 0,05$
C_2	**0,08**	**0,03**	$\rho_{13} = 0,2$	
C_3	**0,20**	**0,15**	$\rho_{23} = 0,4$	

Z těchto získaných hodnot sestavíme soustavu rovnic:

$$\bar{r}_1 - r_f = Z_1.\sigma_1^2 + Z_2.\sigma_1.\sigma_2.\rho_{12} + Z_3.\sigma_1.\sigma_3.\rho_{13}$$
$$\bar{r}_2 - r_f = Z_1.\sigma_1.\sigma_2.\rho_{12} + Z_2.\sigma_2^2 + Z_3.\sigma_2.\sigma_3.\rho_{23}$$
$$\bar{r}_1 - r_f = Z_1.\sigma_1.\sigma_3.\rho_{13} + Z_2.\sigma_2.\sigma_3.\rho_{23} + Z_3.\sigma_3^2$$

Dosazením námi získaných hodnot obdržíme kovariační matici:

$$\begin{pmatrix} 0{,}0036 & 0{,}0009 & 0{,}0018 \\ 0{,}0009 & 0{,}0009 & 0{,}0018 \\ 0{,}0018 & 0{,}0018 & 0{,}0225 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}09 \\ 0{,}03 \\ 0{,}15 \end{pmatrix}$$

Kovarianční matice(matice soustavy rovnic)

Matice pravých stran

Tuto soustavu pouze tří rovnic můžeme řešit klasickým způsobem známým ze střední školy. Avšak v případě více rovnic by bylo řešení daleko složitější. Proto i v tomto jednoduchém příkladu použijeme metodu řešení rovnic pomocí inverzní matice k matici soustavy a touto inverzní maticí pak budeme násobit matici pravých stran.

Obdržíme inverzní matici:

$$\begin{pmatrix} 370{,}3704 & -370{,}37 & 0{,}000000000000027 \\ -370{,}37 & 1693{,}122 & -105{,}82 \\ 0{,}000000000000027 & -105{,}82 & -52{,}91005 \end{pmatrix}$$

Obdržené řešení pro hodnoty $\mathbf{Z_k}$ pro k = 1, 2, 3 bude: $\mathbf{Z_1} = 0,222222$, $\mathbf{Z_2} = 0{,}015873$, $\mathbf{Z_3} = 0{,}047619$

$$\sum_{k=1}^{3} \mathbf{Z_k} = 0{,}285714$$

Váhy cenných papírů v portfoliu pak vypočítáme: $\mathbf{X_k} = \dfrac{\mathbf{Z_k}}{\sum_{k=1}^{3} \mathbf{Z_k}}$

Podíly (váhy) cenných papírů v portfoliu budou: $\mathbf{X_1} = \mathbf{0{,}777778}$, $\mathbf{X_2} = \mathbf{0{,}055556}$, $\mathbf{X_3} = \mathbf{0,166667}$

Očekávaný výnos portfolia pak:

$$\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{X_k} . \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{k}} = 0{,}777778.0{,}14 + 0{,}055556.0{,}08 + 0{,}166667.0{,}20 = 0{,}146667 = \mathbf{14,6667\ \%}$$

Rozptyl výnosu portfolia a změna výnosu portfolia (riziko změny výnosu):

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \mathbf{X_i}.\mathbf{X_j}.\sigma_{ij} = 0{,}777778^{2}.36 + 0{,}055556^{2}.9 + 0{,}166667^{2}.225 +$$

$$+ 2.0{,}777778.6.3.0{,}5 + 2.0{,}777778.6.15.0{,}2 + 2.0{,}055556.3.15.0{,}4 = \mathbf{33,83333\ \%}$$

$$\sigma_p = 0{,}3383333^{1/2} = \mathbf{0,581664}$$

Můžeme si všimnout, že rozptyl portfolia lze určit i jiným způsobem. Stačí si připomenout, že λ je koeficient přebytku výnosu z optimálního portfolia, dělený rozptylem tohoto portfolia $\lambda = \dfrac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p^2} \Rightarrow \sigma_p^2 = \dfrac{\bar{r}_p - r_f}{\lambda}$ .Také víme, že $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z_i} = \lambda . \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X_i} = \lambda$, neboť $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X_i} = \mathbf{1}$. Z naší rovnice je zřejmé, že součet $Z_i = \lambda = 0{,}285714$.

Dosazením těchto hodnot do naší rovnice obdržíme: $\sigma_p^2 = \dfrac{\mathbf{0{,}146667 - 0{,}05}}{\mathbf{0{,}285714}} = \mathbf{0,338333 = 33,8333\ \%}$

Obdrželi jsme stejný výsledek jako při zdlouhavém výpočtu rozptylu za použití vypočítaných vah cenných papírů, jejich rozptylů a kovariancí.

d) Nalezení portfolia s minimálním rizikem (sell short je zakázán)

V předchozích případech byl vždy sell short povolen a také se při tvorbě portfolia použil. Ne vždy však investor chce, nebo může této operace použít, a to z nejrůznějších důvodů. Nyní si ukážeme, jak by vypadalo optimální portfolio při zakázaném prodeji nakrátko. V tomto případě jde o úlohu nelineárního programování a to kvadratické programování, kde účelová funkce je kvadratická s lineárními omezeními. Tato kvadratická funkce n – proměnných se též nazývá kvadratická forma.

$$\mathbf{f}(\vec{\mathbf{X}}) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_i}.\mathbf{X_j}.\sigma_{ij} = \vec{\mathbf{X}}^{\mathbf{T}}\vec{\mathbf{C}}\vec{\mathbf{X}}$$

Kde $\vec{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$ je symetrická matice, neboť platí, že $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Fáze 1

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	λ_1	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	w_1	b
z_1	-688,3	-40,8	-77,1	151,3	-369,9	-592,5	-633,5	-93,8	-362,6	-140,5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z_2	-40,8	-73,4	-20,0	-27,2	48,3	-66,0	-111,9	-14,1	9,4	-24,6	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z_3	-77,1	-20,0	-975,7	327,4	-42,4	-151,3	-357,9	57,8	-92,1	-4,4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z_4	151,3	-27,2	-27,2	-3619,9	474,1	-3,6	-98,1	-289,2	260,5	-199,9	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
z_5	-369,9	48,3	-42,4	474,1	-3605,3	344,5	63,4	560,2	206,8	157,5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
z_6	-592,5	-66,0	-151,3	-3,6	344,5	-2792,6	-1439,0	-863,9	-578,5	138,3	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
z_7	-633,5	-111,9	-357,9	-98,1	63,4	-1439,0	-2342,2	-712,8	-673,2	361,1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
z_8	-93,8	-14,1	57,8	-289,2	560,2	-863,9	-712,8	-1396,7	-313,7	83,8	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
z_9	-362,6	9,4	-92,1	260,5	206,8	-578,5	-673,2	-313,7	-1273,7	254,4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
z_{10}	-140,5	-24,6	-4,4	-199,9	157,5	138,3	361,1	83,8	254,4	-2419,3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
w_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Takto bude vypadat výchozí výpočetní tabulka pro fázi 1. Nyní z báze vyloučíme proměnnou $\mathbf{w_i}$ a místo ní do báze vstoupí $\mathbf{X_1}$. Tím fáze 1 skončí, protože jsme již vyloučili veškeré proměnné $\mathbf{w_i}$.

Fáze 2

Z tabulky získané na konci fáze 1 vypustíme sloupec s proměnnou $\mathbf{w_i}$. Naopak do ní přidáme sloupce s proměnnými $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7$. Můžeme si dovolit přidat až nyní, vzhledem k tomu, že ve fázi 1 nemohla žádná z těchto proměnných vstoupit do báze.

V takto upravené tabulce budeme minimalizovat součet $\sum_{i=1}^{10} \mathbf{z_i}$. Vzhledem k rozsahu dalších tabulek jsou tyto uvedeny pouze v příloze 3. Výpočet skončí vyloučením všech proměnných $\mathbf{z_i}$ z báze a dostáváme výsledný vektor podílů jednotlivých cenných papírů v portfoliu $\vec{\mathbf{X}}$.

X_1	0
X_2	0,788787
X_3	0,043383
X_4	0,014338
X_5	0,038984
X_6	0
X_7	0
X_8	0,03749
X_9	0,05297
X_{10}	0,02405
$\sum$	1

Charakteristiky portfolia s takovým složením ukazuje Tabulka 15.
Vzhledem k rozsáhlosti jednotlivých řešení jsou jednotlivé tabulky umístněny v příloze této studijní pomůcky.

Tabulka 15: Portfolio s minimálním rizikem, sell short zakázán

	r_i	σ_i	portfolio
CP_1	18,5	18,6	0
CP_2	8,7	6,1	0,788787
CP_3	15,3	22,1	0,043383
CP_4	32,5	42,5	0,014338
CP_5	30,0	41,9	0,038984
CP_6	23,1	37,4	0
CP_7	19,4	34,2	0
CP_8	11,5	26,4	0,03749
CP_9	14,5	25,2	0,05297
CP_{10}	8,8	34,8	0,02405
Výnos portfolia			**10,6**
Riziko portfolia			**5,4**

Tabulka 16 ukazuje sestavení takového portfolia, má-li investor k dispozici opět 10 milionů Kč.

Tabulka 16: Sestavení portfolia s minimálním rizikem za 5 milionů Kč, sell short zakázán

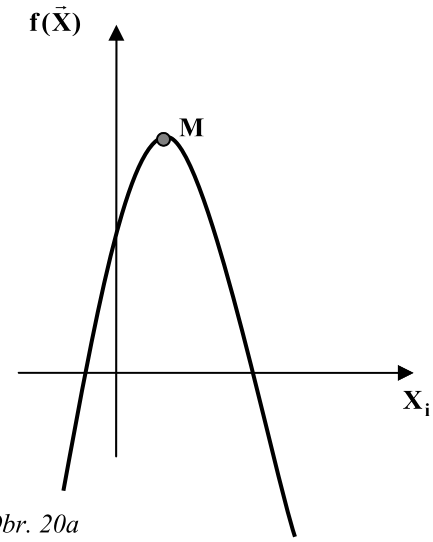
	r_i	σ_i	podíl (%)	cena CP (Kč)	počet (ks)	částka (Kč)
CP_1	18,5	18,6	0,0	869,20	0	0,00
CP_2	8,7	6,1	78,9	1 500,00	2 630	3 945 000
CP_3	15,3	22,1	4,3	2 025,00	106	215 000
CP_4	32,5	42,5	1,4	3 839,00	18	70 000
CP_5	30,0	41,9	3,9	7 875,00	24	195 000
CP_6	23,1	37,4	0,0	882,00	0	0,00
CP_7	19,4	34,2	0,0	204,70	0	0,00
CP_8	11,5	26,4	3,8	127,74	1 487	190 000
CP_9	14,5	25,2	5,3	69,34	3 822	265 000
CP_{10}	8,8	34,8	2,4	14,30	8392	120 000
Portfolio	10,6	5,4	100,0			**5 000 000**

Tentokrát investor provádí operace pouze se sedmi tituly. Při sestavování portfolia nakoupí cenné papíry **CP_2, CP_3, CP_4, CP_5, CP_8, CP_9,** a **CP_{10}** v uvedených množstvích za celkovou částku 5 000 000 Kč. V době realizace portfolia veškeré cenné papíry držené v portfoliu prodá a očekává, že za ně utrží 5 530 000 Kč. Tím by investovanou částku zhodnotil o 10,6%, ale vystavuje riziku 5,4% změny tohoto výnosu.
Samozřejmě nejde zde o podrobné vysvětlení kvadratického programování, to ponecháme matematikům, ale pouze ukázat na jeho složitost a výpočetní náročnost. Existují však standardní počítačové sady programů pro řešení kvadratického programování podobně jako pro programování lineární.
Připomeňme si, že efektivní množina je určena minimalizací rizika pro jakoukoliv úroveň výnosu. Pokud specifikujeme výnos na určité úrovni a minimalizujeme riziko, obdržíme jeden bod efektivní množiny.

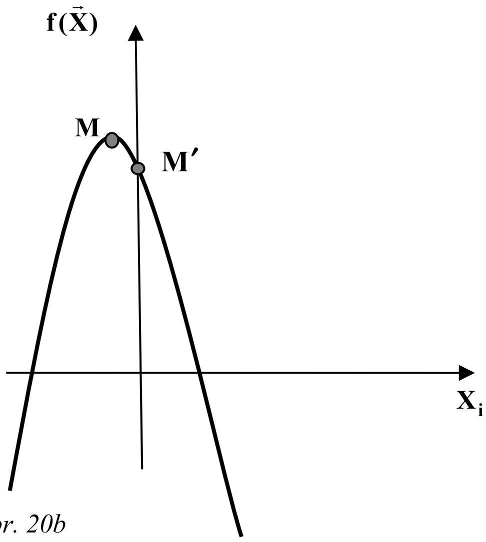
e) Kvadratické programování a Khun – Tuckerovy podmínky

Algoritmy kvadratického programování jsou postaveny na technikách pokročilé matematiky, tak zvané Khun -Tuckerovy podmínky. Pro méně složité problémy mohou být tyto techniky snadno užity. Podstata řešení takovéhoto problému můžeme získat pochopením Khun - Tuckerových podmínek. V předcházejících kapitolách jsme vzali derivaci $\mathbf{f}(\vec{\mathbf{X}})$ pro každé $\mathbf{X_i}$ a položili jí rovnou nule (o) k nalezení maximální hodnoty $\mathbf{f}(\vec{\mathbf{X}})$. Toto maximum označme **M** na obr. 20a nebo 20b. Jestliže $\mathbf{X_i}$ musí být nezáporné, může nastat problém, neboť nevázané maximum může mít hodnoty stejné jako

$\mathbf{X_i}$, což je nepřípustné. $\mathbf{f(\vec{X})}$ jako funkce $\mathbf{X_i}$ může vypadat na obr. 20b spíše než jako na obr. 20a. V tomto případě (obr. 20b) maximální přípustná hodnota $\mathbf{f(\vec{X})}$ nastává v bodě $\mathbf{M'}$ spíše než v bodě $\mathbf{M}$. Pokud maximální hodnota pro $\mathbf{X_i}$ nastává v bodě $\mathbf{M'}$, potom $\frac{\partial \mathbf{f(\vec{X})}}{\partial \mathbf{X_i}} < \mathbf{0}$ v maximální přípustné hodnotě $\mathbf{X_i = 0}$. Pokud to nastane v případě, kdy $\mathbf{X_i}$ je kladné, potom $\frac{\partial \mathbf{f(\vec{X})}}{\partial \mathbf{X_i}} = \mathbf{0}$. Obecně řečeno, je-li $\mathbf{X_i}$ omezeno podmínkou, že musí být větší než nula nebo rovn nule, můžeme zapsat: $\frac{\partial \mathbf{f(\vec{X})}}{\partial \mathbf{X_i}} \le \mathbf{0}$.
Z této nerovnice můžeme udělat rovnost zápisem: $\frac{\partial \mathbf{f(\vec{X})}}{\partial \mathbf{X_i}} + \mathbf{U_i = 0}$ a obdrželi jsme 1. Kun Tuckerovu podmínku.



Obr. 20a



Obr. 20b

Všimněme si dvou zajímavostí. Jestliže optimum nastává pokud je $\mathbf{X_i}$ kladné, pak $\frac{\partial \mathbf{f(\vec{X})}}{\partial \mathbf{X_i}} = \mathbf{0}$ **a** $\mathbf{U_i}$ je nula. Jestliže optimum nastává pokud maximum je v $\mathbf{X_i = 0}$, pak $\frac{\partial \mathbf{f(\vec{X})}}{\partial \mathbf{X_i}} < \mathbf{0}$ a $\mathbf{U_i}$ je kladné. To co jsme zjistili, můžeme zapsat:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{X_i > 0,} & \mathbf{U_i = 0} \\ \mathbf{X_i = 0,} & \mathbf{U_i > 0} \end{array}$$

Toto je druhá Khun -Tuckerova podmínka, kterou můžeme kompaktně zapsat:

$$\begin{array}{r} \mathbf{X_i . U_i = 0} \\ \mathbf{X_i \ge 0} \\ \mathbf{U_i \ge 0} \end{array}$$

Z toho co jsme v předcházející části uvedli můžeme zjednodušeným způsobem uvést Khun - Tuckerovy podmínky:

$$\begin{array}{lr} (1) & \frac{\partial \mathbf{f(\vec{X})}}{\partial \mathbf{X_i}} + \mathbf{U_i = 0} \\ (2) & \mathbf{X_i . U_i = 0} \\ (3) & \mathbf{X_i \ge 0} \\ (4) & \mathbf{U_i \ge 0} \end{array}$$

Pokud by nám někdo navrhoval řešení a vyhovovalo Khun -Tuckerovým podmínkám, můžeme si být jisti, že se jedná vskutku o optimální portfolio*.
Uvažujme tento příklad:

Cenný papír	*Výnosnost* $\bar{r}_i$	*Riziko* σ_i	*Korelace* ρ_{ij}	*Bezrizikové aktivum*
C_1	**0,14**	**0,06**	$\rho_{12} = 0{,}5$	$r_f = 0{,}06$
C_2	**0,08**	**0,03**	$\rho_{13} = 0{,}2$	
C_3	**0,20**	**0,15**	$\rho_{23} = 0{,}4$	

Dále předpokládejme, že řešení bylo:
$$X_1 = \frac{43}{53},\ X_2 = 0,\ X_3 = \frac{10}{53} \qquad (**)$$
$$U_1 = 0,\ U_2 = \frac{5}{8},\ U_3 = 0$$

Z uvedených hodnot je vidět, že toto řešení splňuje Kun – Tuckerovy podmínky, a tudíž je optimální. Z daného řešení vidíme, že splňuje Kun – Tuckerovy podmínky, když uvažujeme naše předpoklady. Všechna **X** a **U** jsou kladná, tudíž podmínky 3) a 4) jsou splněny. $U_1, X_2, \text{a}\ U_3 = 0$, tedy jak **X,** tak i U jsou rovny nule pro jakýkoliv pár cenných papírů a je tedy splněna taktéž podmínka 2). Známe již z předcházejících kapitol vztah:

$$\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial X_i} = -\lambda.\left[X_i.\sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} X_j.\sigma_{ij}\right] + \left(\bar{r}_i - r_f\right) = 0$$

$$8 - \lambda.(36X_1 + 9X_2 + 18X_3) + U_1$$
$$2 - \lambda.(9X_1 + 9X_2 + 18X_3) + U_2$$
$$14 - \lambda.(18X_1 + 18X_2 + 225X_3) + U_3$$

$$\lambda = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p^2} = \frac{53}{216}$$

Dosazením hodnot (**) do této rovnice obdržíme:

$$8 - \frac{53}{216}.(36.\frac{43}{53} + 9.0 + 18.\frac{10}{53}) + 0$$
$$2 - \frac{53}{216}.(9.\frac{43}{53} + 9.0 + 18.\frac{10}{53}) + \frac{5}{8}$$
$$14 - \frac{53}{216}.(18.\frac{43}{53} + 18.0 + 225.\frac{10}{53}) + 0$$

Jelikož jsou všechny tři rovnice rovny nule, Kun – Tuckerovy podmínky jsou splněny.

* Pro funkci $f(\vec{X})$ jsou zde podmínky pro problém portfolia vždy splněny aby nastalo optimum.

6. Model CAPM (capital asset pricing model)

Předpoklady CAPM

Každá teorie či model vychází ze základních předpokladů a definuje základní pojmy. Již v předchozí kapitole investoři dodržovali jisté předpoklady. Nyní tyto podmínky ještě rozšíříme.

1. ***investoři investují v jednom určitém časovém období***
2. ***investoři hodnotí portfolia podle očekávaného výnosu a očekávaného rizika***
3. ***platí předpoklad nenasycenosti investora, tj. ze dvou portfolií se stejným očekávaným rizikem si vybere to s vyšším výnosem***
4. ***investoři mají odpor k riziku, tj. ze dvou portfolií se stejným očekávaným výnosem si vyberou to s nižším rizikem***
5. ***jednotlivá aktiva se dají libovolně dělit, tj. lze koupit i zlomek akcie***
6. ***existuje bezrizikové aktivum se sazbou r_f***
7. ***zanedbáváme daně, poplatky a další transakční náklady***

Toto byly předpoklady, z kterých jsme vycházeli v předešlých kapitolách. Nyní budou rozšířeny o další:

8. ***investoři jsou si rovni v tom smyslu, že:***
   - ***všichni investoři mají stejné jedno období (stejný horizont období)***
   - ***bezriziková sazba je pro všechny investory stejná***
   - ***informace jsou volné a okamžitě dostupné všem investorům stejně***
   - ***investoři mají homogenní očekávání tj. mají stejně odhadnuté očekávané výnosnosti, rizika a kovariance cenných papírů.***

Je evidentní, že tyto předpoklady splňuje pouze modelový trh. Na základě těchto předpokladů můžeme analyzovat chování investorů, ale také ceny jednotlivých cenných papírů. Za předpokladu, že všichni investoři postupují stejným způsobem, můžeme z pozorování chování všech investorů odvodit rovnovážný vztah mezi výnosem a rizikem jednotlivých cenných papírů na trhu.

Relativní tržní hodnota cenného papíru

Buď $\mathbf{c_i}$ tržní cena i-tého cenného papíru, $\mathbf{s_i}$ celkový počet kusů i-tého cenného papíru emitovaných k obchodování na trhu. Agregovaná tržní hodnota cenného papíru **i** $\mathbf{A_i}$ je definována takto:

$$\mathbf{A_i = c_i . s_i}$$

kde:

$\mathbf{A_i}$ - agregovaná tržní hodnota CP

$\mathbf{c_i}$ - tržní cena CP

$\mathbf{s_i}$ - počet kusů i-tého CP

Nechť na námi uvažovaném trhu existuje celkem **N** cenných papírů s agregovanými tržními cenami $\mathbf{A_j}$ pro j = 1, …, N. Pak relativní tržní hodnota i-tého cenného papíru $\mathbf{R_i}$ je definována takto:

$$\mathbf{R_i = \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{N} A_j}}$$

Tedy relativní tržní hodnota je rovna agregované tržní hodnotě cenného papíru dělené sumou agregovaných tržních hodnot všech cenných papírů.

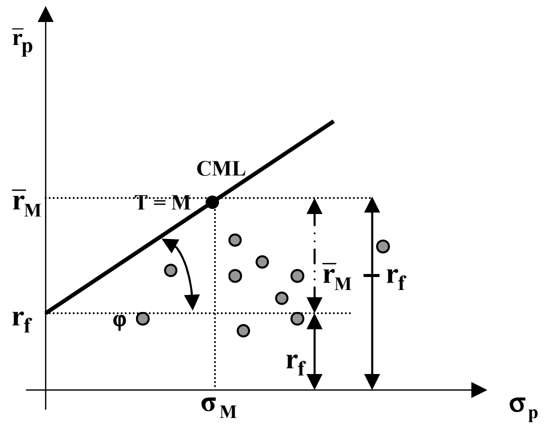
Tržní portfolio T se také označuje písmenem M (z angl. market - trh). V denní praxi je tržní portfolio nahrazováno nejrůznějšími indexy

6.1 *Přímka kapitálového trhu CML*

Protože M bylo tangenciální portfolio, je efektivní množina tvořena polopřímkou vycházející z bodu $[0, r_f]$ a procházející bodem $M[\sigma_M, r_M]$. Tato přímka se označuje CML (capital market line) - ***přímka kapitálového trhu***. Neefektivní portfolia leží pod přímkou CML. Směrnice této přímky se rovná rozdílu mezi očekávanou výnosností tržního portfolia a očekávanou výnosností bezrizikového aktiva $\bar{r}_M - r_f$ dělenému rozdílem jejich rizik $\sigma_M - \sigma_f = \sigma_M - 0 = \sigma_M$, neboť $\sigma_f = 0$ (proto bezrizikové aktivum). Potom přímka, která charakterizuje přímku kapitálového trhu **CML** bude mít tvar:

$$\bar{r}_p = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}.\sigma_p$$

Přímka kapitálového trhu CML



Obr. 16

M - tržní portfolio
$\bar{r}_M$ - očekávaná výnosnost tržního portfolia
r_f - očekávaná výnosnost bezrizikového aktiva
- další portfolia rizikové cenné papíry

Rovnováha v CAPM

Protože je CAPM rovnovážným modelem, musí v případě, že všichni investoři investují do **T** a jeho kombinací s bezrizikovým aktivem na trhu existovat rovnováha. To ovšem znamená, že **T** obsahuje nenulový podíl všech cenných papírů na daném trhu.

6.2 *Tržní portfolio*

Když se na základě výše popsaného mechanismu trh dostane do rovnováhy, bude to znamenat, že každý investor chce vlastnit určitý podíl na každém rizikovém cenném papíru. Tržní ceny cenných papírů odpovídají vyrovnání nabídky a poptávky po stejném počtu kusů, riziková sazba odpovídá vyrovnání množství peněz půjčených a vypůjčených. Výsledné portfolio T se nazývá tržní portfolio a je tvořeno investicemi do všech cenných papírů v takovém poměru, že proporce investovaná do jednotlivého cenného papíru odpovídá jeho relativní tržní hodnotě.

Riziko změny výnosnosti tržního portfolia

Nyní si uvedeme riziko změny výnosnosti tržního portfolia, abychom pochopili jeho význam v modelu CAPM.Budeme vycházet ze známého výrazu pro výpočet rizika (směrodatné odchylky) pro portfolio.

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij} \right]^{1/2}$$

X_i, X_j - proporce investované do cenných papírů **i**, **j**

σ_{ij} - kovariance výnosnosti mezi cennými papíry **i**, **j**

Ze známého výrazu budeme řešit kovariance jednotlivých cenných papírů k tržnímu portfoliu.

$$\sigma_M = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{iM} \cdot X_{jM} \cdot \sigma_{ij} \right]^{1/2}$$

Kde X_{iM} a X_{jM} jsou proporce (váhy) investované do cenných papírů **i** a **j** v tržním portfoliu.
Jestliže kovarianci cenného papíru **i** s tržním portfoliem **M** vyjádříme jako:

$$\sigma_M = \left[X_{1M} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_{jM} \cdot \sigma_{1j} + X_{2M} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_{jM} \cdot \sigma_{2j} + X_{3M} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_{jM} \cdot \sigma_{3j} + \cdots + X_{nM} \cdot \sum_{j=1}^{n} X_{jM} \cdot \sigma_{nj} \right]^{1/2}$$

Kovariance **i-tého** cenného papíru s tržním portfoliem **M** pak bude: $\sigma_{iM} = \sum_{i=1}^{n} X_{iM} \cdot \sigma_{ij}$,

$$\sigma_{iM} = X_{1M} \cdot \sigma_{1j} + X_{2M} \cdot \sigma_{2j} + X_{3M} \cdot \sigma_{3j} + \cdots + X_{nM} \cdot \sigma_{nj}$$

a potom předcházející výraz můžeme zapsat:

$$\sigma_M = \left[X_{1M} \cdot \sigma_{1M} + X_{2M} \cdot \sigma_{2M} + X_{3M} \cdot \sigma_{3M} + \ldots + X_{nM} \cdot \sigma_{nM} \right]^{1/2}$$

kde σ_{iM} označuje kovarianci cenného papíru **i** s tržním portfoliem.

Směrodatná odchylka tržního portfolia je rovna odmocnině z váženého průměru očekávaných hodnot kovariancí všech cenných papírů v tržním portfoliu, kde σ_{1M} vyjadřuje kovarianci cenného papíru **1** s tržním portfoliem, σ_{2M} vyjadřuje kovarianci cenného papíru **2** s tržním portfoliem atd. Jako váhy bereme proporce odpovídajících cenných papírů v tržním portfoliu. Tržní portfolio se skládá nejen z kmenových akcií, ale také s obligací, preferenčních akcií a realit. Výnosnost a riziko takovéhoto portfolia však nebývá nikde zveřejňována, ale máme k dispozici indexy, které měří kvalitu umístněných akcií v něm. Například index PX, atd. V tomto indexu je každá akcie vážená svou relativní tržní hodnotou nabízených akcií a taktéž obsahuje i základní akcie s velkou tržní hodnotou, a tudíž může tento index reprezentovat kvalitu segmentu akcií tržního portfolia velmi dobře. Investor nemusí brát v úvahu tento index a může si vytvořit svoje vlastní tržní portfolio s nejvíce obchodovanými cennými papíry na burze. Můžeme si všimnout toho, že každý investor vlastní tržní portfolio a zajímá se o jeho směrodatnou odchylku, neboť ta ovlivní velikost jeho investice do tržního portfolia. Z rovnice (7.4) můžeme vidět, že příspěvek každého cenného papíru ke směrodatné odchylce tržního portfolia, závisí na jeho kovarianci s tržním portfoliem. Proto si každý investor povšimne, že *podstatnou mírou rizika cenného papíru je jeho kovariance s tržním portfoliem,* σ_{iM} . Z toho vyplývá, že cenné papíry s většími hodnotami σ_{iM} by měly poskytovat větší očekávanou výnosnost, aby tyto cenné papíry investoři nakupovali. Kdyby však tyto cenné papíry vyšší výnosnost neposkytovaly a přispívaly by pouze k vyššímu riziku tržního portfolia, potom by to vedlo k vyloučení těchto cenných papíru z tržního portfolia, čímž by nastalo zvýšení očekávané výnosnosti tohoto portfolia vzhledem ke směrodatné odchylce. Protože investoři by pohlíželi na takovouto změnu jako na přínos, nebylo by již tržní portfolio optimálním rizikovým portfoliem. Ceny cenných papírů by již nebyly v rovnováze.

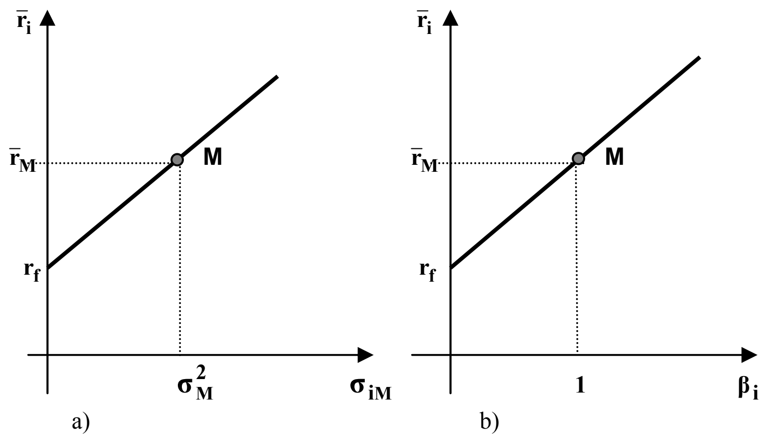
6.3 Separační teorém

Vzhledem k homogenním očekáváním dostanou všichni investoři stejné tangenciální portfolio **T**. Protože jsou všichni na stejném trhu, je efektivní množina pro všechny stejná a stejně tak i bezriziková sazba. Protože si dále investoři volí různé kombinace **T** a bezrizikového aktiva, je evidentní, že všichni využijí stejné tangenciální portfolio **T**.

Toto shrnuje separační teorém:
Optimální kombinace rizikových cenných papírů může být stanovena bez znalosti investorových postojů k riziku a výnosnosti.

Důkaz:
Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje cenný papír, který **T** neobsahuje. Je to jedině z toho důvodu, že tento cenný papír má příliš nízký očekávaný výnos, a to je tehdy, je-li příliš vysoká cena tohoto cenného papíru. Vzhledem k tomu, že ho **T** neobsahuje, nemá tedy nikdo zájem ho koupit, to znamená, že jeho cena klesá, ovšem s klesající cenou roste jeho výnosnost. Až bude cena dostatečně nízká, budou chtít investoři zařadit tento cenný papír do svého portfolia a tedy do **T**, což je spor s tím, že v **T** není.Další vyrovnávání cen může nastat ve chvíli, kdy investoři žádají některý cenný papír ve větším množství, než se nabízí. Zvýšení poptávky při stejném množství daného cenného papíru přinese zvýšení jeho ceny, a to pak snížení jeho výnosu na hranice, kdy investor bude žádat (chtít) odpovídající podíl tohoto aktiva. Tímto způsobem popisuje model CAPM tvorbu cen aktiv.
Přesný vztah rovnovážného vztahu mezi rizikem a výnosností můžeme zapsat ve tvaru:

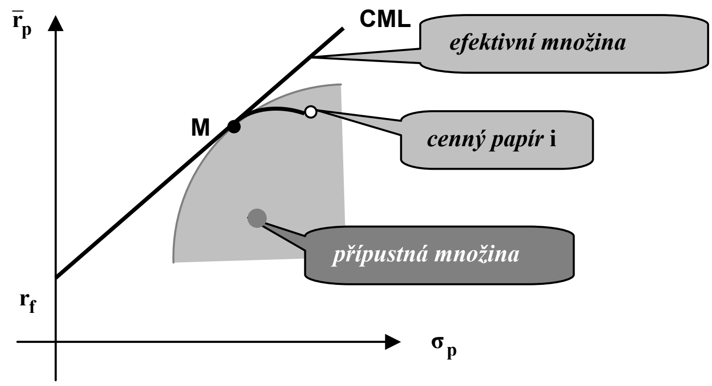
$$\mathbf{r_i = r_f + \frac{(r_M - r_f)}{\sigma_M^2}\sigma_{iM}} \qquad (7.5$$



Obr. 17

Jestliže zavedeme substituci $\boldsymbol{\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}}$ potom na obr. 17a) je znázorněná kovarianční verze přímky SML a na obr. 17b) její beta verze. Jak vidíme na obr. 17a) rovnice (7.5), představuje přímku s úsekem $\mathbf{r_f}$ na ose $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$ se směrnicí $\mathbf{\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M^2}}$. Jelikož je směrnice kladná, je vidět, že cenné papíry s vyššími kovariancí $\boldsymbol{\sigma_{iM}}$ budou mít vyšší očekávanou výnosnost $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$. Tento vztah mezi kovariancí a očekávanou výnosností je známý jako ***přímka trhu cenných papírů*** (*security market line-SML ,přímka trhu*). Z dané rovnice vidíme, že rizikový cenný papír se $\boldsymbol{\sigma_{iM} = 0}$ bude mít očekávanou výnosnost rovnou sazbě bezrizikového cenného papíru $\mathbf{r_f}$. Dále vidíme, že rizikový cenný papír (stejně jako bezrizikový) nezvyšuje riziko tržního portfolia.

63.1 Odvození přímky trhu SML pomocí přímky CML



Obr. 18

Z obr. 18 je vidět umístění přípustné množiny společně s bezrizikovou sazbou a efektivní množinou tvořenou přímkou CML, udávající přímku kapitálového trhu. Uvnitř přípustné množiny leží všechny rizikové cenné papíry. Vyberme jeden z těchto cenných papírů a označme jej indexem **i**. Nyní uvažujme libovolné portfolio **p**, které se skládá s proporce $\mathbf{X_i}$ investované do cenného papíru **i** a proporce $\mathbf{(1-X_i)}$ do tržního portfolia. Takovéto portfolio bude mít výnosnost:

$$\bar{r}_p = X_i.\bar{r}_i + (1-X_i).\bar{r}_M \qquad (6.6)$$

a směrodatnou odchylku (riziko změny výnosnosti portfolia):

$$\sigma_p = \left[X_i^2\sigma_i^2 + (1-X_i)^2.\sigma_M^2 + 2.X_i.(1-X_i)\sigma_{iM}\right]^{1/2} \quad (6.7) \quad {}^{1)}$$

Všechna tato portfolia budou ležet na křivce spojující bod **i** a **M** (obr. 18). Nás bude zajímat směrnice této křivky. Podle poznámky, vidíme, že tato křivka je dána parametrickými rovnicemi (6.6) a (6.7). Nejdříve derivujeme rovnici (6.6) $\bar{r}_p$ podle $\mathbf{X_i}$

$$\frac{d\bar{r}_p}{dX_i} = \bar{r}_i - \bar{r}_M$$

a rovnici (6.7) derivujeme též vzhledem k $\mathbf{X_i}$.

$$\frac{d\sigma_p}{dX_i} = \frac{2.Xi.\sigma_i^2 + 2.(1-X_i.(-\sigma_M^2) + 2.\sigma_{iM} - 4.X_i.\sigma_{iM}}{2.\left[X_i^2.\sigma_i^2 + (1-X_i)^2.\sigma_M^2 + 2.X_i.(1-X_i).\sigma_{iM}\right]^{1/2}}$$

Potom směrnice tečny křivky **iM** bude:

$$\frac{d\bar{r}_p}{d\sigma_p} = \frac{\dfrac{d\bar{r}_p}{dX_i}}{\dfrac{d\sigma_p}{dX_i}} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_M}{\dfrac{2.X_i.\sigma_i^2 + 2.(1-X_i).(-\sigma_M^2) + 2.\sigma_{iM} - 4.X_i.\sigma_{iM}}{2.\left[X_i^2.\sigma_i^2 + (1-X_i)^2.\sigma_M^2 + 2.X_i.(1-X_i).\sigma_{iM}\right]^{1/2}}} =$$

$$= \frac{\left[X_i^2.\sigma_i^2 + (1-X_i)^2.\sigma_M^2 + 2.X_i.(1-X_i).\sigma_{iM}\right]^{1/2}.(\bar{r}_i - \bar{r}_M)}{X_i.\sigma_i^2 + (1-X_i).(-\sigma_M^2) + \sigma_{iM} - 2.X_i.\sigma_{iM}}$$

Nás hlavně zajímá směrnice tečny této křivky právě v bodu **M**. Protože proporce cenného papíru **i** je v tomto bodu ***nulová*** (to znamená, že $\mathbf{X_i = 0}$) můžeme vypočítat směrnici této tečny.

---

1) *Vzpomeňme si na funkci zadanou parametrickými rovnicemi x = φ(t), y = ψ(t). Potom derivace funkce bude: dx/dt=φ′(t), dy/dt=ψ′(t) a dy/dx=ψ′(t)/φ′(t).*

$$\frac{d\bar{r}_p}{d\sigma_p} = \frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_M).\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}$$

Dále z obr. 17 vidíme, že směrnice tečny křivky **iM** v bodu **M** se bude rovnat směrnici přímky **CML** $\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}$. Mezi těmito směrnicemi musí platit rovnost:

$$\frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_M).\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \qquad (6.8)$$

Řešením této rovnice vzhledem k výnosnosti cenného papíru **i** obdržíme, přímku **SML** (kovarianční verze přímky SML).

$$r_i = r_f + \frac{(r_M - r_f).}{\sigma_M^2}.\sigma_{iM} \qquad (6.9)$$

Jestliže zavedeme substituci: $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$, lze SML vyjádřit v beta verzi jako

$$r_i = r_f + (r_M - r_f).\beta_i \qquad (6.10)$$

6.3.2 Míra rizika cenného papíru

Koeficient β považujeme za míru rizika cenného papíru. Protože β portfolia je váženým průměrem β jednotlivých cenných papírů tvořících dané portfolio s váhami $X_i,..., X_N$ podle proporcí investovaných do jednotlivých cenných papírů, je

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} X_i\beta_i = X_1.\beta_1 + X_2.\beta_2 + \cdots + X_n.\beta_n$$

Na SML budou ležet všechny cenné papíry a všechna portfolia z nich vytvořená. Na SML tedy leží i neefektivní portfolia. Pro bezrizikové aktivum platí $\beta_f = 0$. Pro tržní portfolio platí $\beta_M = 1$.

Pro cenný papír **i** jsme tak ukázali, že jeho riziko nemusíme měřit pomocí jeho směrodatné odchylky, ale spočítali jsme ho na základě jeho kovariancí s tržním portfoliem. SML tedy ukazuje lineární závislost mezi mírou rizika (vyjádřenou kovariancí s tržním portfoliem) a očekávanou mírou zisku uvažovaného portfolia nebo cenného papíru. Proto se koeficient β používá často jako měřítko rizika cenných papírů. Odpovídá to již výše uvedenému tvrzení, že rizikovější papíry (s vyšší hodnotou), které přispívají více do celkového rizika tržního portfolia, musí být oceněny vyšší mírou očekávaného zisku. I když můžeme říci, že koeficient β není teoreticky ohraničený můžeme o něm předpokládat:

a) Je-li $\beta_i > 1$, jsou cenné papíry klasifikovány jako agresivní, výnos roste rychleji než trh (burzovní index např. PX, atd.)

b) Je-li $\beta_i < 1$, jsou cenné papíry klasifikovány jako defenzivní, výnosy kolísají méně než trh

c) Je-li $\beta_i = 1$, jsou cenné papíry neutrální a výnosy kolísají spolu s trhem

Hodnoty β pod 0,5 a nad 2 jsou považovány za neobvyklé a dlouhodobě neudržitelné. Tržní portfolio vhodně aproximujeme indexy.

6.3.3 Procesy generující výnosnost

Podle CAPM se budou aktiva nastavovat tak dlouho, dokud nebude dosaženo rovnováhy, při které bude ležet každý CP na SML. Při rovnováze bude očekávaná (rovnovážná) výnosnost CP **i** v době držení dána rovnicí:

$$\bar{r}_i^e = r_f + (\bar{r}_M - r_f).\beta_i \qquad (6.11)$$

$\bar{r}_i^e$ - rovnovážná očekávaná výnosnost CP

Tato rovnice však není modelem toho, jaká bude skutečná nadměrná výnosnost CP za dobu držení. Charakteristická přímka je typem procesu, který garantuje skutečnou výnosnost CP a je založen na předcházející rovnici:

$$r_i - r_f = (r_M - r_f).\beta_i + \varepsilon_i \qquad (6.12)$$

r_i	- skutečná výnosnost CP
r_M	- skutečná výnosnost tržního portfolia
ε_i	- náhodná chyba CP

Abychom mohli nalézt neznámé parametry α_i a β_i, učiníme některé předpoklady o náhodné chybě:

1. $E(\varepsilon_i) = 0$ pro i = 1, 2, …, n
2. $cov(\varepsilon_i, r_i) = 0$ pro i = 1, 2, …, n
3. $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pro $i \neq j$, kde i = 1, 2, …, n a j = 1, 2, …, n
4. $E[\varepsilon_i.(r_M - \bar{r}_M)] = 0$ pro i = 1, 2, …, n
5. $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \sigma^2_{\varepsilon i}$

Náhodná chyba CP je náhodná veličina s nulovou očekávanou hodnotou (střední hodnotou) a směrodatnou odchylkou σ_{ε_i}

Poznámka:

Mějme ruletu, která má na obvodu rovnoměrně rozložené hodnoty od -5 do 5. To znamená, že máme 11 možných výsledků a každý z nich má stejnou pravděpodobnost výskytu. Při daném rozsahu čísel to znamená, že střední hodnota náhodné chyby se rovná nule, neboť:

$$-5.\frac{1}{11} - 4.\frac{1}{11} - 3.\frac{1}{11} - 2.\frac{1}{11} - 1.\frac{1}{11} + 0.\frac{1}{11} + 1.\frac{1}{11} + 2.\frac{1}{11} + 3.\frac{1}{11} 4.\frac{1}{11} + 5.\frac{1}{11} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i . p(x_i) = 0$$

Předpokládejme, že očekávaný výnos i-tého aktiva je možné určit následující rovnicí

$r_i = r_f + (r_M - r_f).\beta_i$ přímka trhu cenných papírů

Kde $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma^2_M} \in R$ koeficient β **i**-tého aktiva

Tato rovnice nemusí naprosto přesně vystihnout situaci na trhu s **i**-tým aktivem, může dojít k drobným nepřesnostem působením různých faktorů, které nejsou zahrnuty do naší rovnice. Proto bývá do této rovnice zahrnut i vliv těchto blíže nespecifikovaných faktorů ve formě náhodné chyby ε_i

$r_i = \alpha_i + r_M . \beta_i + \varepsilon_i$, kde můžeme, pokud bude použita bezriziková investice zavést substituci

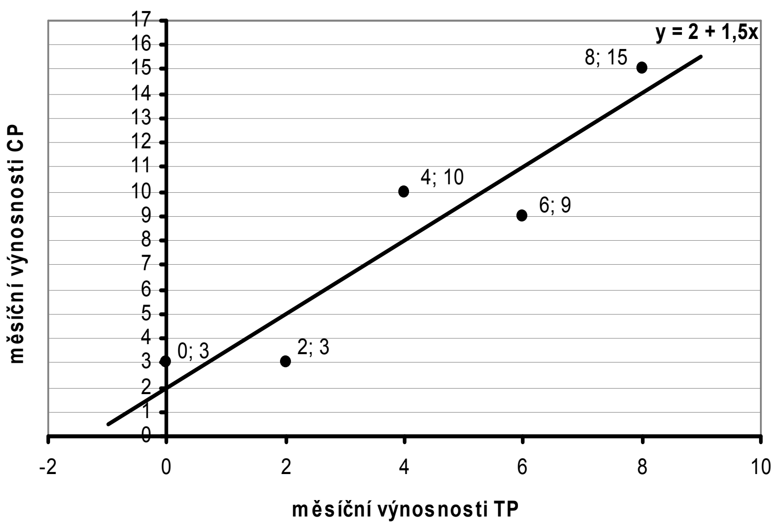
$$\alpha_i = r_f.(1 - \beta_i)$$

Můžeme si položit otázku, odkud se vzala tato náhodná chyba ε_i. Dříve jsme si vysvětlili, že střední hodnota této náhodné chyby bude rovna nule. Nyní si ukážeme na příkladu kde tato náhodná chyba vzniká. Model CAPM nám představuje rovnovážný stav, který můžeme zapsat: $\mathbf{r_i = \alpha_i + r_M . \beta_i + \varepsilon_i}$

Tabulka Hypotetická tabulka výnosnosti cenného papíru a tržního portfolia (indexu)

	1	2	3 4 5 6
Měsíc	***Výnosnost CP v %***	***Výnosnost TP v %***	$r_i = \alpha_i + \beta_i . r_M + \varepsilon_i$
1.	10	4	10 = 2 + 4.1,5 + **2**
2.	3	2	3 = 2 + 2.1,5 **- 2**
3.	15	8	15 = 2 + 8.1,5 + **1**
4.	9	6	9 = 2 + 6.1,5 **- 2**
5.	3	0	3 = 2 + 0.1,5 +**1**
Součet	**40**	**20**	**40 10 30 0**

Aby nastala rovnováha, to znamená rovnost vztahu (ekvivalence), pak ε_i má takovou hodnotu, aby tato ekvivalence nastala (aby nastal rovnovážný stav). V tabulce jsou výnosy, které může investor zaznamenat během prvních pěti měsíců. Zvolili jsme $\beta_i = 1{,}5$. Z tabulky je vidět, že očekávaný výnos za těchto pět měsíců bude: $\bar{r}_i = \frac{40}{5} = 8$ a $\bar{r}_M = \frac{20}{5} = 4$. Potom $\bar{r}_i = \alpha_i + \bar{r}_M . \beta_i$ = **2 + 4.1,5 = 8** (v našem grafu $\mathbf{y} = \bar{r}_i$ a $\mathbf{x} = \bar{r}_M$)



Obr. 19

Jestliže r_{i_t} a r_{M_t} pochází z dvourozměrného normálního rozložení budou nezaujaté a nejefektivnější odhady α_i a β_i ty, které pochází z regrese r_{i_t} ve vztahu k r_{M_t}. Jak je vidět předcházející úlohu jsme vyjádřili grafem pomocí regresní funkce, na kterém vidíme, kde leží v jednotlivých měsících výnosnosti cenného papíru i velikost náhodné chyby tohoto aktiva. Pokud chceme získat odhad hodnoty koeficientu beta potom lze využít historických (minulých) výnosů a vztahu:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left[\left(r_{i_t} - \bar{r}_{i_t}\right).\left(r_{M_t} - \bar{r}_{M_t}\right)\right]}{\sum_{i=1}^{T}\left(r_{M_t} - \bar{r}_{M_t}\right)^2}$$ historické beta (také ex post beta)

Dále pak pro výpočet alfa vztahu: $\alpha_i = \bar{r}_{i_t} - \beta_i . \bar{r}_{M_t}$

Odhadnutá hodnota β_i by měla ležet v intervalu:

$$\beta_i^0 \in \left(\beta_i - \beta_i^n ; \beta_i + \beta_i^n\right)$$ správně odhadnuté β_i^0

Stejně α_i by měla ležet v intervalu

$$\alpha_i \in \left(\alpha_i - \alpha_i^n ; \alpha_i + \alpha_i^n\right)$$

Normální chyba beta (rozsah chyby beta): $\beta_i^n = \dfrac{\sigma_{\varepsilon i}}{\sigma_M}$

Uvedené parametry α_i a β_i můžeme též získat ("odhadnout") z historického přístupu k jejich určení:

$$\bar{r}_i = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i . \bar{r}_M$$

$\bar{r}_M$ - očekávaná hodnota výnosu tržního portfolia

$\bar{r}_i$ - očekávaná hodnota výnosu **CP**$_i$

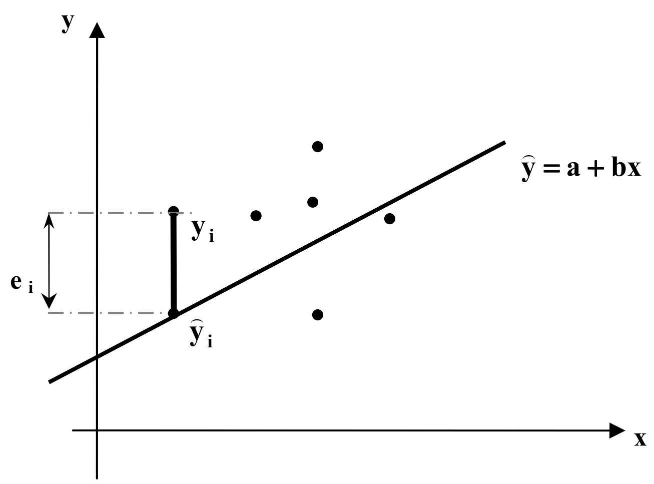
$$\hat{\alpha}_i = \bar{r}_i - \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} . \bar{r}_M \;; \quad \hat{\beta}_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} ; \quad \sigma_{iM} = \hat{\beta}_i . \sigma_M^2$$

Poznámka: Měli bychom zkoumat nestrannost odhadů $\hat{\alpha}_i$ a $\hat{\beta}_i$, zda tyto odhady jsou "nejlepší", zda mezi těmito odhady mají nejmenší rozptyl. Nejlepším odhadem je metoda nejmenších čtverců.

Dodatek:

Metoda nejmenších čtverců

Mějme **n** dvojic pozorovaných hodnot (x_i, y_i), kde i = 1, 2, 3, …, n, které tvoří bodový diagram. Množinu těchto bodů nechť popisuje empirická empirická regresní funkce $\hat{y} = f(x, a, b, c)$. Nechť odchylka $e_i = y_i - \hat{y}_i$, kde e_i je reziduum



Obr.20

Statistika $\mathbf{S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2}$ (reziduální součet čtverců odchylek), udává rozptýlení pozorovaných hodnot závisle proměnné **y** kolem empirické regresní funkce. Metoda nejmenších čtverců je založena na minimalizaci součtu čtverců reziduálních odchylek. Hledáme tedy minimum této funkce.

$$\mathbf{S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - a - b.x)^2 \;\Rightarrow\; minimum}$$

Pomocí parciálních derivací $\mathbf{\frac{\partial S_r}{\partial a}; \frac{\partial S_r}{\partial b}}$ obdržíme soustavu dvou rovnic o neznámých **a** a **b**

Regresní funkce, určená metodou nejmenších čtverců má tyto vlastnosti:

a) $\mathbf{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i) = 0}$

b) Regresní funkce vždy prochází bodem $\mathbf{M(\bar{x}, \bar{y})}$ a body odpovídají středním hodnotám.

c) Odhad regresní funkce metodou nejmenších čtverců je nejlepším odhadem

$$\mathbf{\frac{\partial S_r}{\partial a} = 2.\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b.x_i).(-1) = 0}$$

$$\mathbf{\frac{\partial S_r}{\partial b} = 2.\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b.x_i).(-x_i) = 0}$$

Soustavu upravíme na tvar:

$$\mathbf{n.a + b.\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i}$$

$$\mathbf{a.\sum_{i=1}^{n} x_i + b.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i}$$

$$\mathbf{D_s = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = n.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$\mathbf{D_b = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i \end{vmatrix} = n.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i.\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

$$\mathbf{D_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_i.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i}$$

$$D_b = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \end{vmatrix} = n.\sum_{i=1}^{n} x_i . y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i . \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$b = \frac{n.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i.\sum_{i=1}^{n} y_i}{n.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \left| \begin{array}{l} \text{čitatele i jmenovatele} \\ \text{dělíme } \mathbf{n^2} \end{array} \right| = \frac{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i - \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} x_i.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} =$$

$$= \frac{\overline{x.y} - \overline{x}.\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = \frac{\text{kovariance}\,(x, y)}{\text{rozptyl}\,(x)} = \frac{\text{cov ar}\,(x, y)}{s_x^2}$$

Víme, že $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$, kde σ_{iM} je kovariance výnosností cenného papíru s výnosností tržního portfolia dělená rozptylem výnosností tržního portfolia σ_M^2.

Hodnotu neznámého parametru **a** můžeme vypočítat z první rovnice $n.a + b.\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$

$$a = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{b}{n}.\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{y} - b.\overline{x}$$

Potom: $\hat{y} = \overline{y} - b.\overline{x} + b.x \Rightarrow \hat{y} - \overline{y} = b.(x - \overline{x})$ regresní přímka prochází bodem $M(\overline{x}, \overline{y})$, který odpovídá středním hodnotám **x** a **y**.

6.4 Rozptyl výnosnosti cenného papíru

$$\mathrm{var}(r_i - r_f) = \mathrm{var}(r_i) - \mathrm{var}(r_f) = \sigma_i^2 - 0 = \sigma_i^2$$
$$\mathrm{var}[(r_M - r_f).\beta_i + \varepsilon_i] = \mathrm{var}(r_M.\beta_i) - \mathrm{var}(r_f.\beta_i) + \mathrm{var}(\varepsilon_i) =$$
$$= \beta_i^2.\sigma_M^2 - \underbrace{\beta_i^2.\sigma_f^2}_{0} + \sigma_{\varepsilon_i}^2 = \beta_i^2.\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

Víme, že:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2.\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \Rightarrow \sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma_i^2 - \beta_i^2.\sigma_M^2 \Rightarrow \sigma_{\varepsilon_i} = \sqrt{\sigma_i^2 - \beta_i^2.\sigma_M^2}$$

Rozptyl cenného papíru si můžeme odvodit též z rovnice $r_i = \alpha_i + r_M.\beta_i + \varepsilon_i$ a dospějeme k stejnému závěru.

$$\sigma_i^2 = E(r_i - \overline{r}_i) = E[(\alpha_i + \beta_i.r_M + \varepsilon_i) - (\alpha_i + \beta_i.\overline{r}_M)]^2 = E[\beta_i.(r_M - \overline{r}_M) + \varepsilon_i]^2 =$$
$$= \beta_i^2.E(r_M - \overline{r}_M)^2 + 2.\beta_i.[\varepsilon_i.(r_M - \overline{r}_M)] + E(\varepsilon_i)^2 = \beta_i^2.\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2,$$

Neboť $E[\varepsilon_i.(r_M \overline{r}_M)] = 0$

$\beta_i^2.\sigma_M^2$ - ***tržní riziko (systematické riziko)***

Tržní riziko odráží systematickou míru rozptylu (variability) výnosů a je způsobeno faktory, které ovlivňují ceny všech cenných papírů obchodovaných na burze.

Zdrojem těchto faktorů jsou:

- *makroekonomické změny $\Rightarrow$ růst nebo pokles HDP, inflace*
- *politické změny $\Rightarrow$ válka, revoluce*
- *sociální změny $\Rightarrow$ stávky, sociální nepokoje, nezaměstnanost*

Systematické riziko je ***nediverzifikovatelné.***

$\sigma^2_{\varepsilon_i}$ ***- jedinečné riziko (netržní, nesystematické riziko)***

Jde o část rizika, která je jedinečná pro daný podnik, obor atd.
Jedinečné riziko můžeme ***diverzifikovat.***

Zdrojem těchto faktorů jsou:

- *špatná činnost managementu*
- *nové technologie*
- *restrukturalizace podniku*

Podíl systematického rizika na celkovém riziku CP určuje ***koeficient determinace.***

Odvození koeficientu determinace:

Víme, že: $\rho_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_i . \sigma_M} = \frac{\beta_i . \sigma^2_M}{\sigma_i . \sigma_M} = \beta_i . \frac{\sigma_M}{\sigma_i}$, neboť $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma^2_M} \Rightarrow \sigma_{iM} = \beta_i . \sigma^2_M$

Koeficient determinace je pak druhá mocnina odvozeného vztahu, tedy: $\beta^2_i . \frac{\sigma^2_M}{\sigma^2_i}$

Koeficient determinace vyjadřuje schopnost tržního modelu vysvětlit pohyby (kolísání ve vztahu výnosu na jednotlivý cenný papír a změn ve výnosu trhu) ve výnosech jednotlivých akcií na trhu.

Jedinečné riziko s beta nesouvisí a tudíž tato část není odměňována výnosem.

Jedinečné riziko můžeme snížit ***diverzifikací***, tzn. čím více různých typů **CP** v portfoliu, tím více klesá riziko. S rostoucím **n** jedinečné riziko klesá.

Důkaz:

Předpokládejme, že CP mají v portfoliu stejnou váhu (stejnou proporci) $\mathbf{X_i}$, tzn. $\mathbf{X_i = \frac{1}{n}}$.

Potom platí:

$$\sigma^2_{\varepsilon_p} = \sum_{i=1}^{n} X^2_i . \sigma^2_{\varepsilon_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} . \sigma^2_{\varepsilon_i} = \frac{1}{n^2}\left(\sigma^2_{\varepsilon_1} + \sigma^2_{\varepsilon_2} + \ldots + \sigma^2_{\varepsilon_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} . \frac{\sigma^2_{\varepsilon_1} + \sigma^2_{\varepsilon_2} + \ldots + \sigma^2_{\varepsilon_n}}{n}$$

Diverzifikace vede k zprůměrování systematického rizika (někteří autoři tento počet cenných papírů, postačující k diverzifikaci portfolia v počtu 7, 15 nebo až 22).

Riziko portfolia

a) výnosnost

Portfolio P je složené z **n** CP s váhami $\mathbf{X_1, X_2, ..., X_n}$. Potom nadměrná výnosnost bude:

$$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} X_i r_i - r_f$$

Také víme, že: $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$ a $r_f = \text{konst.}$

Můžeme tedy danou rovnici psát ve tvaru:

$$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} X_i r_i - \sum_{i=1}^{n} X_i r_f$$

takže: $\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} X_i (\bar{r}_i - r_f)$, dále víme, že: $\bar{r}_i - r_f = (r_M - r_f).\beta_i + \varepsilon_i$,

dosadíme do rovnice:

$$\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} X_i [(r_M - r_f).\beta_i + \varepsilon_i] = (r_M - r_f).\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i \beta_i}_{\beta_p} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i \varepsilon_i}_{\varepsilon_p}$$

β_p - beta portfolia - vážený průměr beta CP

ε_p - vážený průměr náhodných chyb CP

$$\bar{r}_p - r_f = (r_M - r_f).\beta_p + \varepsilon_p \quad \text{nebo} \quad \bar{r}_p = r_f + (r_M - r_f).\beta_p + \varepsilon_p$$

$$\bar{r}_p = r_f + r_M.\beta_p - r_f.\beta_p + \varepsilon_p = r_f(1 - \beta_p) + r_M.\beta_p + \varepsilon_p$$

b) rozptyl (riziko) portfolia

$$\text{var}(r_p - r_f) = \text{var}(r_p) - \underbrace{\text{var}(r_f)}_{0} = \sigma_p^2 - 0 = \sigma_p^2$$

$$\text{var}[(r_M - r_f).\beta_p + \varepsilon_p] = \text{var}(\beta_p.r_M) - \text{var}(\beta_p.r_f) + \text{var}(\varepsilon_p) \Rightarrow$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2.\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_p}^2, \text{ neboť } \sigma_{\varepsilon_p}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.\sigma_{\varepsilon_i}^2$$

$\beta_p^2.\sigma_M^2$ - systematické riziko portfolia

$\sigma_{\varepsilon_p}^2$ - nesystematické riziko portfolia (důkaz)

6.5 Nerovnováha

Mnoho investorů vyhledává CP, které se zdají být nesprávně ohodnoceny, a to:

1. ***CP je podhodnocený (příliš levný), je-li jeho očekávaná výnosnost vyšší než předpokládaná - leží nad SML***

2. ***CP je nadhodnocený (příliš drahý), je-li jeho očekávaná výnosnost nižší než předpokládaná - leží pod SML***

Tržní ceny cenných papírů a jejich očekávané výnosnosti jsou buď ve shodě s danou rovnovážnou teorií nebo nejsou. Jestliže této rovnovážné teorii některé cenné papíry nevyhovují, potom existuje nerovnováha v jejich tržních cenách a očekávaných výnosech.

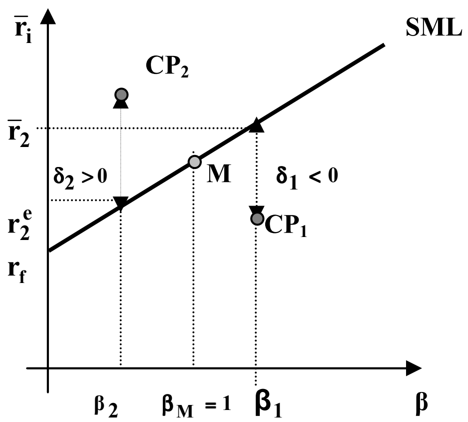
Problém spočívá v tom, že srovnáváme očekávané výnosnosti cenných papírů $\bar{r}_i$ s rovnovážnou očekávanou výnosností $\bar{r}_i^e$. Rovnovážná očekávaná výnosnost cenných papírů je taková, jaká by měla být, kdyby byl cenný papír správně ohodnocen (ležel by na přímce SML).

Alfa cenných papírů je rozdíl mezi očekávanou výnosností a příslušnou rovnovážnou očekávanou výnosností. Tedy: $\delta_i = r_i - \bar{r}_i^e$

Cenný papír bude nesprávně ohodnocen, jestliže $\alpha \neq 0$.

1. ***Je-li $\delta > 0$, leží CP nad SML a je podhodnocený,***
2. ***Je-li $\delta < 0$, leží CP pod SML a je nadhodnocený***,
3. ***Je-li $\delta = 0$, leží CP na přímce SML a je správně ohodnocený***.

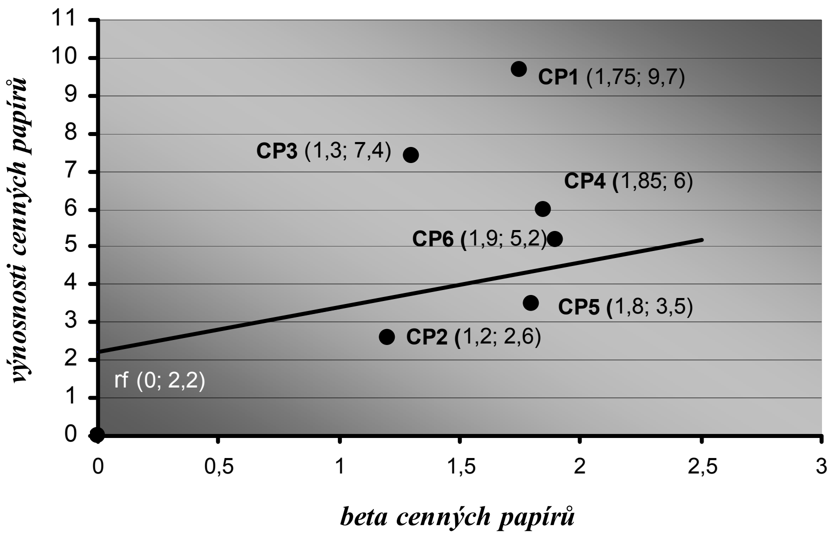
Z toho vyplývá, že je nutno nakupovat cenné papíry, které leží nad přímkou SML a prodávat cenné papíry ležící pod přímkou SML. Cenné papíry ležící na této přímce je nutno držet.



Obr. 21

Z uvedeného grafu vidíme, že cenný papír CP_2 je podhodnocený, neboť $\delta > 0$ a cenný papír CP_1 je nadhodnocený $\delta < 0$. Snažili bychom se prodat ty cenné papíry ležící pod přímkou SML a nakupovat ty, které leží nad touto přímkou.

Cenný papír	β_i	r_i
CP_1	1,75	9,7
CP_2	1,20	2,6
CP_3	1,30	7,4
CP_4	1,85	6,0
CP_5	1,8	3,5
CP_6	1,9	5,2
	$r_f = 2,2$	$r_M = 3,4$



Obr.22

Na obr. 22 vidíme graf výnosnosti cenných papírů v závislosti na jejich koeficientu beta. Dále si můžeme všimnout kde leží jednotlivé cenné papíry a podle toho se rozhodnout, které cenné papíry se budeme snažit prodat, pokud je držíme, a které koupit. Cenné papíry ležící nad přímkou SML jsou podhodnoceny a budeme se snažit je nakoupit do portfolia a ty cenné papíry ležící pod touto přímkou se budeme snažit prodat, neboť jsou nadhodnoceny.

Otázky a problémy k zamyšlení:

Úloha 1

Bety čtyř akcií jsou na dokonalém trhu následující:

$\boldsymbol{\beta_1 = 1{,}235,\ \beta_2 = 0{,}268,\ \beta_3 = 1{,}997,\ \beta_4 = 2{,}45,\ r_f = 2{,}5\%,\ r_M = 3{,}6\%}$

Předpokládejme, že trh je v rovnováze. Vypočítat očekávaný výnos cenných papírů a sestrojit graf.

Úloha 2

Předpokládejme následující míry výnosu:

Rok	r_M	r_i	r_j	β_i	β_j
1	10	9	22		
2	32	24	48		
3	20	14	30		
4	18	-2	-20		
5	17	16	29		
6	3	4	-3		
7	12	8	21		
8	-5	0	-15		
9	18	12	28		
10	21	15	36		

a) Vypočítat β každé akcie
b) Je akcie „**i**“ agresivní, defenzivní nebo neutrální?
c) Je akcie „**j**“ agresivní, defenzivní nebo neutrální?

d) Vypočítat β každé akcie za 10 let

Úloha 3

Předpokládejme, že kapitálový trh je v rovnováze. Bezriziková úroková sazba je
$\mathbf{r_f}$ = 0,04, $\mathbf{r_M}$ = 0,10 a σ_M = 0,09

a) Popište a nakreslete přímku kapitálového trhu (CML)

b) Posuďte tři z různých CP, jejichž výnosy jsou po řadě $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ a mají následující kovariance s výnosem tržního portfolia:

$$\sigma_{r_1,r_M} = 0{,}0108,\quad \sigma_{r_2,r_M} = -0{,}0027,\quad \sigma_{r_3,r_M} = 0{,}0054$$

c) Popsat a zkonstruovat přímku trhu CP. Zaneste je na přímku SML.

Úloha 4

Mějme CP:

Cenný papír	β_i	r_i
CP_1	1,75	16,7
CP_2	1,20	24,0
CP_3	1,30	17,4
CP_4	0,75	16,0
$\mathbf{r_f = 4{,}8}$		$\mathbf{\bar{r}_M = 6{,}4}$

a) Vypočítejte hodnoty δ

b) Nakreslete přímku SML, očekávané výnosnosti CP a rovnovážné očekávané výnosnosti

c) Jaké budou investiční akce do CP

Poznámka: Víme, že $\mathbf{r_i^e = r_f + (r_M - r_f).\beta_i}$ a $\mathbf{\delta_i = r_i - r_i^e}$

1) Je-li $\delta > 0$ leží CP nad SML a je podhodnocený
2) Je-li $\delta < 0$ leží CP pod SML a je nadhodnocený
3) Je-li $\delta = 0$ leží CP na přímce SML – je správně ohodnocený

Nakupovat CP ležící nad přímkou SML a CP ležící pod přímkou SML se zbavujeme (snažíme se je prodat).

Úloha 5

V tabulce jsou uvedeny výnosnosti společnosti S_1 a tržního portfolia za deset let. Máme zakreslit tyto výnosnosti do grafu, kde na vodorovné ose budou výnosnosti tržního portfolia a na svislé společnosti S_1. Vypočítejte α a β

Rok	***Tržní portfolio***	***Společnost S_1***
1	8,0	8,1
2	0,0	3,0
3	14,9	5,3
4	5,0	1,0
5	-4,1	-3,1
6	-8,9	-3,0
7	10,1	5,0
8	5,0	3,2
9	1,5	1,2
10	2,4	1,3

7. Určení optimálního portfolia

7.1 Úvodní poznámky

Určení optimálního portfolia spočívá v tom, nalézt optimální váhy (podíly) cenných papírů v tomto portfoliu. V daném případě záleží na tom najít určitý model, který by určil tento podíl a jednoduchým matematickým aparátem jej snadno zjistil.
Pozorování cen akcií prozrazuje, že výnosnost většiny akcií má tendenci růst, jestliže roste poptávka po tomto cenném papíru a naopak klesat v ceně tehdy, jestliže se poptávka snižuje. T o svědčí o tom, že jedním z důvodů mohou být vzájemné vztahy těchto cenných papírů s výnosem na index akciového trhu (burzovní index). Jak bylo uvedeno dříve výnos akcie můžeme zapsat:

$$\bar{r}_i = a_i + \beta_i . r_M \qquad (7.1)$$

Kde:

a_i - je složka výnosu **i -tého** cenného papíru, který je nezávislý na chování trhu – náhodná proměnná

r_M - je míra výnosu indexu trhu – náhodná proměnná

β_i - je konstanta, která vyjadřuje předpokládanou změnu **i** v závislosti na změně $\bar{r}_M$

Tato rovnice jednoduše rozkládá výnos akcie do dvou součástí, kde jedna je na trhu (poptávce) závislá a druhá nezávislá. Víme též, že koeficient β_i číselně vyjadřuje, jak citlivý je výnos akcie na výnos trhu (burzovní index).

Poznámka: Je-li $\beta_i = 2$ znamená to, že předpokládáme zvýšení (snížení) výnosu akcie o **2%** , pokud poptávka vzroste (klesne) o **1%**. Podobně, je-li $\beta_i = 0,5$ znamená to, že předpokládáme zvýšení (snížení) výnosu akcie o **0, 5%** , pokud poptávka vzroste (klesne) o **1%**.

Označení a_i představuje součást výnosu, která není, jak bylo řečeno, závislá na výnosu trhu. Tuto složku je užitečné rozložit na dvě části. Nechť α_i udává předpokládanou hodnotu a_i a ε_i nechť reprezentuje náhodný (nejistý, náhodná chyba) prvek a_i. Potom: $a_i = \alpha_i + \varepsilon_i$, kde ε_i má předpokládanou střední hodnotu rovnou nule. Potom výnosnost akcie bude:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i . r_M + \varepsilon_i \qquad \forall\, i = 1, 2, \cdots, n \qquad (7.2)$$

- střední hodnota náhodné chyby: $E(\varepsilon_i) = o \quad \forall\, i = 1, 2, \cdots, n$
- střední hodnota součinu: $E[\varepsilon_i .(r_M - \bar{r}_M)] = o \quad \forall\, i = 1, 2, \cdots, n$
- střední hodnota součinu náhodných chyb: $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = o$ kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $i \neq j$
  $j = 1, 2, \ldots, n$
- variance (rozptyl, variabilita) náhodné chyby cenného papíru ε_i: $E(\varepsilon_i)^2 = \sigma^2_{\varepsilon_i}$
- variance (rozptyl, variabilita) cenného papíru: $\sigma_i^2 = \beta_i^2 . \sigma_M^2 + \sigma^2_{\varepsilon_i}$ (7.3)
- kovariance dvou cenných papírů **i**, **j**: $\sigma_{ij} = \beta_i . \beta_j . \sigma_M^2$ (7.4)

Důkazy:

1) očekávaná výnosnost cenného papíru:

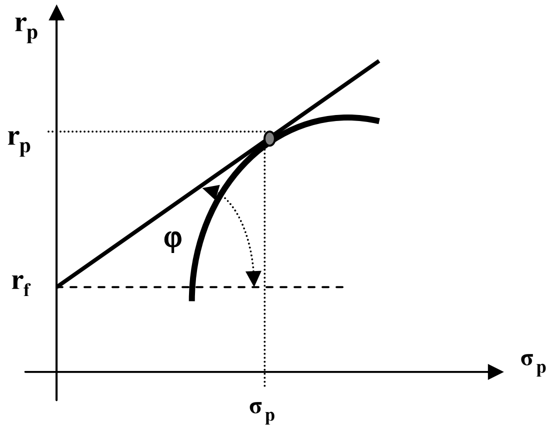
$$E(r_i) = E(\alpha_i + \beta_i . r_M + \varepsilon_i) = E(\alpha_i) + \beta_i . E(r_M) + E(\varepsilon_i) = \alpha_i + \beta_i . \bar{r}_M$$

2) variance (rozptyl, variabilita) cenného papíru:

$$\sigma_i^2 = E[(\alpha_i + \beta_i.r_M + \varepsilon_i) - (\alpha_i + \beta_i.\bar{r}_M)]^2 = E[\alpha_i + \beta_i.r_M + \varepsilon_i - \alpha_i - \beta_i.\bar{r}_M]^2 =$$
$$= \beta_i^2.E(r_M - \bar{r}_M)^2 - 2.\beta_i.E[\varepsilon_i.(r_M - \bar{r}_M)] + E(\varepsilon_i)^2 = \beta_i^2.\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

3) kovariance dvou cenných papírů **i**, **j**:

$$\sigma_{ij} = E\{[(\alpha_i + \beta_i.r_M + \varepsilon_i) - (\alpha_i + \beta_i.\bar{r}_M)].E[(\alpha_j + \beta_j.r_M + \varepsilon_j) - (\alpha_j + \beta_j.\bar{r}_M)]\} =$$
$$= E\{[\beta_i.((r_M - \bar{r}_M) + \varepsilon_i].[\beta_j.((r_M - \bar{r}_M) + \varepsilon_j]\} = \beta_i.\beta_j.E(r_M - \bar{r}_M)^2 + E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = \beta_i.\beta_j.\sigma_M^2$$



Obr. 22

Z předcházejících kapitol víme, že $\bar{r}_p - r_f = \sum_{i=1}^{n} X_i.(\bar{r}_i - r_f)$ a $\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i.X_j.\sigma_{ij}\right]^{1/2}$

Ze středoškolské matematiky pak: $\mathbf{tg}\,\varphi = f(\vec{X}) = \dfrac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i.(\bar{r}_i - r_f)}{\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i.X_j.\sigma_{ij}\right]^{1/2}}$

Bod $\vec{X}$ vyhovuje nutným podmínkám pro extrém funkce $f(\overline{X})$, jestliže současně splňuje:

$\dfrac{\partial f(\vec{X})}{\partial X_i} = 0$, kde **i** = 1, 2, 3, …, n a $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$

V našem případě hledáme opět optimální řešení naší úlohy a to maximalizovat velikost úhlu φ,tedy směrnici přímky $\mathbf{tg}\,\varphi$. V předcházejících kapitolách jsme si odvodili rovnici:

$$-\lambda.\left[X_i.\sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} X_j.\sigma_{ij}\right] + (\bar{r}_i - r_f) = 0$$

$$(\bar{r}_i - r_f) = \lambda.\left[X_i.\sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} X_j.\sigma_{ij}\right] = \lambda.X_i.\sigma_i^2 + \lambda.\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} X_j.\sigma_{ij}$$

Dále víme, že $\mathbf{Z_i = \lambda . X_i}$.
Potom:

$$\bar{r}_i - r_f = Z_i.\sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} Z_j.\sigma_{ij}$$, $\mathbf{i}$ = 1, 2, 3, …, n. Za σ_i^2 a σ_{ij} dosadíme: $\sigma_i^2 = \beta_i^2.\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$ a $\sigma_{ij} = \beta_i.\beta_j.\sigma_M^2$.

$$\bar{r}_i - r_f = Z_i.(\beta_i^2.\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} Z_j.\beta_i.\beta_j.\sigma_M^2 = Z_i.\sigma_{\varepsilon_i}^2 + Z_i.\beta_i^2.\sigma_M^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} Z_j.\beta_i.\beta_j.\sigma_M^2 =$$

$$= Z_i.\sigma_{\varepsilon_i}^2 + \beta_i.\sigma_M^2.\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j \tag{7.5}$$

Budeme-li eliminovat u tohoto součtu $\mathbf{j \neq i}$, můžeme $\mathbf{Z_i.\beta_i.\sigma_M^2}$ do tohoto součtu včlenit a získáme:

$$\bar{r}_i - r_f = Z_i.\sigma_{\varepsilon_i}^2 + \beta_i.\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j.\sigma_M^2 = Z_i.\sigma_{\varepsilon_i}^2 + \beta_i.\sigma_M^2.\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j, \quad \mathbf{i} = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{7.6}$$

Celou rovnici vydělíme výrazem $\sigma_{\varepsilon_i}^2$. Potom:

$$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\sigma_{\varepsilon_i}^2} = Z_i + \frac{\beta_i.\sigma_M^2}{\sigma_{\varepsilon_i}^2}.\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j \;\Rightarrow\; Z_i = \frac{\bar{r}_i - r_f}{\sigma_{\varepsilon_i}^2} - \frac{\beta_i.\sigma_M^2}{\sigma_{\varepsilon_i}^2}.\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j \tag{7.7}$$

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{\varepsilon_i}^2}.\left(\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} - \sigma_M^2.\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j\right). \tag{7.8}$$

Zaveďme nyní substituci $\mathbf{C^* = \sigma_M^2.\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j}$, kde $\mathbf{C^*}$ je konstanta.

Nyní je nutné vypočítat hodnotu součtu $\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j$ z rovnice $Z_i = \frac{\bar{r}_i - r_f}{\sigma_{\varepsilon_i}^2} - \frac{\beta_i.\sigma_M^2}{\sigma_{\varepsilon_i}^2}.\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j$,

Pokud budeme provádět součet pro $\mathbf{j}$ = 1, 2, 3, …, n obdržíme:

$$Z_j = \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2} - \frac{\beta_j.\sigma_M^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}.\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j \,\Bigg|\, .\sum_{j=1}^{n} \beta_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j.\frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2} - \sigma_M^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}.\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j.\frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2} - \sigma_M^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}.\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j + \sigma_M^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}.\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j.\frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j.(1 + \sigma_M^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j.\frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}^2} \quad \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} Z_j.\beta_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}}.\beta_j}{1 + \sigma_M^2.\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}} \qquad (7.9)$$

Z tohoto odvození pak vyplývá: $C^* = \dfrac{\sigma_M^2.\sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}}.\beta_j}{1 + \sigma_M^2.\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}}$ (7.10)

Potom $Z_i = \dfrac{\beta_i}{\sigma_{\varepsilon_i}^2}.\left(\dfrac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} - C^*\right).$ (7.11)

Po výpočtu vah Z_i je nutno vypočítat váhy v portfoliu X_i. Při řešení této úlohy jsme použili substituci: $Z_i = \lambda.X_i \Rightarrow X_i = \dfrac{Z_i}{\lambda}$.. Jestliže sečteme hodnoty vah X_i a Z_i přes všechna **i = 1, 2, 3, …, n,** získáme váhy (podíly) cenných papírů v portfoliu.

$$\lambda.\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Z předcházejícího víme, že $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$ a proto $\sum_{i=1}^{n} Z_i = \lambda$.

uvedené substituce $X_i = \dfrac{Z_i}{\lambda} = \dfrac{Z_i}{\sum_{i=1}^{n} Z_i} \wedge \sum_{i=1}^{n} Z_i \neq 0$ a **i = 1, 2, 3, …, n**

7.2 Výpočet vah v portfoliu – sell short je zakázán (nebo Sales short, prodej nakrátko)

Máme určit váhy (podíly) cenných papírů v portfoliu, kde je zakázán sell short (prodej nakrátko.). K tomu mějme výnosnost bezrizikového aktiva r_f, výnosnosti cenných papírů r_i, jejich koeficienty β_i, rozptyl náhodných chyb $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ a rozptyl výnosnosti burzovního indexu σ_M^2.

Postup výpočtu:

Očekávaná nadměrná výnosnost cenného papíru v poměru k jeho koeficientu **β** bude: $\dfrac{\bar{r}_i - r_f}{\beta}$

Potom podle vztahu $C_i = \dfrac{\sigma_M^2.\sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sigma_{\varepsilon_j}}.\beta_j}{1 + \sigma_M^2.\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{\varepsilon_j}^2}}$ vypočítáme hodnoty C_i pro každý cenný papír.

Z této množiny čísel vybereme ta $\mathbf{C_k < \frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta}} \quad \wedge \ \mathbf{i \in k}$. Nejmenší z těchto čísel si označíme $\mathbf{C^*}$, což bude dané omezení portfolia, u kterého je zakázán sell short.

Toto číslo nám zabezpečuje to, že $\mathbf{Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma^2_{\varepsilon_i}} . \left(\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} - C^* \right)}$ bude kladné a tedy i váhy v portfoliu budou kladné. Z předcházejícího výrazu je jasné, že $\mathbf{C^*}$ musí být menší než podíl $\mathbf{\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}}$, což zabezpečuje, že i $\mathbf{Z_i}$ bude kladné.

Postup: Cenné papíry seřadíme sestupně podle velikosti podílů $\mathbf{\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}}$.

V následujících výpočtech pak určíme hodnoty čísel $\mathbf{C_n}$. Nejdříve vypočítáme $\mathbf{C_1, C_2, \cdots, C_n}$

$$\mathbf{C_1 = \frac{\frac{\sigma^2_M.(\bar{r}_1 - r_f)}{\sigma^2_{\varepsilon_1}}.\beta_1}{1 + \sigma^2_M . \frac{\beta^2_1}{\sigma^2_{\varepsilon_1}}}, \quad C_2 = \frac{\sigma^2_M . \left[\frac{(\bar{r}_1 - r_f).\beta_1}{\sigma^2_{\varepsilon_1}} + \frac{(\bar{r}_2 - r_f).\beta_2}{\sigma^2_{\varepsilon_2}} \right]}{1 + \sigma^2_M . \left(\frac{\beta^2_1}{\sigma^2_{\varepsilon_1}} + \frac{\beta^2_2}{\sigma^2_{\varepsilon_2}} \right)},}$$

$$\mathbf{C_3 = \frac{\sigma^2_M . \left[\frac{(\bar{r}_1 - r_f).\beta_1}{\sigma^2_{\varepsilon_1}} + \frac{(\bar{r}_2 - r_f).\beta_2}{\sigma^2_{\varepsilon_2}} + \frac{(\bar{r}_3 - r_f).\beta_3}{\sigma^2_{\varepsilon_3}} \right]}{1 + \sigma^2_M . \left(\frac{\beta^2_1}{\sigma^2_{\varepsilon_1}} + \frac{\beta^2_2}{\sigma^2_{\varepsilon_2}} + \frac{\beta^2_3}{\sigma^2_{\varepsilon_3}} \right)}, \cdots}$$

$$\mathbf{\cdots, \quad C_n = \frac{\sigma^2_M . \left[\frac{(\bar{r}_1 - r_f).\beta_1}{\sigma^2_{\varepsilon_1}} + \frac{(\bar{r}_2 - r_f).\beta_2}{\sigma^2_{\varepsilon_2}} + \frac{(\bar{r}_3 - r_f).\beta_3}{\sigma^2_{\varepsilon_3}} + \cdots + \frac{(\bar{r}_n - r_f).\beta_n}{\sigma^2_{\varepsilon_n}} \right]}{1 + \sigma^2_M . \left(\frac{\beta^2_1}{\sigma^2_{\varepsilon_1}} + \frac{\beta^2_2}{\sigma^2_{\varepsilon_2}} + \frac{\beta^2_3}{\sigma^2_{\varepsilon_3}} + \cdots + \frac{\beta^2_n}{\sigma^2_{\varepsilon_n}} \right)}}$$

Z těchto čísel vybereme ta, která jsou menší než $\mathbf{\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}}$. Tedy $\mathbf{C_i < \frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}}$. Poslední číslo, které je ještě menší než uvedený podíl, to znamená číslo $\mathbf{C_k = C^*}$ pro **i = 1, 2, 3, …, k**.

Postupně vypočítáme hodnoty proměnných $\mathbf{Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_k}$.

$$\mathbf{Z_1 = \frac{\beta_1}{\sigma^2_{\varepsilon_1}}.\left(\frac{\bar{r}_1 - r_f}{\beta_1} - C^* \right), \ Z_2 = \frac{\beta_2}{\sigma^2_{\varepsilon_2}}.\left(\frac{\bar{r}_2 - r_f}{\beta_2} - C^* \right), \ Z_3 = \frac{\beta_3}{\sigma^2_{\varepsilon_3}}.\left(\frac{\bar{r}_3 - r_f}{\beta_3} - C^* \right), \cdots,}$$

Tedy:

$$\mathbf{Z_k = \frac{\beta_k}{\sigma^2_{\varepsilon_k}}.\left(\frac{\bar{r}_k - r_f}{\beta_k} - C^* \right)}$$

Nyní zbývá vypočítat podíly (váhy) cenných papírů v portfoliu.

K tomu využijeme naší substituce: $\mathbf{X_i} = \dfrac{\mathbf{Z_i}}{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{Z_i}}$,

Tedy: $\mathbf{X_1} = \dfrac{\mathbf{Z_1}}{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{Z_i}},\ \mathbf{X_2} = \dfrac{\mathbf{Z_2}}{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{Z_i}}, \cdots, \mathbf{X_k} = \dfrac{\mathbf{Z_k}}{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{Z_i}}$

Celý postup si vysvětlíme na příkladu.

Máme sestavit portfolio z cenných papírů, kde je zakázán prodej nakrátko (sell short). Předpokládejme, že výnosnost bezrizikového aktiva bude **0,05** a rozptyl tržního portfolia pak $\boldsymbol{\sigma^2_M = 0{,}10}$

Tabulka 1

***Cenný papír* i**	$\bar{r}_i$	$\bar{r}_i - r_f$	β_i	$\sigma^2_{\varepsilon i}$	$\dfrac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$
1	0,15	0,10	1	50	0,10
2	0,17	0,12	1,5	40	0,08
3	0,12	0,07	1	20	0,07
4	0,17	0,12	2	10	0,06
5	0,11	0,06	1	40	0,06
6	0,11	0,06	1,5	30	0,04
7	0,11	0,06	2	40	0,03
8	0,07	0,02	0,8	16	0,025

Tabulka 2

***Cenný papír* i**	$\dfrac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$	$\dfrac{(\bar{r}_i - r_f).\beta_i}{\sigma^2_{\varepsilon i}}$	$\dfrac{\beta_i^2}{\sigma^2_{\varepsilon i}}$	$\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(\bar{r}_i - r_f).\beta_i}{\sigma^2_{\varepsilon i}}$	$\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\beta_i^2}{\sigma^2_{\varepsilon i}}$	$\mathbf{C_i}$
1	0,1	0,002	0,02	0,002	0,02	0,016667
2	0,08	0,0045	0,05625	0,0065	0,07625	0,036879
3	0,07	0,0035	0,05	0,01	0,12625	0,044199
4	0,06	0,024	0,4	0,034	0,52625	0,054291
5	0,06	0,0015	0,025	0,0355	0,55125	**0,054511**
6	0,04	0,003	0,075	0,0385	0,62625	0,053012
7	0,03	0,003	0,1	0,0415	0,72625	0,050227
8	0,025	0,001	0,04	0,0425	0,76625	0,049062

$\mathbf{C_5 = 0{,}054511 = C^*}$, neboť $\mathbf{k = 5}$, kde $\mathbf{C_i < \dfrac{\bar{r}_i - r_f}{\beta}} \quad \wedge\ \mathbf{i \in k}$

Potom: $\mathbf{Z_1} = \dfrac{\beta_1}{\sigma^2_{\varepsilon 1}} . \left(\dfrac{\bar{r}_1 - r_f}{\beta_1} - C^* \right) = \dfrac{1}{50} . \left(\dfrac{0{,}15 - 0{,}05}{1} - 0{,}054511 \right) = 0{,}00091$

$$Z_2 = \frac{\beta_2}{\sigma^2_{\varepsilon_2}}.\left(\frac{\bar{r}_2 - r_f}{\beta_2} - C^*\right) = \frac{1,5}{40}.\left(\frac{0,17-0,05}{1,5} - 0,054511\right) = 0,00095584$$

$$Z_3 = \frac{\beta_3}{\sigma^2_{\varepsilon_3}}.\left(\frac{\bar{r}_3 - r_f}{\beta_3} - C^*\right) = \frac{1}{20}.\left(\frac{0,12-0,05}{1} - 0,054511\right) = 0,0007745$$

$$Z_4 = \frac{\beta_4}{\sigma^2_{\varepsilon_4}}.\left(\frac{\bar{r}_4 - r_f}{\beta_4} - C^*\right) = \frac{2}{10}.\left(\frac{0,17-0,05}{2} - 0,054511\right) = 0,0010978$$

$$Z_5 = \frac{\beta_5}{\sigma^2_{\varepsilon_5}}.\left(\frac{\bar{r}_5 - r_f}{\beta_5} - C^*\right) = \frac{1}{40}.\left(\frac{0,11-0,05}{1} - 0,054511\right) = 0,0001372$$

Součet hodnot $\sum_{i=1}^{k} Z_i = \sum_{i=1}^{5} Z_i = \mathbf{0,0038751}$. Nyní vypočítáme váhy cenných papírů v portfoliu ze

známého vztahu : $X_i = \dfrac{Z_i}{\sum_{i=1}^{k} Z_i}$ $\quad X_1 = \dfrac{Z_1}{\sum_{i=1}^{5} Z_i} = \dfrac{0,0009098}{0,0038751} = 0,23477633$,

$X_2 = \dfrac{Z_2}{\sum_{i=1}^{5} Z_i} = \dfrac{0,00095584}{0,0038751} = 0,24666185$, $\quad X_3 = \dfrac{Z_3}{\sum_{i=1}^{5} Z_i} = \dfrac{0,0007745}{0,0038751} = 0,19985329$

$X_4 = \dfrac{Z_4}{\sum_{i=1}^{5} Z_i} = \dfrac{0,0010978}{0,0038751} = 0,28329646$, $\quad X_5 = \dfrac{Z_5}{\sum_{i=1}^{5} Z_i} = \dfrac{0,0001372}{0,0038751} = 0,03541206$

$$\vec{\mathbf{X}} = (\,\mathbf{0,23477633}\ ;\ \ \mathbf{0,24666185}\ ;\ \ \mathbf{0,19985329}\ ;\ \ \mathbf{0,28329646}\ ;\ \ \mathbf{0,03541206}\,)$$

7.3 Výpočet vah(podílů) v portfoliu – sell short je povolen (prodej nakrátko)

Budeme řešit stejnou úlohu jako v případě, kde je zakázán prodej nakrátko..

Tabulka 3

Cenný papír **i**	$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$	$\frac{(\bar{r}_i - r_f).\beta_i}{\sigma^2_{\varepsilon_i}}$	$\frac{\beta_i^2}{\sigma^2_{\varepsilon_i}}$	$\sum_{i=1}^{n} \frac{(\bar{r}_i - r_f).\beta_i}{\sigma^2_{\varepsilon_i}}$	$\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i^2}{\sigma^2_{\varepsilon_i}}$	C_i
1	0,1	0,002	0,02	0,002	0,02	0,016667
2	0,08	0,0045	0,05625	0,0065	0,07625	0,036879
3	0,07	0,0035	0,05	0,01	0,12625	0,044199
4	0,06	0,024	0,4	0,034	0,52625	0,054291
5	0,06	0,0015	0,025	0,0355	0,55125	0,054511

6	0,04	0,003	0,075	0,0385	0,62625	0,053012
7	0,03	0,003	0,1	0,0415	0,72625	0,050227
8	0,025	0,001	0,04	0,0425	0,76625	0,049062

Z tabulky 2 je vidět, že u cenného papíru CP_6 je $\mathbf{C_i > \frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}}$ tedy $\mathbf{0{,}053012 > 0{,}04}$ neboť $\mathbf{C_6 = 0{,}053012}$ a $\mathbf{\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i} = 0{,}04}$. Stejně tak u dalších zbývajících cenných papírů $\mathbf{C_7, C_8}$.

Zde budeme uvažovat všech osm cenných papírů, které zařadíme do portfolia.

Za $\mathbf{C^* = C_8 = 0{,}049062}$ .Další postup je stejný jako u předcházející úlohy.

$$\mathbf{Z_1 = \frac{\beta_1}{\sigma^2_{\varepsilon_1}} \cdot \left(\frac{\bar{r}_1 - r_f}{\beta_1} - C^* \right)} = \frac{1}{50} \cdot \left(\frac{0{,}15 - 0{,}05}{1} - 0{,}049062 \right) = 0{,}0010188$$

$$\mathbf{Z_2 = \frac{\beta_2}{\sigma^2_{\varepsilon_2}} \cdot \left(\frac{\bar{r}_2 - r_f}{\beta_2} - C^* \right)} = \frac{1{,}5}{40} \cdot \left(\frac{0{,}17 - 0{,}05}{1{,}5} - 0{,}049062 \right) = 0{,}0011602$$

$$\mathbf{Z_3 = \frac{\beta_3}{\sigma^2_{\varepsilon_3}} \cdot \left(\frac{\bar{r}_3 - r_f}{\beta_3} - C^* \right)} = \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{0{,}12 - 0{,}05}{1} - 0{,}049062 \right) = 0{,}0010469$$

$$\mathbf{Z_4 = \frac{\beta_4}{\sigma^2_{\varepsilon_4}} \cdot \left(\frac{\bar{r}_4 - r_f}{\beta_4} - C^* \right)} = \frac{2}{10} \cdot \left(\frac{0{,}17 - 0{,}05}{2} - 0{,}049062 \right) = 0{,}0021876$$

$$\mathbf{Z_5 = \frac{\beta_5}{\sigma^2_{\varepsilon_5}} \cdot \left(\frac{\bar{r}_5 - r_f}{\beta_5} - C^* \right)} = \frac{1}{40} \cdot \left(\frac{0{,}11 - 0{,}05}{1} - 0{,}049062 \right) = 0{,}0002735$$

$$\mathbf{Z_6 = \frac{\beta_6}{\sigma^2_{\varepsilon_6}} \cdot \left(\frac{\bar{r}_6 - r_f}{\beta_6} - C^* \right)} = \frac{1}{30} \cdot \left(\frac{0{,}11 - 0{,}05}{1{,}5} - 0{,}049062 \right) = \mathbf{-}\ 0{,}0003021$$

$$\mathbf{Z_7 = \frac{\beta_7}{\sigma^2_{\varepsilon_7}} \cdot \left(\frac{\bar{r}_7 - r_f}{\beta_7} - C^* \right)} = \frac{2}{40} \cdot \left(\frac{0{,}11 - 0{,}05}{2} - 0{,}049062 \right) = -\ 0{,}0009531$$

$$\mathbf{Z_8 = \frac{\beta_8}{\sigma^2_{\varepsilon_8}} \cdot \left(\frac{\bar{r}_8 - r_f}{\beta_8} - C^* \right)} = \frac{0{,}8}{16} \cdot \left(\frac{0{,}07 - 0{,}05}{0{,}8} - 0{,}049062 \right) = -\ 0{,}0012031$$

Součet hodnot $\mathbf{\sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{8} Z_i = 0{,}0032286}$. Stejně jako u předcházející úlohy vypočítáme váhy cenných papírů v portfoliu ze známého vztahu : $\mathbf{X_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}}$

$$\mathbf{X_1} = \frac{\mathbf{Z_1}}{\sum_{i=1}^{8}\mathbf{Z_i}} = \frac{0{,}0010188}{0{,}0032286} = 0{,}315541, \qquad \mathbf{X_2} = \frac{\mathbf{Z_2}}{\sum_{i=1}^{8}\mathbf{Z_i}} = \frac{0{,}0011602}{0{,}0032286} = 0{,}359341$$

$$\mathbf{X_3} = \frac{\mathbf{Z_3}}{\sum_{i=1}^{8}\mathbf{Z_i}} = \frac{0{,}0010469}{0{,}0032286} = 0{,}324256, \qquad \mathbf{X_4} = \frac{\mathbf{Z_4}}{\sum_{i=1}^{8}\mathbf{Z_i}} = \frac{0{,}0021876}{0{,}0032286} = 0{,}677565$$

$$\mathbf{X_5} = \frac{\mathbf{Z_5}}{\sum_{i=1}^{8}\mathbf{Z_i}} = \frac{0{,}0002735}{0{,}0032286} = 0{,}084696, \qquad \mathbf{X_6} = \frac{\mathbf{Z_6}}{\sum_{i=1}^{8}\mathbf{Z_i}} = \frac{-0{,}0003021}{0{,}0032286} = -0{,}09356$$

$$\mathbf{X_7} = \frac{\mathbf{Z_7}}{\sum_{i=1}^{8}\mathbf{Z_i}} = \frac{-0{,}0009531}{0{,}0032286} = -0{,}2952, \qquad \mathbf{X_8} = \frac{\mathbf{Z_8}}{\sum_{i=1}^{8}\mathbf{Z_i}} = \frac{-0{,}0012031}{0{,}0032286} = -0{,}37264$$

$$\vec{\mathbf{X}} = \mathbf{(0{,}315541;\ 0{,}359341;\ 0{,}324256;\ 0{,}677565;\ 0{,}084696;\ -0{,}09356;\ -0{,}2952;\ -0{,}37264)}$$

Otázky a problémy k zamyšlení:

Úloha 1

Vyřešte portfolio sestavené z těchto cenných papírů, máme-li zadané tyto hodnoty:

Cenné papíry **i**	***Výnosnost*** $\bar{r}_i$ v%	*Nadměrná výnosnost CP* $\bar{r}_i - r_f$	**Beta** β_i	*Nesystematické riziko* $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ v %	$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$
1	15	10	1	50	10
2	17	12	1,5	40	8
3	12	7	1	20	7
4	17	12	2	10	6
5	11	6	1	40	6
6	11	6	1,5	30	4
7	11	6	2	40	3
8	7	2	0,8	16	2,5
9	7	2	1	20	2
10	5,6	0,6	0,6	6	1,0
$\mathbf{r_f = 5\%,\ \sigma^2_M = 10}$					

1) Vypočítat $\mathbf{C_i}$ u jednotlivých cenných papírů a určit $\mathbf{C^*}$
2) Vypočítat váhy jednotlivých cenných papírů v portfoliu, je-li zakázán sell short a je-li povolen

3) Vypočítat výnosnost a riziko portfolia

Úloha 2

Cenné papíry *i*	*Výnosnost* $\bar{r}_i$ *v%*	*Nadměrná výnosnost CP* $\bar{r}_i - r_f$	**Beta** β_i	*Nesystematické riziko* $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ *v %*	$\frac{\bar{r}_i - r_f}{\beta_i}$
1	19	16	1	20	
2	23	20	1,5	30	
3	11	9	0,5	10	
4	25	22	2	40	
5	13	10	1	20	
6	9	6	0,5	50	
7	14	11	1,5	30	
8	10	7	1	50	
9	9,5	6,5	1	50	
10	13	10	2	20	
11	11	9	1,5	30	
12	8	5	1	20	
13	10	7	2	40	
14	7	4	1	20	
$r_f = 3\%$, $\sigma^2_M = 10$					

1) Vypočítat $\mathbf{C_i}$ u jednotlivých cenných papírů a určit $\mathbf{C}^*$
2) Vypočítat váhy jednotlivých cenných papírů v portfoliu, je-li zakázán sell short a je-li povolen
3) Vypočítat výnosnost a riziko portfolia

8. Faktorové modely

Cílem teorie portfolia je poskytnout prostředky, pomocí nichž by investor určoval své optimální portfolio v případě, že je nekonečně mnoho možností. Dříve bylo ukázáno, že investorovi stačí odhadnout očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku každého CP pro zahrnutí do portfolia a všechny jejich kovariance. Podle jejich odhadů můžeme odvodit zakřivenou Markowitzovu efektivní množinu. Potom můžeme při zadané bezrizikové sazbě určit tangenciální portfolio a určit umístění lineární efektivní množiny. Nakonec můžeme investovat do tangenciálního portfolia, vypůjčovat si nebo zapůjčovat při bezrizikové sazbě a velikost této částky přizpůsobovat svým postojům k riziku.

Dále jsme si uvedli proces generující výnosnost pod názvem charakteristická přímka. Existují však modely. které taktéž generují výnosnost CP. Tyto modely se často nazývají faktorové modely (indexové modely), neboť tvrdí, že výnosnost CP je citlivá na změnu různých faktorů (indexů). Ukazuje se, že skutečné výnosnosti CP jsou citlivé na více faktorů než pouze na změnu výnosnosti tržního portfolia. Jestliže vyjdeme z toho, že existuje více než jeden faktor, který ovlivňuje výnosnost CP, bude naším úkolem tyto faktory zjistit a určit citlivost CP v závislosti na nich.

Makroekonomická klasifikace faktorů (ekonomické faktory)

1. Inflace (očekávaná a neočekávaná)
2. Neočekávané změny v časové struktuře úrokových sazeb
3. Neočekávané a očekávané změny míry růstu průmyslové výroby
4. Výnos tržního portfolia
5. Roční výnos do doby splatnosti (ze státních CP) atd.
6. Růst hrubého národního produktu (HNP)

Mimoekonomické faktory

1. přírodní podmínky - vliv zpráv o záplavách, zemětřesení, neúrodě, vyčerpání surovinových zdrojů atd.
2. psychologické - vliv počasí na psychiku a tedy i na chování investora na peněžním a kapitálovém trhu (burzovní panika se může projevit tak, že průměrný investor se připojí ke skupině investorů, aby zabránil skutečným nebo pomyslným ztrátám, i za cenu, že jeho rozhodnutí nemusí být správné
3. válečné konflikty - vliv zpráv o vzniklých válečných konfliktech a možného vývoje cen surovin

8.1 Jednofaktorové modely

Začneme u nejjednoduššího jednofaktorového modelu, neboť i někteří investoři tvrdí, že procesy generující výnosnost CP používají jediný faktor. Například faktor růst hrubého národního produktu nebo růst průmyslové produkce, výnosnost burzovního indexu atd.

Obecně můžeme jednofaktorový model zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{r_i = a_i + b_i \,.\, F + e_i} \qquad (8.1)$$

kde:

F - hodnota faktoru

$\mathbf{b_i}$ - citlivost CP **i** na tento faktor (někdy se $\mathbf{b_i}$ také nazývá váha faktoru), a $\mathbf{b_i = \dfrac{cov(F, r_i)}{var(F)} = \dfrac{\sigma_{Fi}}{\sigma_F^2}}$

Kdyby hodnota faktoru byla nulová, potom výnosnost CP by byla rovna:

$$\mathbf{r_i = a_i + e_i}$$

Potom očekávaná výnosnost cenného papíru podle jednofaktorového modelu bude:

$$\mathbf{\bar{r}_i = a_i + b_i \,.\, \bar{F}}, \text{ neboť } \mathbf{E(e_i) = o}$$

U jednofaktorového modelu lze ukázat, že rozptyl libovolného CP **i** bude roven:

$$\mathbf{\sigma_i^2 = b_i^2 \,.\, \sigma_F^2 + \sigma_{e\,i}^2} \qquad (8.2)$$

Kovarianci mezi libovolnými dvěma cennými papíry **i** a **j** bude:

$$\mathbf{\sigma_{ij} = b_i \,.\, b_j \,.\, \sigma_F^2} \qquad (8.3)$$

Předcházející rovnice jsou založeny na dvou kritických předpokladech:

1. *Náhodná chyba a faktor nejsou korelovány (hodnota faktoru nemá žádný vliv na hodnotu náhodné chyby).*

2. *Náhodné chyby dvou libovolných CP nejsou též korelovány (náhodná chyba jednoho CP nemá žádný vliv na náhodnou chybu druhého CP). Jinými slovy: výnosnosti dvou CP budou korelovány tzn. budou se pohybovat společně díky společné reakci na faktor.*

Pokud nebude některý z těchto předpokladů splněn, bude tento model pouze přibližný. Nyní si ukážeme, že charakteristická přímka je takovým příkladem jednofaktorového modelu, kde faktorem je výnosnost tržního portfolia $\mathbf{r_M}$.
Z předchozího výkladu víme, že charakteristická přímka má rovnici:

$$\bar{r}_i - r_f = \alpha_i + (\bar{r}_M - r_f).\beta_i + \varepsilon_i \Rightarrow \bar{r}_i = [\alpha_i + r_f.(1-\beta_i)] + \beta_i.\bar{r}_M + \varepsilon_i$$

Porovnáním této rovnice s jednofaktorovým modelem je vidět, že rovnice charakteristické přímky je příkladem jednofaktorového modelu, kde faktorem je výnosnost tržního portfolia tzn. $\mathbf{r_M} = \mathbf{F}$.

Důkaz:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i$$

$$a_i + b_i.\bar{F} + e_i = [\alpha_i + r_f.(1-\beta_i)] + \beta_i.\bar{r}_M + \varepsilon_i \qquad (8.4)$$

Z toho:

$$a_i = \alpha_i + r_f.(1-\beta_i)$$
$$b_i = \beta_i$$
$$e_i = \varepsilon_i$$

Investor se tedy dívá na cenný papír jako na papír závislý na jednom faktoru-tržním portfoliu (indexu). Faktorové modely jsou jen dalším způsobem, jak provést odhady σ_i a $\mathbf{r_i}$ u každého cenného papíru a kovariance pro jejich každou dvojici. Pro jednofaktorové modely pak stačí odhadnout $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{b_i}$ a $\mathbf{e_i}$ pro každý cenný papír. Dále musíme odhadnout očekávanou hodnotu faktoru $\bar{F}$ (střední hodnotu) a jeho směrodatnou odchylku σ_F (chyba odhadované hodnoty). Pomocí těchto hodnot (parametrů) snadno pak vypočítáme $\bar{r}_i$, σ_i a σ_{ij}.
V jednofaktorovém modelu je riziko portfolia rovno:

$$\sigma_p = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i.b_i\right)^2 .\sigma_F^2 + \sum_{i=1}^{n} X_i^2.\sigma_{e_i}^2\right]^{1/2} = \left(b_p^2.\sigma_F^2 + \sigma_{e_p}^2\right)^{1/2} \qquad (8.5)$$

kde:

$$b_p = \sum_{i=1}^{n} X_i.b_i \quad \text{a} \quad \sigma_{e_p}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.\sigma_{e_i}^2 \qquad (8.6)$$

Neboť $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.\sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.(b_i^2.\sigma_F^2 + \sigma_{e_i}^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.b_i^2.\sigma_F^2 + \sum_{i=1}^{n} X_i^2.\sigma_{e_i}^2$

Dříve jsme mluvili o tržním (systematickém) riziku a jedinečném (nesystematickém) riziku portfolia. Stejně u faktorových modelů mluvíme o faktorovém riziku a nefaktorovém riziku portfolia, které můžeme diverzifikovat, a tím zmenšit nefaktorové riziko. Diverzifikace vede k průměrkování faktorového rizika. Potom faktorové a nefaktorové riziko, které můžeme snížit diverzifikací bude:

$b_p^2.\sigma_F^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i.b_i\right)^2 .\sigma_F^2$ -faktorové riziko-systematické faktorové riziko (8.7)

$$\sigma^2_{e_p} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma^2_{e_i}$$ - nefaktorové riziko-jedinečné faktorové riziko (8.8)

Můžeme si to ukázat vyšetřením rovnice (8.8), jestliže předpokládáme, že podíl každého cenného papíru v portfoliu bude stejný: $X_i = \frac{1}{n}$. Potom $\sigma^2_{e_p} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 . \sigma^2_{e_i} = \frac{1}{n} . \left(\frac{\sigma^2_{e1} + \sigma^2_{e2} + \cdots + \sigma^2_{en}}{n} \right)$

Hodnota uvnitř závorky je průměrné nefaktorové riziko cenných papírů. Z uvedeného výrazu je zřejmé, že čím více cenných papírů bude v portfoliu, bude se snižovat i tato hodnota.

8.2 Dvoufaktorový model

Jako příklad vícefaktorového modelu si uvedeme nejdříve dvoufaktorový model, který můžeme zapsat následovně:

$$r_i = a_i + b_{i_1} . \overline{F}_1 + b_{i_2} . \overline{F}_2 + e_i$$

kde:

$\overline{F}_1$ a $\overline{F}_2$ - jsou dva faktory s převážným vlivem na výnosnost cenného papíru (např. F_1 může být tempo růstu HNP a F_2 může být míra inflace);

b_{i_1} a b_{i_2} - jsou citlivosti cenného papíru **i** na tyto faktory. Stejně jako u jednofaktorového modelu je e_i náhodná chyba a a_i je očekávaná výnosnost cenného papíru **i**, pokud jsou oba faktory rovny **nule**.

$$b_{i_1} = \frac{\mathrm{cov}(r_i, F_1)}{\mathrm{var}(F_1)} = \frac{\sigma_{iF1}}{\sigma^2_{F_1}}, \qquad b_{i_2} = \frac{\mathrm{cov}(r_i, F_2)}{\mathrm{var}(F_2)} = \frac{\sigma_{iF2}}{\sigma^2_{F_2}},$$

U dvoufaktorového modelu musí být odhadnuty pro každý cenný papír čtyři parametry: a_i, b_{i_1}, b_{i_2} a směrodatná odchylka náhodné chyby σ_{e_i}. Pro každý faktor musíme též odhadnout dva parametry: ***očekávanou hodnotu každého faktoru*** $\overline{F}_1$ ***a*** $\overline{F}_2$ ***a jejich směrodatné odchylky*** σ_{F_1} a σ_{F_2}. S použitím těchto odhadů pak můžeme určit očekávanou výnosnost libovolného cenného papíru **i** s použitím vztahu:

$$r_i = a_i + b_{i_1} . \overline{F}_1 + b_{i_2} . \overline{F}_2 + e_i$$

$$\overline{r}_i = a_i + b_{i_1} . \overline{F}_1 + b_{i_2} . \overline{F}_2 \text{ neboť } E(e_i) = o \qquad (8.9)$$

Jsou-li faktory nekorelované (neexistuje mezi nimi žádný vztah), potom pro libovolný cenný papír bude rozptyl:

$$\sigma_i^2 = b^2_{i_1} . \sigma^2_{F_1} + b^2_{i_2} . \sigma^2_{F_2} + \sigma^2_{e_i} \qquad (8.10)$$

a kovariance mezi libovolnými dvěma cennými papíry **i** a **j**:

$$\sigma_{ij} = b_{i_1} . b_{j_1} . \sigma^2_{F_1} + b_{i_2} . b_{j_2} . \sigma^2_{F_2} \qquad (8.11)$$

Pokud by dané faktory byly korelované, potom by naše rovnice (8.10) pro σ_i^2 musela obsahovat člen: $2. b_{i_1} . b_{i_2} . \mathrm{cov}(F_1, F_2)$, takže rozptyl pro daný CP bude:

$$\sigma_i^2 = b^2_{i_1} . \sigma^2_{F_1} + b^2_{i_2} . \sigma^2_{F_2} + 2. b_{i_1} . b_{i_2} . \mathrm{cov}(F_1, F_2) + \sigma^2_{e_i} \qquad (8.12)$$

a rovnice pro σ_{ij} bude rozšířena o člen $(b_{i1}.b_{j2}+b_{i2}.b_{j1}).cov(F_1,F_2)$, takže daná rovnice (8.11) nakonec bude mít tvar (8.13):

$$\sigma_{ij}=b_{i1}.b_{j1}.\sigma^2_{F1}+b_{i2}.b_{j2}.\sigma^2_{F2}+(b_{i1}.b_{j2}+b_{i2}.b_{j1}).cov(F_1,F_2) \qquad (8.13)$$

Stejně jako u jednofaktorového modelu je citlivost portfolia na určitý faktor ve vícefaktorovém modelu váženým průměrem citlivosti cenných papíru na daný faktor. Je to dáno tím, že výnosnost portfolia je váženým průměrem výnosnosti cenných papírů v portfoliu.

Tedy:

$$\begin{aligned}\bar{r}_p &= \sum_{i=1}^{n} X_i.\bar{r}_i=\sum X_i.(a_i+b_{i_1}.\bar{F}_1+b_{i_2}.\bar{F}_2+e_i)=\\ &=\sum_{i=1}^{n} X_i.a_i+\sum_{i=1}^{n} X_i.b_{i_1}.\bar{F}_1+\sum_{i=1}^{n} X_i.b_{i_2}.\bar{F}_2+\sum_{i=1}^{n} X_i.e_i=\\ &=a_p+b_{p_1}.\bar{F}_1+b_{p_2}.\bar{F}_2+e_p\end{aligned} \qquad (8.14)$$

kde:

$$a_p=\sum_{i=1}^{n} X_i.a_i \qquad b_{p_1}=\sum_{i=1}^{n} X_i.b_{i_1}$$

$$b_{p_2}=\sum_{i=1}^{n} X_i.b_{i_2} \qquad e_p=\sum_{i=1}^{n} X_i.e_i$$

Z uvedené rovnice je vidět, že citlivosti portfolia b_{p_1} a b_{p_2} jsou váženými průměry odpovídajících citlivostí jednotlivých cenných papírů na tyto faktory.

8.3 Vícefaktorové modely

Vícefaktorový model popisuje výnos i-tého aktiva za dobu trvání portfolia. Je daný vztahem:

$$r_i=a_i+b_{i_1}.F_1+b_{i_2}.F_2+...+b_{i_k}.F_k+e_i=a_i+\sum_{k=1}^{K} b_{i_k}.F_k+e_i$$

Víme, že výnosnost portfolia bude:

$$\begin{aligned} r_p &= \sum_{i=1}^{n} X_i.r_i=\sum_{i=1}^{n} X_i.(a_i+b_{i_1}.F_1+b_{i_2}.F_2+\cdots+b_{i_k}.F_k+e_i)=\\ &=\sum_{i=1}^{n} X_i.a_i+F_1\sum_{i=1}^{n} X_i.b_{i_1}+F_2\sum_{i=1}^{n} X_i.b_{i_2}+...+F_k.\sum_{i=1}^{n} X_i.b_{i_k}+\sum_{i=1}^{n} e_i\end{aligned} \qquad (8.15)$$

Dále pro určení rizika portfolia použijeme náš známý výraz:

$$\sigma^2_p=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i.X_j.\sigma_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i.X_j.cov(\bar{r}_i,\bar{r}_j)$$

Pro kovarianci $cov(\bar{r}_i,\bar{r}_j)$ potom platí :

$$\mathbf{cov(r_i,r_j) = cov}\left(\underbrace{\mathbf{a_i + \sum_{k=1}^{K} b_{ik} F_k + e_i}}_{\mathbf{r_i}} ; \underbrace{\mathbf{a_j + \sum_{m=1}^{K} b_{im} F_m + e_j}}_{\mathbf{r_j}} \right) =$$

$$\mathbf{= \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{K} b_{ik} . b_{jm} . cov(F_k , F_m) + \sum_{k=1}^{K} b_{ik} . cov(e_i , F_k) + \sum_{m=1}^{K} b_{jm} . cov(e_j , F_m) + cov(e_i , e_j)} \qquad (8.16)$$

Poznámka:

1. *Do faktorových modelů můžeme zahrnout i faktor času, a potom bychom označili:*
   $\mathbf{r_{i_t}}$ *- náhodná veličina, která popisuje výnos* **i***-tého aktiva v časovém období* **t**
   $\mathbf{F_{i_t}}$ *- je faktor, který ovlivňuje výnos* **i***-tého aktiva v čase* **t**
   $\mathbf{a_{i_t}}$ *- je úrovňová konstanta, která určuje výnos* **i***-tého aktiva v čase* **t**
2. *Rozhodování o určité investici na základě faktorového modelu je zpravidla zaměřeno na kvantifikaci budoucího očekávaného výnosu jednotlivých aktiv vzhledem k budoucí předpokládané velikosti faktorů, které ovlivňují výnos aktiva. Otázkami spojenými s kvantifikací rizika změny výnosu aktiva nebo portfolia se ve vícefaktorovém modelu nezabýváme, a proto do sestavovaného portfolia vybíráme ta aktiva, u kterých předpokládáme největší výnos. Při takovémto sestavování portfolia přistupujeme k rizikovosti většinou intuitivně.*
3. *Pokud kvantifikujeme ve vícefaktorových modelech též riziko změny výnosu jednotlivých aktiv, můžeme se znalostí kovariancí mezi výnosy aktiv zjistit i riziko změny výnosu portfolia.*

Model arbitrážní teorie oceňování APT (Arbitrage Pricing Theory)

1. Pojem arbitráž:

- v právní terminologii - mimosoudní řešení obchodních sporů

2. Ve finančních operacích

- obchody, při kterých se využívají cenové rozdíly na různých burzách, u kterých jsou charakteristické tyto znaky:
  - cenové rozdíly
  - stejná doba
  - nestejná místa

Kdysi se tento způsob často používal, ale v současné době při rozvinutých informačních sítí se tento způsob obchodování s cennými papíry používá velmi zřídka. Přesto se ještě tyto operace provádějí jako cenové, devizové a úrokové. Model APT je speciálním případem vícefaktorového modelu, kde opět předpokládáme:

a) $\mathbf{E(e_i) = 0,}\ i = 1,2,3,...,n$
b) $\mathbf{cov(F_k , F_m) = 0,}\ m \neq k,\ m,k = 1,2,...,K$
c) $\mathbf{cov(e_i , e_j) = 0,}\ i \neq j,\ i,j = 1,2,...,n$
d) $\mathbf{cov(e_i , F_k) = 0,}\ i = 1,2,...,n, k = 1,2,...,K$

Na základě těchto předpokladů (a, b) potom rovnice (8.16) pro $\boldsymbol{\sigma_{ij}}$ přejde do tvaru:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{K} b_{ik} . b_{jk} . \sigma^2_{F_k} \qquad (8.17)$$

Odtud pro výnos portfolia obdržíme:

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} X_i . \left(a_i + \sum_{k=1}^{K} b_{ik} . \bar{F}_k \right)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i . X_j . \underbrace{\sum_{k=1}^{K} b_{ik} . b_{jk} \sigma^2_{F_k}}_{\sigma_{ij}} + \sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma^2_{e_i} =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i . b_{ik}}_{b_{pk}} . \underbrace{\sum_{j=1}^{n} X_j . b_{jk}}_{b_{pk}} \right] . \sigma^2_{F_k} + \sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma^2_{e_i} = \qquad (8.18)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} b^2_{pk} . \sigma^2_{F_k} + \sum_{i=1}^{n} X_i^2 . \sigma^2_{e_i}$$

kde: $b_{pk} = \sum_{i=1}^{n} X_i . b_{ik}$

S užitím předpokladu (a) a rovnice (8.14) obdržíme výnosnost portfolia:

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} X_i . \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} X_i . \left(a_i + b_{i_1} . \bar{F}_1 + b_{i_2} . \bar{F}_2 + \cdots + b_{i_k} . \bar{F}_k + e_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i . a_i + \bar{F}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i . b_{i_1} + \bar{F}_2 \sum_{i=1}^{n} X_i . b_{i_2} + \ldots + \bar{F}_k . \sum_{i=1}^{n} X_i . b_{i_k} + \qquad (8.19)$$

$$+ \sum X_i . e_i = \sum_{i=1}^{n} X_i . a_i + \sum_{k=1}^{K} b_{pk} \bar{F}_k$$

Tato portfolia mají právě zásadní význam v arbitrážní teorii oceňování. Teorie stanovení cen arbitráží je podobně jako CAPM rovnovážným modelem pro určení cen aktiv. Na rozdíl od CAPM předpokládá APT, že výnosnosti jsou generovány faktorovým modelem. CAPM vyžadoval dosti silné předpoklady o preferencích investorů (výnosnost, riziko, odpor k riziku), zatímco APT takovéto silné předpoklady nedělá. APT není založena na myšlence, že všichni investoři pohlížejí na portfolio ve smyslu očekávaných výnosností a směrodatných odchylek. Místo toho APT předpokládá, že investoři dávají přednost vyšší výnosnosti před nižší úrovní bohatství.

8.4 Sloučení APT a CAPM

Na rozdíl od APT nepředpokládá CAPM, že výnosnosti jsou generovány faktorovým modelem. Můžeme však vytvořit model, kde jsou výnosnosti generovány faktorovým modelem a kde platí všechny předpoklady CAPM.

Koeficienty beta a citlivost na faktory

Jestliže předpokládáme, že výnosnosti jsou generovány dvoufaktorovým modelem, můžeme ukázat, že kovariance výnosnosti cenného papíru **i** a výnosnosti tržního portfolia **M** bude:

$$\mathrm{cov}(r_i, r_M) = \mathrm{cov}(F_1, r_M).b_{i_1} + \mathrm{cov}(F_2, r_M).b_{i_2} + \mathrm{cov}(e_i, r_M) \ / : \sigma_M^2$$

V předcházející části bylo odvozeno, že koeficient: $\beta_i = \dfrac{\mathrm{cov}(\bar{r}_i, \bar{r}_M)}{\sigma_M^2}$.

Jestliže vydělíme obě strany rovnice σ_M^2, obdržíme:

$$\beta_i = \left[\frac{\mathrm{cov}(F_1, r_M)}{\sigma_M^2}.b_{i_1}\right] + \left[\frac{\mathrm{cov}(F_2, r_M)}{\sigma_M^2}.b_{i_2}\right] + \frac{\mathrm{cov}(e_i, r_M)}{\sigma_M^2} \qquad (8.17)$$

Z praktického hlediska bude člen $\dfrac{\mathrm{cov}(e_i, r_M)}{\sigma_M^2}$ velmi malý a můžeme jej zanedbat. Na předcházející členy se můžeme dívat jako na **faktorové beta**.

Takže:

$$\beta_{F_1} = \frac{\mathrm{cov}(F_1, r_M)}{\sigma_M^2} \quad \mathbf{a} \quad \beta_{F_2} = \frac{\mathrm{cov}(F_2, r_M)}{\sigma_M^2}$$

Potom danou rovnici můžeme přepsat do tvaru:

$$\beta_i = \beta_{F_1}.b_{i_1} + \beta_{F_2}.b_{i_2} \qquad (8.18)$$

Protože β_{F_1} a β_{F_2} jsou konstanty a nemění se od cenného papíru k cennému papíru, vyjadřuje rovnice, že koeficient beta **i-**tého cenného papíru je funkcí jeho citlivosti na podstatné faktory. Důvodem různého beta u jednotlivých cenných papírů spočívá v tom, že mají odlišné citlivosti na jednotlivé faktory.

8.5 Sektorové faktorové modely

Cenné papíry stejného průmyslového odvětví se často pohybují společně a stejně reagují na změny ve vyhlídkách tohoto sektoru. Někteří investoři to uznávají tím, že používají speciální typ vícefaktorového modelu, který se nazývá ***sektorový faktorový model***. Abychom mohli použít sektorový faktorový model, musí být každý cenný papír zařazen do určitého sektoru. Jako příklad lze uvést sektor průmyslový (1) a další sektor dopravy (2). Potom budeme mluvit o dvousektorovém faktorovém modelu. Je nutno podotknout, že počet sektorů a jejich definování závisí pouze na investorovi a je tedy otevřenou záležitostí.

U tohoto námi definovaného dvousektorového faktorového modelu bude mít proces generující výnosnost cenných papírů obecný tvar jako u dvoufaktorového modelu s tím rozdílem, že za daný faktor budeme brát v úvahu sektor, do kterého budou zařazeny jednotlivé cenné papíry v držení investora. Každý cenný papír buď náleží do sektoru (1) nebo do sektoru (2), ale ne však do obou současně. Podle definice to znamená, že v závislosti na sektorovém faktoru, kam cenný papír náleží, je jedna z hodnot b_{i_1} a b_{i_2} rovna **1**, druhá hodnota odpovídá sektorovému faktoru, kam cenný papír nenáleží a bude roven **0**. Jako příklad uvažujme dvousektorový faktorový model Škoda Plzeň (ŠP) a ČSAD (ČD). Škoda Plzeň bude patřit do sektoru průmyslového a ČSAD do sektoru dopravy. Potom dvousektorový faktorový model bude mít tvar:

$$r_{ŠP} = a_{ŠP} + b_{ŠP_1}.\overline{F}_1 + b_{ŠP_2}.\overline{F}_2 + e_{ŠP} \qquad (8.19)$$

Protože ŠP patří do sektorového faktoru (1), je koeficientu $\mathbf{b}_{ŠP_1}$ přiřazena **1** a koeficientu $\mathbf{b}_{ŠP_2}$ přiřazena **0**, neboť sektorový faktor (2) do průmyslového nepatří. Po tomto přiřazení bude mít naše rovnice tvar:

$$\mathbf{r}_{ŠP} = \mathbf{a}_{ŠP} + \overline{\mathbf{F}}_1 + \mathbf{e}_{ŠP} \qquad (8.20)$$

U dvousektorového faktorového modelu tedy stačí pro ŠP odhadnout pouze hodnoty $\mathbf{a}_{ŠP}$ a $\mathbf{e}_{ŠP}$, zatímco u dvou faktorového modelu bychom museli odhadnout hodnoty $\mathbf{a}_{ŠP}$, $\mathbf{b}_{ŠP_1}$, $\mathbf{b}_{ŠP_2}$ a $\mathbf{e}_{ŠP}$. Podobně dostaneme pro ČD, které nepatří do průmyslového sektoru, následující model:

$$\mathbf{r}_{ČD} = \mathbf{a}_{ČD} + \mathbf{b}_{ČD_1} . \overline{\mathbf{F}}_1 + \mathbf{b}_{ČD_2} . \overline{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{e}_{ČD}$$

který se zjednoduší na model:

$$\mathbf{r}_{ČD} = \mathbf{a}_{ČD} + \overline{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{e}_{ČD}$$

neboť $\mathbf{b}_{ČD_1}$ a $\mathbf{b}_{ČD_2}$ budou po řadě přiřazeny hodnoty **0** a **1**. Budou tedy opět odhadovány pouze hodnoty $\mathbf{a}_{ČD}$ a $\mathbf{e}_{ČD}$.

Obecně lze říci, že zatímco u dvoufaktorového modelu musí být pro každý cenný papír odhadovány čtyři parametry $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_{i_1}, \mathbf{b}_{i_2}, \boldsymbol{\sigma}_{e_i})$, u dvousektorového faktorového modelu stačí odhadovat pouze dva parametry, protože dvěma parametrům byla přiřazena hodnota **0** nebo **1**. S použitím těchto odhadů pro jednotlivé cenné papíry společně s očekávanými hodnotami $\overline{\mathbf{F}}_1, \overline{\mathbf{F}}_2, \boldsymbol{\sigma}^2_{F_1}, \boldsymbol{\sigma}^2_{F_2}$ může investor po řadě vypočítat očekávané výnosnosti, rozptyly a kovariance. To umožní investorovi odvodit zakřivenou Markowitzovu efektivní množinu a z ní vypočítat pro danou bezrizikovou investici tangenciální portfolio.

8.5.1 Faktorová portfolia čistých faktorů

Pro usnadnění výkladu předpokládejme, že existují dva faktory $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$, což znamená, že výnosnosti cenných papírů jsou generovány rovnicí:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{i_1} . \overline{\mathbf{F}}_1 + \mathbf{b}_{i_2} . \overline{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{e}_i$$

Je také nutné předpokládat, že existuje velmi mnoho cenných papírů v portfoliu kdy se jejich citlivosti na tyto faktory podstatně liší. Zajímavá je investiční strategie, která využívá portfolia, která reprezentují ***hry čistých faktorů***. Budeme-li mít dostatečné množství cenných papírů s odlišnými charakteristikami, potom by mělo být možné zkonstruovat portfolio, které bude mít jednotkovou citlivost k jednomu faktoru (citlivost bude rovna jedné). Toto portfolio nebude citlivé na další faktor a bude mít nulové nefaktorové riziko. To vede ke kombinaci cenných papírů tak, že počtem cenných papírů v portfoliu bude dosahováno dobré nefaktorové výnosnosti a bude zhruba stejný jako počet cenných papírů, které dosahují špatné nefaktorové výnosnosti. To povede k portfoliu, které bude mít téměř nulové nefaktorové riziko.

Kdyby bylo dovoleno investovat do velkého množství podobných cenných papírů, bylo by možné vytvořit portfolio s velmi malým nefaktorovým rizikem ($\mathbf{e}_p = 0$). Potom vhodným výběrem proporcí by investor mohl vytvořit portfolio, které bude citlivé pouze na faktor **1**:

$$\overline{\mathbf{r}}_{p_1} = \mathbf{a}_{p_1} + \mathbf{F}_1$$

neboť $\mathbf{b_{p_{I_1}}} = \mathbf{1}$ a $\mathbf{b_{p_{I\,2}}} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{e_{p_{I\,1}}} = \mathbf{0}$. Toto by bylo ***portfolio čistého faktoru 1***. V důsledku toho se bude měnit jeho výnosnost společně se změnou ***faktoru 1***. Podobnou strategií bychom mohli vytvořit ***portfolio čistého faktoru 2***. Potom $\mathbf{b_{p_{I_2}}} = \mathbf{1}$ a $\mathbf{b_{p_{I\,1}}} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{e_{p_{I_2}}} = \mathbf{0}$

Potom dané portfolio bude:

$$\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}_{II}} = \mathbf{a}_{\mathbf{p}_{II}} + \mathbf{F}_2$$

Poznámka: Na trhu cenných papírů s různými charakteristikami by bylo možné teoreticky vytvořit portfolia čistých faktorů, která by byla citlivá pouze na jeden faktor a měla nevýznamné nefaktorové riziko. V praxi se však tyto podmínky nedají zcela splnit, což znamená, že je možné vytvořit pouze portfolia nečistých faktorů, která jsou citlivá převážně (nikoliv výlučně) na jeden faktor a mají relativně malé nefaktorové riziko.

8.5.2 Očekávané výnosnosti faktorových portfolií čistého faktoru

Očekávaná výnosnost portfolia čistého faktoru bude záviset na očekávané hodnotě příslušného faktoru. Je možné tuto očekávanou výnosnost rozdělit na dvě části:

1. *bezrizikovou úrokovou sazbu*
2. *zbytek, který budeme označovat* $\boldsymbol{\lambda}$ *a může být považován za prémii očekávané výnosnosti na jednotku citlivosti na faktor (v našem dvou faktorovém portfoliu by to bylo* $\boldsymbol{\lambda_1 = a_{p_I} + \bar{F}_1}$ ***a***

   $\boldsymbol{\lambda_2 = a_{p_{II}} + \bar{F}_2}$

Potom očekávaná výnosnost portfolia čistého faktoru bude:

$$\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{p_I}} = \mathbf{r_f} + \boldsymbol{\lambda}_1 \quad \mathbf{a} \quad \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{p_{II}}} = \mathbf{r_f} + \boldsymbol{\lambda}_2$$

I když portfolia čistých faktorů nemusejí být jedinečná co do složení z cenných papírů, jejich očekávané výnosnosti by měly být stejné. Představme si, že dvě portfolia čistých faktorů budou mít rozdílné výnosnosti. To by bylo možné v případě rozdílnosti hodnot **a** (uvažujme v našem případě $\mathbf{a_{p_I}}$). Nyní uvažujme prodej nakrátko portfolia s nižší očekávanou výnosností a nákup portfolia s vyšší očekávanou výnosností. V tomto případě získává investor abnormální výnosnost ***bez ohledu na faktor 1***. K tomu však nemůže dojít, neboť dvě identická aktiva (v tomto případě dvě portfolia čistého faktoru **1**) musejí v rovnovážném bodu poskytnout shodnou očekávanou výnosnost. Jestliže nastane případ, kdy očekávané výnosnosti jsou rozdílné, někteří investoři, známí pod jménem ***arbitražéři*** nakoupí cenné papíry v portfoliu s vyšší očekávanou výnosností a prodají ty, které jsou v portfoliu s nižší očekávanou výnosností. To způsobí, že ceny papírů s vyšší výnosností vzrostou a sníží se tak výnosnost celého odpovídajícího portfolia. U cenných papírů s menší výnosností dojde k poklesu cen a k nárůstu očekávané výnosnosti odpovídajícího portfolia. To bude pokračovat tak dlouho, dokud nebudou mít obě portfolia shodnou očekávanou výnosnost. Jako výsledek pohybu těchto cen dosáhne investor abnormální výnosnosti a po krátké době tato příležitost "získat něco za nic" zmizí. To znamená, že ***arbitráž*** zajistí, že všechna portfolia čistého faktoru **1** budou mít stejnou výnosnost $\mathbf{r_f} + \boldsymbol{\lambda}_1$ (obecně dochází k arbitráži, když se stejný cenný papír prodává na dvou trzích za dvě různé ceny. Spočívá v nákupu cenného papíru na trhu s nižší cenou a v téměř současném prodeji stejného cenného papíru na trhu s vyšší cenou. Jedním z výsledků arbitráže je bezrizikový zisk a dalším pak rychlá eliminace cenového rozdílu).

8.5.3 Očekávané výnosnosti, faktorové beta a citlivosti cenných papírů

Dříve bylo ukázáno, že očekávaná výnosnost cenného papíru **i** souvisí (v důsledku předpokladů nezbytných pro CAPM) s koeficientem $\boldsymbol{\beta}$ následovně:

$$\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{r_f} + (\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{M}} - \mathbf{r_f}) . \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{i}}$$

$$\bar{r}_i = r_f + \left[(\bar{r}_M - r_f).(\beta_{F_1}.b_{i_1} + \beta_{F_2}.b_{i_2})\right]$$

Pokud budou výnosnosti generovány dvoufaktorovým modelem, bude koeficient beta daného cenného papíru souviset s jeho citlivostmi na faktory:

$$\beta_i = \beta_{F_1}.b_{i_1} + \beta_{F_2}.b_{i_2} \qquad (8.21)$$

$$\beta_{F_1} = \frac{\operatorname{cov}(F_1, r_M)}{\sigma_M^2} \;;\; \beta_{F_2} = \frac{\operatorname{cov}(F_2, r_M)}{\sigma_M^2} \qquad (8.22)$$

Jestliže porovnáme tuto rovnici s rovnicí pro stanovení ceny $\bar{r}_i = r_f + \lambda_1.b_{i_1} + \lambda_2.b_{i_2}$ podle APT, vidíme (pokud jsou splněny předpoklady jak pro CAPM tak pro APT), že pro hodnoty λ_1 a λ_2 bude platit:

$$\lambda_1 = (\bar{r}_M - r_f).\beta_{F_1}$$

$$\lambda_2 = (\bar{r}_M - r_f).\beta_{F_2} \qquad (8.23)$$

Dosazením těchto hodnot do předcházející rovnice obdržíme:

$$\bar{r}_i = r_f + \lambda_1.b_{i_1} + \lambda_2.b_{i_2}$$

APT neříká nic o velikostech nebo hodnotách prémií očekávaných výnosností na faktor λ_1 a λ_2. Pokud však platí také CAPM, může poskytnout určité vodítko. Je dáno předcházejícími rovnicemi, které existují, pokud jsou splněny předpoklady jak APT tak CAPM. Předpokládejme, že se faktor $\overline{F}_1$ bude pohybovat společně s tržním portfoliem, což znamená, že je s ním kladně korelován a tedy $\operatorname{cov}(F_1, r_M) > 0$ .Na základě toho musí být i β_{F_1} též kladné, neboť: $\beta_{F_1} = \frac{\operatorname{cov}(F_1, r_M)}{\sigma_M^2}$ a $\sigma_M^2 > 0$. Protože $\bar{r}_M$ je větší než r_f, potom i rozdíl $(\bar{r}_M - r_f) > 0$. Z toho plyne, že λ_1 bude též kladné číslo. Z dané rovnice je vidět, že čím větší bude hodnota b_{i_1}, tím větší bude očekávaná výnosnost cenného papíru. Zobecnění: ***je-li faktor pozitivně korelován s tržním portfoliem, potom očekávaná výnosnost cenného papíru je pozitivní lineární funkcí citlivosti cenného papíru na tento faktor.*** Podobným způsobem lze ukázat na případ, kdy se faktor $\overline{F}_2$ bude pohybovat proti tržnímu portfoliu, což znamená, že je negativně korelován s tímto tržním portfoliem a očekávaná výnosnost cenného papíru bude nižší. Z toho vyplývá, že $\beta_{F_2} < 0$ a tedy i $(\bar{r}_M - r_f).\beta_{F_2} < 0$. Potom $\lambda_2 < 0$. Z toho vyplývá, že čím bude vyšší b_{i_2}, tím bude nižší očekávaná výnosnost cenného papíru. Zobecnění: ***je-li faktor negativně korelován s tržním portfoliem, potom očekávaná výnosnost cenného papíru je negativní lineární funkcí citlivosti cenného papíru na tento faktor.***

Příklad:

Mějme tři cenné papíry, které mají faktorové beta $\beta_{F_1} = 1{,}2$ (HNP) a $\beta_{F_2} = 0{,}8$ (inflace) a za předpokladu, že $r_f = 7\,\%$ a $\bar{r}_M = 15\,\%$, bude mít rovnice tvar:

$$\bar{r}_i = r_f + \left[(\bar{r}_M - r_f).\beta_{F_1}\right].b_{i_1} + \left[(\bar{r}_M - r_f).\beta_{F_2}\right].b_{i_2} =$$

$$= 7 + \left[(15-7).1{,}2\right].b_{i_1} + \left[(15-7).0{,}8\right].b_{i_2} = 7 + 9{,}6.b_{i_1} + 6{,}4.b_{i_2}$$

Kde $\lambda_1 = 9{,}6$ a $\lambda_2 = 6{,}4$ jsou kladná čísla a tedy, čím bude větší $\mathbf{b}_{i_1}$ a $\mathbf{b}_{i_2}$, tím bude větší i $\bar{\mathbf{r}}_i$. Kdyby bylo $\beta_{F_2} = -0{,}8$ místo 0,8, potom by $\lambda_2 = (15 - 7).(-0{,}8) = -6{,}4$ a předchozí rovnice by měla tvar: $\bar{\mathbf{r}}_i = \mathbf{7 + 9{,}6.b}_{i_1} - \mathbf{6{,}4.b}_{i_2}$. Záporná hodnota β_{F_2} by vedla k záporné hodnotě λ_2 a v této situaci by zvýšení hodnoty $\mathbf{b}_{i_2}$ vedlo k snížení výnosnosti cenného papíru.

Závěr: *Znaménko každého lambda určuje, zda očekávaná výnosnost cenného papíru je pozitivní nebo negativní funkcí jeho citlivosti na toto lambda.*

8.6 Výnosnost cenného papíru a míra inflace

Původní model odhadu ceny kapitálových aktiv používá nominální výnosnosti těchto aktiv. Jestliže dokážeme míru inflace (jako další faktor, který ovlivňuje výnosnost cenného papíru) určitým způsobem předpovídat, nezpůsobí to v podstatě nepřekonatelný problém, neboť tato inflace přispěje malou mírou k určení výnosnosti tohoto aktiva. Může však nastat případ, že inflace značně ovlivní výnosnost cenného papíru, a proto je nutno s ní v odhadu výnosnosti počítat. Jedná se hlavně o beta cenného papíru, která vzhledem k tržnímu portfoliu se může změnit jak reálná výnosnost tohoto cenného papíru, tak i reálná výnosnost tržního portfolia proti nominální výnosnosti.

Potom rovnici $\mathbf{Nr}_{i\,t} = \mathbf{a}_i + \mathbf{h}_i.\mathbf{I}_t + \varepsilon_{i\,t}$ kde

$\mathbf{h}_{i\,t}$ - citlivost cenného papíru na inflaci za období **t**

$\mathbf{I}_t$ - míra inflace v čase t

$\mathbf{Nr}_{i\,t}$ - nominální výnosnost cenného papíru

$\varepsilon_{i\,t}$ - neurčitá část výnosnosti cenného papíru , která nesouvisí s mírou inflace za období **t**

můžeme psát ve tvaru: $\mathbf{Nr}_{i\,t} = \mathbf{a}_i + \mathbf{h}_i^e.\mathbf{EI}_t + \mathbf{h}_i^u.\mathbf{UI}_t + \varepsilon_{i\,t}$ (8.24)

kde $\mathbf{h}_i^e = \dfrac{\mathbf{cov(r_i, EI)}}{\mathbf{var(EI)}}$ a $\mathbf{h}_i^u = \dfrac{\mathbf{cov(r_i, UI)}}{\mathbf{var(EI)}}$ jsou citlivosti cenných papírů na očekávanou a neočekávanou inflaci.

$\mathbf{h}_i^e$ - citlivost nominální výnosnosti cenných papírů očekávanou míru inflace

$\mathbf{h}_i^u$ - citlivost nominální výnosnosti cenných papírů na neočekávanou míru inflace

Je nutno si všimnout, že na začátku období **t** jsou jak $\mathbf{UI}_t$ a $\varepsilon_{i\,t}$ náhodné veličiny a mají stejnou pravděpodobnost být na konci období pozitivní nebo negativní. Kdyby citlivosti cenných papírů $\mathbf{h}_i^e = \mathbf{h}_i^u = 1$ byl by cenný papír za dostatečně zajištěný proti inflaci jak očekávanou tak neočekávanou, což v praxi není pravděpodobné. Pokud investoři uvažují v pojmech reálné výnosnosti potom reálná rovnice reálné přímky trhu cenného papíru bude:

$$\mathbf{ERr}_i = \mathbf{Er}_f + (\mathbf{ERr}_M - \mathbf{Er}_f).\beta_i^r \qquad (8.25)$$

$\mathbf{ERr}_i$ - očekávaná reálná výnosnost cenného papíru

$\mathbf{Er}_f$ - očekávaná reálná výnosnost bezrizikového aktiva s $\beta = \mathbf{o}$

$\mathbf{ERr}_M$ - očekávaná reálná výnosnost tržního portfolia

β_i^r - reálná beta cenného papíru což znamená $\beta_i^r = \dfrac{\mathbf{cov(Rr_i, Rr_M)}}{\mathbf{var(Rr_M)}}$ (8.26)

Tato rovnice nám dává odpověď na vliv inflace na očekávanou výnosnost cenného papíru. Víme ,že reálná výnosnost cenného papíru a tržního portfolia bude:

$$\begin{aligned} Rr_i &= Nr_i - I \\ Rr_M &= Nr_M - I \end{aligned} \qquad (8.27)$$

Potom očekávaná reálná výnosnost cenného papíru a tržního portfolia pak bude:

$$\begin{aligned} ERr_i &= ENr_i - EI \\ ERr_M &= ENr_M - EI \end{aligned} \qquad (8.28)$$

EI - očekávaná míra inflace

Jestliže dosadíme pravé strany těchto rovnic do $\mathbf{ERr_i = Er_f + (ERr_M - Er_f).\beta_i^r}$ obdržíme:

$$ENr_i - EI = Er_f + (ENr_M - Er_f).\beta_i^r \qquad (8.29)$$

Z předešlého víme, že $\beta_i^r = \dfrac{cov(Rr_i, Rr_M)}{var(Rr_M)}$.

Dosadíme-li do tohoto výrazu za $\begin{aligned} Rr_i &= Nr_i - I \\ Rr_M &= Nr_M - I \end{aligned}$ dostaneme: $\beta_i^r = \dfrac{cov(Nr_i - I,\ Nr_M - I)}{var(Rr_M)}$

Z toho $\beta_i^r = \dfrac{cov(Nr_i - I,\ Nr_M - I)}{var(Rr_M)} = \dfrac{cov(Nr_i, Nr_M)}{var(Rr_M)} - \dfrac{cov(Nr_i, I)}{var(Rr_M)} - \dfrac{cov\,ar(Nr_M, I)}{var(Rr_M)} + \dfrac{var(I)}{var(Rr_M)}$

Pro algebraickou úpravu zlomek $\dfrac{cov(Nr_i, Nr_M)}{var(Rr_M)}$ vynásobíme $\dfrac{var(Nr_M)}{var(Nr_M)}$ a obdržíme:

$$\frac{cov(Nr_i, Nr_M)}{var(Rr_M)} \cdot \frac{var(Nr_M)}{var(Nr_M)} = \frac{var(Nr_M)}{var(Rr_M)} \cdot \frac{cov(Nr_i, Nr_M)}{var(Nr_M)} = \frac{var(Nr_M)}{var(Rr_M)}.\beta_i^n$$ neboť $\beta_i^n = \dfrac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ je

normální (tradiční) beta cenného papíru.

Pro algebraickou úpravu zlomek $\dfrac{cov(Nr_i, I)}{var(Rr_M)}$ vynásobíme $\dfrac{var(I)}{var(I)}$ a obdržíme:

$\dfrac{var(I)}{var(Rr_M)} \cdot \dfrac{cov(Nr_i, I)}{var(I)} = \dfrac{var(I)}{var(Rr_M)}.h_i^u$, kde $h_i^u = \dfrac{cov(Nr_i, UI)}{var(UI)}$,což je citlivost cenného papíru na neočekávanou inflaci.

Po dosazení za β_i^r do rovnice: $\mathbf{ENr_i = EI + Er_f + (ENr_M - Er_f).\beta_i^r}$ dostaneme:

$$ENr_i = \underbrace{\left\{ EI + Er_f + (ENr_M - Er_f).\frac{var(I) - cov(Nr_M, I)}{var(Rr_M)} \right\}}_{Z_1} + \underbrace{\left\{ (ENr_M - EI - Er_f).\frac{var(Nr_M)}{var(Rr_M)} \right\}}_{Z_2}.\beta_i^n -$$

$$- \underbrace{\left\{ (ENr_M - EI - Er_f).\frac{var(I)}{var(Rr_M)} \right\}}_{Z_3}.h_i^u = Z_1 + Z_2.\beta_i^n - Z_3.h_i^u$$

(8.30)

Otázky a problémy k zamyšlení:

Úloha 1

Mějme citlivosti CP C_1, C_2, C_3 na dva faktory:

CP	b_{i_1}	b_{i_2}	X_i	σ_{e_i}
C_1	0,40	1,85	0,25	3%
C_2	-0,50	0,75	0,40	2%
C_3	0,67	-0,25	0,35	0,5%
	$\beta_{F_1} = 1{,}20$	$\beta_{F_2} = 0{,}80$	$\sigma_{F_1} = 0{,}24$	$\sigma_{F_2} = 0{,}14$

a) Vypočítejte koeficienty β_i jednotlivých CP
b) Vypočítejte riziko jednotlivých CP (faktory nejsou korelovány)

Úloha 2

Výnosnosti CP x, y jsou generovány třemi faktory:

$$F_1 = 4\%,\ F_2 = 6{,}5\%,\ F_3 = 9\%,\ r_f = 3\% \quad X_1 = 65\%,\ \ X_2 = 35\%,$$
$$b_{x_1} = 0{,}08,\ b_{y_1} = 0{,}75,\ b_{x_2} = 0{,}40,\ b_{y_2} = 0{,}65,\ b_{x_3} = 1{,}48,\ b_{y_3} = 0{,}59,\ \alpha_x = 6\%,\ \alpha_y = 9\%$$
$$\sigma_{F_1} = 10\%,\ \sigma_{F_2} = 9{,}5\%,\ \sigma_{F_3} = 12\%,\ \sigma_{e_x} = 14\%,\ \sigma_{e_y} = 25\%,\ e_x = 2{,}5\%,\ e_y = 1{,}85\%$$
$$\beta_{F_1} = 1{,}20,\ \beta_{F_2} = 0{,}56,\ \beta_{F_3} = 1{,}58$$

a) jaká je očekávaná výnosnost CP x a y
b) Jaké je riziko výnosností jednotlivých CP x a y
c) Jaké je riziko portfolia z těchto CP

Úloha 3

Předpokládejme, že CAPM platí a že výnosnosti CP jsou generovány faktorovým modelem. Máme informace z BCCP takovéto:

$$\sigma_M^2 = 624,\ \mathrm{cov}(F_1, r_M) = 256,\ \mathrm{cov}(F_2, r_M) = 850,\ b_{A_1} = 0{,}75,$$
$$b_{A_2} = 1{,}50,\ b_{B_1} = 0{,}85,\ b_{B_2} = 1{,}70,\ X_A = 48\%,\ \ X_B = 52\%$$

a) Vypočítat koeficienty β CP A, B
b) Je-li $\mathbf{r_f = 6\%}$ **a** $\mathbf{r_M = 12\%}$, jaká bude očekávaná výnosnost CP A a B
c) Vypočítat riziko portfolia

Úloha 4

Předpokládejme, že výnosnosti CP jsou generovány faktorovým modelem.

CP	$\mathbf{b_{i\,1}}$	$\mathbf{b_{i\,2}}$	$\mathbf{r_i}$
A	0,50	0,80	6,2
B	1,50	1,40	8,6
$\mathbf{r_f}$	0,00	0,00	4,0

a) Jestliže budeme investovat 1 000,- Kč a prodáme CP **B** za 500,- Kč a nakoupíme za 1 500,- Kč CP **A**, jaká bude citlivost portfolia na tyto dva faktory?
b) Jestliže si vypůjčíme 1 000, Kč na nákup bezrizikového aktiva a proporce pro ostatní CP zůstanou jako v případě a), jaká bude citlivost tohoto portfolia na uvedené dva faktory? Jaká je očekávaná výnosnost tohoto portfolia?
c) Jaká je očekávaná výnosnost portfolia vytvořeného za b)?
d) Jaká je očekávaná prémie výnosnosti druhého faktoru?

Úloha 5

Předpokládejme, že vztah mezi očekávanými nominálními výnosnostmi, hodnotami beta a citlivostmi na inflaci byl odhadnut takto:

$$\mathbf{ENr_i = 6{,}0 + 4{,}0.\beta_i - 0{,}2.h_i}$$

Akcie **A** má $\mathbf{\beta_A = 1}$ a neposkytuje žádné zajištění před inflací.

a) Jaká by měla být očekávaná výnosnost? Akcie B má $\mathbf{\beta_B = 1{,}10}$
b) Jak citlivá by měla být její výnosnost na inflaci, aby se její odpovídající očekávaná výnosnost rovnala výnosnosti akcie A

8.7 Empirické pravidelnosti

Řada výzkumných pracovníků odhalila jisté ***empirické pravidelnosti*** v chování akcií. Zjistilo se, že určité rozdíly mezi výnosnostmi akcií se objevují pravidelně. Z CAPM například vyplývá, že různé cenné papíry by měly mít různé výnosnosti, protože různé cenné papíry mají různé beta. Zajímavé pravidelnosti zjištěné dlouhodobým výzkumem byly:

- vliv velikosti firmy
- vliv ledna
- vliv týdne

Vliv velikosti firmy

Velikost firmy se dá změřit vynásobením tržní ceny její kmenové akcie počtem akcií v oběhu.

Byly vypočteny výnosnosti „portfolia malých firem“, které byly vybrány do portfolia a drženy po dobu pěti let. Tento proces se opakoval na burze cenných papírů (NYSE) v USA od roku 1925 - 1983. V průměru měly malé firmy lepší výkonnost než firmy větší. Z toho neplyne, že investiční strategie malých firem dominovala nad investiční strategií firem větších. Dokázalo se, že výnosnosti portfolia malých firem byly v průměru o 5% vyšší než u firem velkých, ale cenné papíry však značně rizikové (až 32,35%) proti velkým firmám, kde toto riziko bylo pouze 20,62%.

Sezónnost výnosnosti akcií

- **vliv ledna**

Neexistuje žádný důvod očekávat, že výnosnosti akcií budou v některých měsících vyšší než v jiných měsících. Z prováděného výzkumu však vyplynulo, že průměrná lednová výnosnost byla vyšší než průměrné výnosnosti v jiných měsících. Přestože počátkem století byla průměrná výnosnost malá, ukazuje se v poslední době asi o 3% vyšší než průměrná výnosnost od února do prosince.

- **vliv dne v týdnu**

Předpokládalo se, že očekávané denní výnosnosti akcií jsou stejné pro všechny dny v týdnu. Zjistilo se však, že průměrné pondělní výnosnosti byly značně nižší než v kterémkoliv dni v týdnu. Navíc byly průměrné výnosnosti v pondělí negativní. Výnosnost akcie v daném dni v týdnu se vypočítá:

$$\mathbf{r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + D_t}{P_{t-1}}} \qquad (8.31)$$

kde $\mathbf{P_t}$ a $\mathbf{P_{t-1}}$ jsou závěrečné kurzy ve dnech **t** a **t-1** $\mathbf{D_t}$ je hodnota všech dividend vyplacených v den **t**. Pondělní změna kurzu akcie ve skutečnosti představuje změnu kurzu ***během víkendu a pondělí.*** Toto zjištění bylo příčinou toho, že tento vliv dne v týdnu byl nazván „***vliv víkendu***“ a vedlo k dalšímu zkoumání denních výnosností cenných papírů. Jednou z metod zkoumání vlivu víkendu je rozdělení denních výnosností do dvou částí:

1) výnosnost od uzavření předchozího dne do otevření běžného dne a nazývá se ***„výnosnost za dobu neobchodování“***. Používá poslední kurz předchozího dne (***závěrečný***) a kurz prvního obchodu běžného dne (***otevírací***).

2) výnosnost od otevření běžného dne do uzavření běžného dne a nazývá se ***„výnosnost za dobu obchodování“***. Ta používá první a poslední obchodní kurzy v daném dni, jako počáteční a koncové ceny.

8.7.1 Souhrn empirických pravidelností

Závěr pro činnost investora z těchto empirických pravidelností:

1) investoři, kteří chtějí kupovat akcie by se měli vyhnout tomu, aby nakupovali v pondělí časně ráno. V jiných dnech by to měli provést jak nejdříve je to možné
2) investoři, kteří chtějí prodat akcie, by to měli udělat pozdě v pátek. Nebude-li to možné, měli by čekat alespoň 45 minut po otevření kromě pondělí
3) mají-li se kupovat malé firmy, mělo by k tomu dojít koncem prosince nebo o něco dříve
4) mají-li se malé firmy prodávat, mělo by k tomu dojít asi v polovině ledna nebo později

5) mají-li se nakoupit velké firmy, mělo by se to provést počátkem února nebo o něco později
6) mají-li se prodat velké firmy, potom by k tomu mělo dojít koncem prosince nebo o něco dříve

8.7.2 Empirické a principiální faktory

Faktory stanovené empiricky se mohou od principiálních (skutečných) lišit. Dochází k tomu i v případě, kdy se vyberou podstatné hodnoty a měří se bez chyb.
Předpokládejme, že faktorový model má tvar:

$$\mathbf{r_i = a_i + b_{i_1}.\overline{F}_1 + b_{i_2}.\overline{F}_2 + ... + b_{i_K}.\overline{F}_K + e_i} \qquad (8.32)$$

Z předpokladu, že poslední člen má nulovou očekávanou hodnotu plyne:

$$\mathbf{\overline{r}_i = a_i + b_{i_1}.\overline{F}_1 + b_{i_2}.\overline{F}_2 + ... + b_{i_K}.\overline{F}_K} \qquad (8.33)$$

kde: $\mathbf{\overline{r}_i}$ - očekávaná hodnota výnosnosti cenného papíru **i**, $\mathbf{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_K}$ jsou očekávané hodnoty faktorů 1, 2, ..., K.
Z teorie stanovení cen arbitráží vyplývá:

$$\mathbf{\overline{r}_i = r_f + \lambda_1.b_{i_1} + \lambda_2.b_{i_2} + ... + \lambda_K.b_{i_K}}$$

kde: $\mathbf{r_f}$ - bezriziková úroková sazba, $\mathbf{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_K}$ jsou očekávané výnosnosti prémií faktorů $\mathbf{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_K}$.
Protože obě rovnice určují očekávanou výnosnost cenného papíru, musí se obě pravé strany rovnice rovnat:

$$\mathbf{a_i + b_{i_1}.\overline{F}_1 + b_{i_2}.\overline{F}_2 + ... + b_{i_K}.\overline{F}_K = r_f + \lambda_1.b_{i_1} + \lambda_2.b_{i_2} + ... + \lambda_K.b_{i_K}}$$

Z toho:

$$\mathbf{a_i = r_f + b_{i_1}.(\lambda_1 - \overline{F}_1) + b_{i_2}.(\lambda_2 - \overline{F}_2) + ... + b_{i_K}.(\lambda_K - \overline{F}_K)} \qquad (8.34)$$

Dosazením této hodnoty do první rovnice obdržíme:

$$\begin{aligned}\mathbf{r_i} &= \mathbf{r_f + b_{i_1}.(\lambda_1 + F_1 - \overline{F}_1) + b_{i_2}.(\lambda_2 + F_2 - \overline{F}_2) + ... +} \\ &\mathbf{+ b_{i_K}.(\lambda_K + F_K - \overline{F}_K) + e_i}\end{aligned} \qquad (8.35)$$

Provedeme-li regresi výnosností cenných papírů podle důležitých vlastností (atributů), budou se získané ***„ empirické faktory“*** rovnat výrazům v závorkách

$$\begin{aligned}\mathbf{f_1} &= \mathbf{\lambda_1 + (F_1 - \overline{F}_1)} \\ \mathbf{f_2} &= \mathbf{\lambda_2 + (F_2 - \overline{F}_2)} \\ &\vdots \qquad \vdots \\ \mathbf{f_K} &= \mathbf{\lambda_K + (F_K - \overline{F}_K)}\end{aligned} \qquad (8.36)$$

kde: $\mathbf{f_1, f_2, ..., f_K}$ jsou empirické faktory 1, 2, ..., K.

9. Pasivní správa obligačního portfolia

V portfoliu cenných papírů mají obligace mimořádné postavení, které vyplývá z jejich poměrně velké likvidity. Oproti bankovním vkladům přinášejí obligace obvykle vyšší výnosy a oproti akciím jsou méně rizikové. Právě k vůli tomu, že obligace jsou ve srovnání s akciemi poměrně málo rizikové a výplata kupónových výnosů není tolik závislá na hospodaření firmy, jako v případě dividend u akcií,

nemusí být použití standardních metod teorie portfolia příliš vhodné právě při správě portfolií složených z obligací. Nejbezpečnějším typem dluhopisů (vlastně i nejbezpečnějším typem investice) jsou státní dluhopisy emitované vládami. Za méně bonitní lze považovat dluhopisy emitované městy a firemní dluhopisy. Je však nutné podotknout, že dluhopisy velkých nadnárodních firem bývají považovány za dluhopisy bonitnější než dluhopisy státní, až na některé výjimky nejrozvinutějších světa. Na konci tohoto pomyslného žebříčku stojí dluhopisy emitované soukromými osobami (např. směnky).
Jestliže zvažujeme možnost použití teorie obligačních portfolií, je nutné zvažovat jeho použití v následujících situacích:

- správa investičních a podílových fondů, které jsou zaměřeny výhradně na investování do dluhopisů
- správa obligačních portfolií, kdy investoři v budoucnu musí ze své investice do portfolia získat tok důchodů (dividend). Takovým příkladem může být portfolio penzijního fondu, aby klienti dostávali v budoucnu v sjednaných termínech „pojištěnou částku“ jako přilepšení k starobnímu důchodu.
- řízení likvidity obchodní banky s cílem zamezit nedostatku likvidity banky, kdy je nutné zajistit dostatek hotovosti v přesně stanovených termínech, neboť banka musí dostát svým závazkům vůči klientům (vyplatit např. částky termínovaných vkladů).

Podobně jako u akciových portfolií můžeme i u obligačních portfolií uplatňovat určité strategie:

1. ***Pasivní strategii*** - kdy investor jednorázově sestaví obligační portfolio požadovaných vlastností, a po dobu trvání portfolia se o něj nestará. V okamžiku realizace pak získá např. důchody z prodeje dluhopisů (bondů), které zůstanou v portfoliu, a navíc ještě výnosy z reinvestovaných kupónových plateb.
2. ***Aktivní strategii*** - kdy investor průběžně vyhledává vhodné investiční příležitosti po celou dobu trvání portfolia. To znamená, že prodává a nakupuje obligace po celou dobu trvání portfolia.

Poznámka: *Dále se zaměříme výhradně na pasivní strategii obligačního portfolia. Budeme dále předpokládat, že pracujeme s obligacemi, z nich každá vyplácí kupón pouze na konci každého kalendářního roku (to znamená vždy 31.12.) a obligace je zakoupena vždy na začátku 1. roku (to znamená vždy 1.1.). Dobu splatnosti obligace budeme předpokládat v letech n. Poslední splátka tedy bude 31.12. v n-tém roku. Získané kupóny můžeme reinvestovat výhradně formou jednoročních bankovních vkladů. Tedy termínovaný roční vklad. Úroky se budou připisovat jedenkrát ročně vždy k 31.12. Dále je nutno upozornit, že obligační portfolio budeme sestavovat na m-let, a to tak, že obligace nakoupíme na počátku prvního roku a na konci m.tého roku nás bude zajímat tržní cena obligací v portfoliu a celková naspořená částka vzniklá pravidelným ukládáním kupónových plateb na termínované vklady s dobou trvání vkladu jeden rok.*

Používaná terminologie:

Doba splatnosti obligace - *délka období (nejčastěji v létech),* během nichž musí dlužník splatit věřiteli celou dlužnou částku a navíc vzniklé úrokové platby.
Nominální cena obligace - je částka, kterou musí splatit dlužník věřiteli, to znamená majiteli obligace.
Kupónová splátka - je částka, která je pravidelně splácená držiteli obligace.
Kupónová míra - je počet procent z nominální ceny obligace, které držitel obligace dostává formou pravidelné kupónové splátky.
Výnos do doby splatnosti - je diskontní faktor, to znamená úroková sazba, při níž se diskontovaný tok výnosů z obligace rovná současné tržní ceně obligace.

Jestliže zvažujeme možnost použití teorie obligačních portfolií, je nutné zvažovat jeho použití v následujících situacích:

- správa investičních a podílových fondů, které jsou zaměřeny výhradně na investování do dluhopisů
- správa obligačních portfolií, kdy investoři v budoucnu musí ze své investice do portfolia získat tok důchodů (divident). Takovým příkladem může být portfolio penzijního fondu, aby klienti dostávali v budoucnu v sjednaných termínech „pojištěnou částku“ jako přilepšení k starobnímu důchodu.
- řízení likvidity obchodní banky s cílem zamezit nedostatku likvidity banky, kdy je nutné zajistit dostatek hotovosti v přesně stanovených termínech, neboť banka musí dostát svým závazkům vůči klientům (vyplatit např. částky termínovaných vkladů).

Základní vzorce pro výpočet tržní ceny obligace:

Teoretická cena obligace:

$$\mathbf{P_k(i)} = \sum_{t=1}^{N_k} \frac{S_{k_t}}{(1+i)^t} \qquad (9.1)$$

i - skutečný roční výnos do doby splatnosti
$\mathbf{N_k}$ - doba splatnosti **k**-té obligace
$\mathbf{S_{k_t}}$ - částka, kterou dostane věřitel od dlužníka na konci **t**-tého roku (t=1,2,3,..., N_k).

Pro případ, že roční výnos do doby splatnosti z obligací každoročně kolísá, a že platby, které získáme můžeme reinvestovat vždy pouze na jeden rok dopředu (časové období), bude cena obligace:

$$\mathbf{P_{k_{N_k}}(i)} = \sum_{t=1}^{N_k} \frac{S_{k_t}}{\prod_{r=1}^{t} (1+i_r)} \qquad (9.2)$$

Zaveďme ještě tyto symboly:

$\mathbf{T_k}$ - tržní cena k-té obligace
$\mathbf{H_k}$ - rozdíl mezi tržní a teoretickou cenou (vypočítanou)

Tedy: $\mathbf{H_k = T_k - P_k(i)}$ (9.3)

Bude-li $\mathbf{P_k(i) < T_k}$ bude k-tý dluhopis na trhu předražen a investor zaplatí jakousi pokutu, že do dané obligace investoval.
Naopak, je-li $\mathbf{P_k(i) > T_k}$ bude na trhu dluhopis podceněn. $\mathbf{H_k}$ je pak nadměrný zisk investora z této obligace.

9.1 Tvorba budoucích krátkodobých (ročních) výnosů do doby splatnosti obligace

Časová struktura výnosů do doby splatnosti

Svoje úspory můžeme uložit různými způsoby, které jsou pro nás stejně výhodné. Předpokládejme, že kupónové platby z držené obligace budeme reinvestovat a investorovi se připíše za dobu vkladu (například termínovaného vkladu) úrok na konci období, potom reinvestování výnosu obligace do doby splatnosti přináší zvýšený výnos z této obligace do doby splatnosti.. Jestliže tento vklad provedeme na začátku období **z** a vybereme jej na konci období **k**, přičemž vycházíme z tvrzení, že současný výnos do doby splatnosti p.a. z dlouhodobých dluhopisů (vkladů) je tvořen průměrem budoucích krátkodobých výnosů do doby splatnosti p.a., potom pro daný úrok bude platit:

$\mathbf{i_{1k}}$ - index **1-**úrokovací období 1 rok, **k**-konec úrokovacího období
$\mathbf{e_{zk}}$ **-** index **z**- začátek úrokovacího období v budoucnu a $\mathbf{z > 1}$
k - konec úrokovacího období a $\mathbf{k \geq z}$
$\mathbf{S_{zk}}$ - uložená částka na termínovaný vklad, kde **z** je začátek úrokovacího období a **k** konec úrokovacího období

$\mathbf{\{S_{z,k} | S_{k+1,b}\}}$ - investor si na počátku období **z** uloží částku **S** a na konci období **k** si tuto zúročenou částku vybere a reinvestuje na začátku období **k+1**. Na konci období **b** tento vklad vybere.

Příklad:

i_{14} - uložíme termínově v 1. dnu 1. roku částku a na konci 4. roku ji vybereme.
Výnos do doby splatnosti z termínového vkladu bude činit i_{14} %

e_{24} - očekávaný výnos do doby splatnosti (p.a.) z tříletého termínového vkladu uloženého na začátku 2. období (roku) a vyzvednutého na konci 4. roku.

Výnosy z takto reinvestovaného kapitálu pak budou:

$$\mathbf{i} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{i}_{1k} \text{ , kde } \mathbf{i}_{1k} - \mathbf{i}_{1,k-1} < \mathbf{i}_{1j} - \mathbf{i}_{1,j-1}$$

Pro termínované bankovní vklady platí:

$$\{S_{15}\} = \left\{ \underbrace{S_{12} | S_{33} | S_{45}}_{a} \right\} = \left\{ \underbrace{S_{13} | S_{44} | S_{55}}_{b} \right\} = \left\{ \underbrace{S_{12} | S_{35}}_{c} \right\}$$

1) Při jednoduchém úročení pak platí:

a) $$i_{15} = \frac{2.i_{12} + e_{33} + 2.e_{45}}{5}$$

b) $$i_{15} = \frac{3.i_{13} + e_{44} + e_{55}}{5}$$

c) $$i_{15} = \frac{2.i_{12} + 3.e_{35}}{5}$$

Současné dlouhodobé výnosy do doby splatnosti p.a. jsou tvořeny aritmetickým průměrem současných a budoucích výnosů do doby splatnosti.

2) Při složeném úročení pak platí:

a) $$(1 + i_{15})^5 = (1 + i_{12})^2 . (1 + e_{33})^1 . (1 + e_{45})^2$$

b) $$(1 + i_{15})^5 = (1 + i_{13})^3 . (1 + e_{44})^1 . (1 + e_{55})^1$$

c) $$(1 + i_{15})^5 = (1 + i_{12})^2 . (1 + e_{35})^3$$

Poznámka:
Logaritmováním se dá složené úročení převést na úročení jednoduché. Při odhadování budoucích výnosů je nutno si dávat bedlivý pozor, aby hledané výnosy bylo možno ze soustavy vypočítat.

Složené úročení můžeme obecně zapsat:

$$
\begin{aligned}
(1+i_{11}).(1+e_{22}).(1+e_{33}) \cdots (1+e_{nn}) &= (1+i_{1n})^n \\
(1+i_{12})^2.(1+e_{33}) \cdots (1+e_{nn}) &= (1+i_{1n})^n \\
\vdots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
(1+i_{1n-1})^{n-1}.(1+e_{nn}) &= (1+i_{1n})^n
\end{aligned} \tag{9.4}
$$

Zavedeme-li substituci:

$$R_k = \ln(1+i_{1k})^k = k.\ln(1+i_{1k}) \tag{9.5}$$

$$E_k = \ln(1+e_{kk})\text{, kde } k = 2, 3, 4, \ldots, n \tag{9.6}$$

Takže: $E_2 = \ln(1+e_{22})$; $E_3 = \ln(1+e_{33})$; $R_1 = \ln(1+i_{11})$; $R_4 = 4.\ln(1+i_{44})$

Pomocí této substituce můžeme soustavu rovnic přepsat do tvaru:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}
.
\begin{bmatrix} E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
R_n & - & R_1 \\
R_n & - & R_2 \\
R_n & - & R_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
R_n & - & R_{n-1}
\end{bmatrix}
$$

Neznámé v rovnici jsou hodnoty E_k pro k = 2, 3, …, n.

K levé matici vypočítáme matici inverzní a obdržíme:

$$
\begin{bmatrix} E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ \vdots \\ E_{n-1} \\ E_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
.
\begin{bmatrix}
R_n & - & R_1 \\
R_n & - & R_2 \\
R_n & - & R_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
R_n & - & R_{n-2} \\
R_n & - & R_{n-1}
\end{bmatrix}
\tag{9.7}
$$

Z dané soustavy vypočítáme neznámé E_k.

$$E_k = \ln(1+e_{kk}) = R_k - R_{k-1} = \ln(1+i_{1k})^k - \ln(1-i_{k-1})^{k-1}$$

Z uvedeného výrazu pak vypočítáme:

$$\ln(1+e_{kk}) = \ln\frac{(1+i_{1k})^k}{(1+i_{1k-1})^{k-1}} \tag{9.8}$$

Daný výraz odlogaritmujeme a obdržíme:

$$1+e_{kk} = \frac{(1+i_{1k})^k}{(1+i_{1k-1})^{k-1}} = \left(\frac{1+i_{1k}}{1+i_{1k-1}}\right)^{k-1}.(1+i_{1k})$$

Z toho:

$$e_{kk} = \left(\frac{1+i_{1k}}{1+i_{1k-1}}\right)^{k-1}.(1+i_{1k}) - 1\text{, } k = 2, 3, \ldots, n \tag{9.9}$$

Tento odhad krátkodobých výnosů do doby splatnosti je však poněkud nadhodnocen. Proto provedeme určitou modifikaci tohoto výrazu a potom dostaneme:

$$\frac{e_{Sk}}{e_{Mk}} = \frac{e_{kk}}{\bar{r}_{Sk}} \Rightarrow \bar{r}_{Sk} = \frac{e_{kk}.e_{Mk}}{e_{Sk}} \qquad (9.10)$$

kde:

e_{Sk} - skutečný roční výnos do doby splatnosti v minulosti

e_{Mk} - odhad ročního výnosu do doby splatnosti v minulosti

e_{kk} - odhadovaný roční výnos do doby splatnosti v současnosti pro budoucí období

Uvedený algoritmus lze použít i pro jiná úrokovací období, na která můžeme reinvestovat kupónové platby z dluhopisů. Je zřejmé, že krátkodobé předpovídané výnosy, pokud bude výnosová křivka rostoucí, budou vždy růst oproti současným s dobou splatnosti a naopak. Podle očekávání je zřejmé, že krátkodobé výnosy do doby splatnosti proti současným očekávaným, nejpravděpodobněji porostou (budou vyšší).

9.2 Sestavování obligačních portfolií

Cílem sestavování obligačních portfolií je nakoupit takovou kombinaci obligací, aby v okamžiku realizace portfolia byl co největší součet částek, které lze získat prodejem zbylých obligací za zůstatkovou cenu a částka z přijatých kupónových plateb naspořená na bankovních vkladech. Tento součet budeme nazývat ***realizační cenou portfolia.***

Realizační cena obligačního portfolia závisí na skutečných ročních výnosech do doby splatnosti obligací tvořících toto portfolio.

Jestliže investor chce svůj kapitál vložit do nákupu ***jednoho typu dluhopisu***, získaný dluhopis držet po dobu **m** období (let), a částky získané z kupónových plateb bude reinvestovat při ročním výnosu i do doby splatnosti, bude majetek investora na konci **m**-tého období (ekvivalentně na začátku **m+1**-ního období) tvořen součtem:

$$P_k(i).(1+i)^m = (1+i)^m.\sum_{t=1}^{N_k} \frac{S_{k_t}}{(1+i)^t} = \frac{S_{k_1}.(1+i)^m}{(1+i)^1} + \frac{S_{k_2}.(1+i)^m}{(1+i)^2} + $$

$$+ \cdots + \frac{S_{k_m}.(1+i)^m}{(1+i)^m} +$$

$$+ \frac{S_{k_{m+1}}.(1+i)^m}{(1+i)^{m+1}} + \frac{S_{k_{m+2}}.(1+i)^m}{(1+i)^{m+2}} + \cdots + \frac{S_{k_{N_k}}.(1+i)^m}{(1+i)^{N_k}} \qquad (9.11)$$

Po úpravě této rovnice obdržíme:

$$P_k(i).(1+i)^m = \{\text{úspory}\} + \{\text{zůstatková cena}\} =$$

$$= \underbrace{\left\{S_{k_1}.(1+i)^{m-1} + S_{k_2}.(1+i)^{m-2} + \cdots + S_{k_m}.(1+i)^0\right\}}_{\text{celkem naspořená částka na konci m-tého období}} + \underbrace{\frac{S_{k_{m+1}}}{(1+i)^1} + \frac{S_{k_{m+2}}}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{S_{k_{N_k}}}{(1+i)^{N_k-m}}}_{\text{zůstatková cena obligace na konci m-tého období (doba splatnosti} \geq m)} \qquad (9.12)$$

Investor však na trhu neplatí pouze teoretickou cenu, ale navíc ještě částku H_k , kde $H_k = T_k - P_k(i)$. Je-li $H_k > 0$ potom výraz $H_k.(1+i)^m$ bude určovat, o jakou částku bude mít investor v okamžiku realizace portfolia naspořeno méně, než kdyby koupil obligaci pouze za teoretickou (vypočítanou cenu). Je-li $H_k < 0$, potom výraz $H_k.(1+i)^m$ bude určovat, o jakou částku bude mít investor v okamžiku realizace portfolia naspořeno více, než kdyby koupil obligaci pouze za teoretickou (vypočítanou cenu).

V okamžiku vzniku portfolia investor očekává, že roční výnos do doby splatnosti obligace bude po celou dobu splatnosti k-té obligace v relativním vyjádření **y**, a potom realizační cena portfolia bude:

$$\left[\mathbf{P_k(y) + H_k}\right]\mathbf{.(1+y)^m} \qquad (9.13)$$

Předpokládejme však, že ihned po nákupu k-té obligace dojde vlivem působení mikroekonomických nebo makroekonomických změn ke zvýšení nebo snížení předpokládaného ročního výnosu do doby splatnosti - uvažujme ve velikosti **h**. To znamená, že investorem předpokládané **y** nabývá nové hodnoty **y+h**. Tuto novou úroveň, skutečných výnosů do doby splatnosti si označíme **i = y + h**. Snahou investora bude zjistit, jaké vlastnosti musí mít obligace, aby rozdíl (odchylka) mezi skutečně dosaženou realizační cenou portfolia a mezi předpokládanou cenou portfolia byl co nejmenší. Tuto úlohu můžeme definovat vztahem:

$$\left[\mathbf{P_k(y+h) + H_k}\right]\mathbf{.(1+y+h)^m} - \left[\mathbf{P_k(y) + J_k}\right]\mathbf{.(1+y)^m} \Rightarrow \mathbf{min} \qquad (9.14)$$

$$\left[\mathbf{P_k(y+h) + H_k}\right]\mathbf{.(1+y+h)^m} - \left[\mathbf{P_k(y) + J_k}\right]\mathbf{.(1+y)^m} \Rightarrow \mathbf{min}$$

Jestliže použijeme náš vztah: **i = y + h** potom bude:

$$\left[\mathbf{P_k(i) + H_k.(1+i)^m}\right]\mathbf{.(1+i)^m} - \left[\mathbf{P_k(y) + J_k}\right]\mathbf{.(1+y)^m} \Rightarrow \mathbf{min}$$

$\mathbf{J_k}$ přitom představuje rozdíl mezi skutečnou tržní cenou zaplacenou investorem a předpokládanou teoretickou cenou, tedy: $\mathbf{J_k = T_k - P_k(y)}$. Je zřejmé, že předpokládaná realizační cena obligačního portfolia $\left[\mathbf{P_k(y) + J_k}\right]\mathbf{.(1+y)^m}$, nezávisí na skutečném výnosu do doby splatnosti **(y + h)**, a tudíž ani na změně **h**. Dále je zřejmé, že pro řešení této investorovy úlohy stačí vyřešit její extrémy, přičemž hledáme takové **h**, aby platilo:

$$\mathbf{P_k(i).(1+i)^m + H_k.(1+i)^m \Rightarrow min} \qquad (9.15)$$

Z diferenciálního počtu víme, že:

$$\frac{\partial \mathbf{P_k(y+h)}}{\partial \mathbf{i}} = \frac{\partial \mathbf{P_k(i)}}{\partial \mathbf{i}} = \frac{\partial \mathbf{P_k(i)}}{\partial \mathbf{i}} \cdot \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial \mathbf{P_k(i)}}{\partial \mathbf{i}}\mathbf{.1} = \frac{\partial \mathbf{P_k(i)}}{\partial \mathbf{i}}$$

neboť $\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{1}$ (9.16)

S využitím nutných podmínek pro extrém pak bude:

$$\frac{\partial \mathbf{P_k(i)}}{\partial \mathbf{i}}\mathbf{.(1+i)^m + P_k(i).m.(1+i)^{m-1} + H_k.m.(1+i)^{m-1} = 0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P_k(i)}}{\partial \mathbf{i}}\mathbf{.(1+i)^m + m.(1+i)^{m-1}.}\left[\mathbf{P_k(i) + H_k}\right]\mathbf{= 0}$$

$$\mathbf{m} = -\frac{\frac{\mathbf{P_k(i)}}{\mathbf{i}}\mathbf{.(1+i)^m}}{\mathbf{(1+i)^{m-1}.}\left[\mathbf{P_k(i) + H_k}\right]} = -\frac{\frac{\mathbf{P_k(i)}}{\mathbf{i}}\mathbf{.(1+i)}}{\mathbf{P_k(i) + H_k}} = -\frac{\frac{\mathbf{P_k(i)}}{\mathbf{i}}\mathbf{.(1+i)}}{\mathbf{T_k}}$$

kde: $\mathbf{T_k = P_k(i) + H_k}$ (9.17)

Zaveďme označení prvního výrazu rovnice $\mathbf{D_{k_T}}$, kde výraz $\mathbf{H_k}$ nám udává chování investora při nákupu obligace. Jestliže bude $\mathbf{H_k > 0}$, jedná se o obligaci předraženou na trhu a investor zaplatí jakousi pokutu za to, že že do tohoto aktiva investoval. Je-li $\mathbf{H_k < 0}$, jedná se o obligaci na trhu podceněnou a investor při jejím nákupu získává určitou odměnu za to, že do tohoto aktiva investoval. Je-li $\mathbf{H_k = 0}$, jedná se o obligaci, kdy teoretická cena **k**-tého dluhopisu je shodná s tržní cenou tohoto dluhopisu.

Potom můžeme daný výraz zapsat: $\mathbf{D_{k_T}(i) = -\dfrac{\dfrac{P_k(i)}{i}.(1+i)}{P_k(i)+H_k}}$, kde ve jmenovateli je teoretická cena dluhopisu a pokuta nebo odměna investora, která zmenší nebo zvýší teoretickou cenu k-té obligace. Jestliže bude $\mathbf{H_k = 0}$, jde o situaci kdy teoretická cena **k**-tého dluhopisu je shodná s tržní cenou tohoto dluhopisu.

Potom se bude výraz modifikovat do tvaru: $\mathbf{D_{k_M}(i) = -\dfrac{\dfrac{P_k(i)}{i}.(1+i)}{P_k(i)}}$ a nazýváme jej ***modifikovaná durace***.

Výraz $\mathbf{D_{k_M}(i) = -\dfrac{\dfrac{P_k(i)}{i}.(1+i)}{P_k(i)}}$.

Durace potom bude:

$$\mathbf{D_k(i) = -\frac{\dfrac{P_k(i)}{i}}{P_k(i)}} \qquad (9.18)$$

Pojem durace rozvinul Frederick Macaulay. Durace jako číslo shrnuje vliv všech faktorů, které ovlivňují cenovou citlivost dluhopisu se změnou výnosu do doby splatnosti. Durace závisí na třech základních faktorech:

- době splatnosti
- kupónové míře
- výnosu do doby splatnosti

Jmenovatel durace počítá cenu dluhopisu, to znamená součet současných hodnot každého hotovostního toku (cash-flow), zatímco čitatel počítá součet současných hodnot každého hotovostního toku s tím, že každý hotovostní tok se váží dobou výplaty hotovostního toku. Durace je tedy váženým průměrem současných hodnot hotovostního toku (kuponů včetně splacení nominální hodnoty), kde váhovým faktorem je doba mezi současností a hotovostním tokem.
Modifikovaná durace nám představuje průměrnou dobu trvání toku plateb z k-té obligace.

Potom se bude výraz modifikovat do tvaru: $\mathbf{D_{k_M}(i) = -\dfrac{\dfrac{P_k(i)}{i}.(1+i)}{P_k(i)}}$ a nazýváme jej ***modifikovaná durace***.

Výraz $\mathbf{D_{k_M}(i) = -\dfrac{\dfrac{P_k(i)}{i}.(1+i)}{P_k(i)}}$ (9.19)

Durace potom bude:

$$\mathbf{D_k(i) = -\frac{\dfrac{P_k(i)}{i}}{P_k(i)}} \qquad (9.20)$$

Pojem durace rozvinul Frederick Macaulay. Durace jako číslo shrnuje vliv všech faktorů, které ovlivňují cenovou citlivost dluhopisu se změnou výnosu do doby splatnosti. Durace závisí na třech základních faktorech:

- době splatnosti
- kupónové míře
- výnosu do doby splatnosti

Jmenovatel durace počítá cenu dluhopisu, to znamená součet současných hodnot každého hotovostního toku (cash-flow), zatímco čitatel počítá součet současných hodnot každého hotovostního toku s tím, že každý hotovostní tok se váží dobou výplaty hotovostního toku. Durace je tedy váženým průměrem současných hodnot hotovostního toku (kuponů včetně splacení nominální hodnoty), kde váhovým faktorem je doba mezi současností a hotovostním tokem.
Modifikovaná durace nám představuje průměrnou dobu trvání toku plateb z **k**-té obligace.

9.3 Sestavování portfolia z více obligací

V běžné praxi nemá investor obvykle možnost si vybrat na trhu s cennými papíry obligaci, která má při daných ročních výnosech do doby splatnosti jím požadované vlastnosti (pro něj vhodná obligace není momentálně na trhu nebo se vůbec neobchoduje atd.) Proto investorovi nezbývá nic jiného, než sestavit portfolio z více obligací, které jsou na daném trhu obchodované. Omezíme se na držení obligačního portfolia, u kterých se výnos do doby splatnosti nebude měnit. Potom tržní cena obligačního portfolia sestaveného z **m** obligací bude:

$$\mathbf{TC_p = \sum_{j=1}^{m} X_j \left[P_{jn_j}(i) + H_j\right] = \sum_{j=1}^{m} X_j . T_j} \qquad (9.21)$$

kde:

$\mathbf{X_j}$ - podíl (váha) obligace v portfoliu, přičemž platí $\mathbf{\sum_{j=1}^{n} X_j = 1}$ a zároveň $\mathbf{X_j} \geq 0$

(nezápornost však požadovat nemusíme)

$\mathbf{T_j}$ - skutečná tržní cena obligace, kde $\mathbf{T_j = P_j(i) + H_j}$

$\mathbf{P_{jn_j}(i)}$ - teoretická cena **j**-té obligace s dobou splatnosti **n**

$\mathbf{H_j}$ **-** udává rozdíl mezi skutečnou a teoretickou cenou obligace, neboť

$$\mathbf{H_j = T_j - P_j(i) \Rightarrow T_j = H_j + P_j(i)}$$

Připomeňme si ještě, že platí : $\mathbf{D_{T_j} = -\dfrac{P_j'(i)}{T_j} = -\dfrac{\frac{\partial P_j(i)}{\partial i}}{T_j}}$.

Potom z nutné podmínky pro extrém portfolia, které je složeno pouze z jednoho dluhopisu vyplývá, že nutná podmínka pro extrém portfolia složeného z **n** obligací bude:

$$\mathbf{D_T(i) = -\frac{X_1.P_1'(i) + X_2.P_2'(i) + X_3.P_3'(i) + \cdots + X_n.P_n'(i)}{X_1.T_1(i) + X_2.T_2(i) + X_3.T_3(i) + \cdots + X_n.T_n(i)} = q(i)} \qquad (9.22)$$

Tuto nutnou podmínku pro extrém, můžeme též zapsat:

$$\mathbf{\sum_{j=1}^{n} X_j.T_j.\left[q(i) - D_{T_j}(i)\right] = 0} \qquad (9.23)$$

Abychom nalezli realizační cenu daného portfolia, při daném skutečném ročním výnosu do doby splatnosti v prvním roce trvání, budeme muset vyřešit soustavu rovnic:

$$\mathbf{\sum_{j=1}^{n} X_j.T_j.\left[q(i) - D_{T_j}(i)\right] = 0} \qquad (9.24)$$

$$\mathbf{\sum_{j=1}^{n} X_j = 1}\ ,\ \ \mathbf{X_j \geq 0} \ \text{ pro } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Příklad:
Mějme dvě obligace $\mathbf{O_1}$ a $\mathbf{O_2}$. Předpokládejme, že se po dobu držení těchto obligací nebudou měnit roční výnosy do doby splatnosti, která bude z každého dluhopisu **10%**. Máme sestavit portfolio s dobou splatnosti **2** roky nepředpokládáme žádné změny ve velikosti ročních výnosů do doby splatnosti).

Základní hodnoty obligací											
				Toky plateb z obligací na konci roku							
	TC_j	**$TC_j - P_j(i)$**	**$P_j(i)$**	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	P'_j	$D_T(i)$
O_1	1 000	0	1 000	100	100	100	100	1 100	-3790,79	3790,79
O_2	1 000	0	1 000	100	1 100	0	0	0	-1735	1735
i = 10%, O_1 - *splatnost za 10 let*, **O_2 -** *splatnost za 2 roky*										

S použitím vztahů:

$$X_1 = \frac{T_1 . \left[q(i) - D_{T_1} \right]}{V_{12}} \text{ a } X_2 = \frac{T_2 . \left[q(i) - D_{T_2} \right]}{V_{12}}$$

kde: $V_{12} = T_1 . \left[q(i) - D_{T_1} \right] - \left[q(i) - D_{T_2} \right]$ a $D_{T\,k} = - \frac{P'_k(i)}{T_k}$

Vypočítáme váhy (podíly) jednotlivých obligací. Tím obdržíme:

$$X_1 = 0{,}5175$$
$$X_2 = 0{,}4825$$
$$V_{12} = -2025{,}2496$$

Výsledné hodnoty portfolia								
	Podíl aktiv	T_j	$P_j(i)$	*Tok plateb z obligací*				
				1.	2.	3.	4.	5.
O_1	0,5175	482,538	482,538	48,254	48,254	48,254	48,254	530,792
O_2	0,4825	517,462	517,462	51,746	569,208	0	0	0

Tím vzniklo portfolio, jehož realizační cena bude poměrně málo citlivá na odchylky od odhadovaných ročních výnosů do doby splatnosti, kde

TC_j – skutečná cena obligace
$TC_j - P_j(i)$ – rozdíl mezi teoretickou a skutečnou tržní cenou obligace
$P_j(i)$ – teoretická tržní cena obligace

Otázky a problémy k zamyšlení:

Úloha 1

Předpokládejme, že je 1.1. 2000 a že vždy k 1.1. budeme každým rokem dostávat kupónové platby ze státních dluhopisů. Experti odhadli, že lze předpokládat, že výnos do doby splatnosti bude následovný.

Výnos do doby splatnosti státních dluhopisů	
Rok splatnosti	*Roční výnos do doby splatnosti p.a.*
2000	8%
2001	7,5%

2002	8,5%
2003	7,0%
2004	9,5%
2005	8,8%
2006	7,5%
Splatnost všech dluhopisů	**2010**

Úloha

1. *V jednotlivých letech odhadnout budoucí roční výnosy do doby splatnosti*
2. *Odhadnout jaký lze očekávat roční výnos do doby splatnosti dvouletých a čtyřletých termínovaných vkladů, které budou založeny 1.1.2002*
3. *Odhadnout jaký lze očekávat roční výnos z pětiletého termínovaného vkladu založeného též v roce 1.1.2002*
4. *Dále předpokládejme, že státní dluhopisy mají kupónovou míru 10%. Jaké portfolio z těchto vybraných tří dluhopisů setavíme, chceme-li toto portfolio vlastnit po dobu dvou let.*

Literatura

[1] Brada, J.: *Teorie portfolia*, Vysoká škola ekonomická v Praze 1996, ISBN 80-7079-259-0

[2] Čámský, F.: *Teorie portfolia*, Masarykova univerzita-ekonomicko správní fakulta Brno 2001, ISBN 80-210-2509-3

[3] Čámský, F.: *Určování optimálního portfolia,*Finančné trhy, Bratislava 2006 str. 10, ISSN 1336/5711, URL info

[4] Dědek, O.: *Teorie portfolia v prostoru výnosu a rizika,*Politická ekonomie 6, str. 525-550, 1992

[5] Dědek, O.: *Rovnováha na trhu aktiv: modely CAPM a APT, Politická ekonomie 6, str. 795-820 1992*

[6] Janda, K.: *Modelování rizika akciového portfolia,*Finance a úvěr 44, č.9, str.463-471, 1994

[7] Elton, E., J., Gruber, M., J.: :*Modern Portfolio Theory and Investment Analysis,* USA 1995, ISBN 0-471-00743-9

[8] Maňas, M.: *Optimalizační metody pro podnik a trh,* VŠE v Praze 1997, ISBN 80-7079-284-1

[9] Sharpe,G., J., Alexander, G., J.:*Investice,*Victoria Publishing Praha, 1994, ISBN 80-85605-47-3

[10] Sommer, M.: Modely oceňování kapitálových aktiv a český akciový trh, Finance a úvěr 47, Č.5, str. 272-286, 1997

[11] Unčovský, l., Šimkovič, J.: *Vybrané metody z operační analýzy,*VŠE Bratislava1980

Přílohy

Příloha 1

Řešení úlohy, kdy je povolen sell short (prodej nakrátko) s minimalizací rizika ze strany 43

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	λ_1	pravé strany
X_1	688,3	40,8	77,1	-151,3	369,9	592,5	633,5	1	0
X_2	40,8	73,4	20	27,2	-48,3	66	111,9	1	0
X_3	77,1	20	975,7	-327,4	42,4	151,3	357,9	1	0
X_4	-151,3	27,2	27,2	3619,9	-474,1	3,6	98,1	1	0
X_5	369,9	-48,3	42,4	-474,1	3505,3	-344,5	-63,4	1	0
X_6	592,5	66	151,3	3,6	-344,5	2792,6	1439	1	0
X_7	633,5	111,9	357,9	98,1	-63,4	1439	2342,2	1	0
λ_1	1	1	1	1	1	1	1	0	1

Inverzní matice

0,002249	-0,00131563	-2E-06	6,1E-05	-0,0003	-3E-04	-4E-04	0,05
-0,00133	0,002744502	-8E-04	-0,0004	-0,0001	-9E-05	5E-05	0,87
2,01E-05	-0,0009623	0,001	8,4E-05	-4E-05	2E-05	-2E-04	0,06
6,08E-05	-0,00032626	-2E-05	0,00028	2E-05	7E-07	-2E-05	0,02
-0,0003	-0,00011315	-4E-05	1,8E-05	0,0003	8E-05	4E-05	0,03
-0,0003	-9,4802E-05	2E-05	2,4E-06	8E-05	0,0006	-3E-04	0,02
-0,0004	6,76402E-05	-2E-04	-3E-05	4E-05	-3E-04	0,0007	-0
0,053868	0,873574598	0,0551	0,02274	0,0272	0,0151	-0,048	-62

Součin matic

X_1 **0,052658**

X_2	**0,874866**
X_3	**0,061783**
X_4	**0,017162**
X_5	**0,026498**
X_6	**0,015231**
X_7	**-0,048199**
λ_1	**-62,398028**

Příloha 2

Řešení úlohy, kdy je povolen sell short (prodej nakrátko) s minimálním rizikem a očekávaným výnosem 15% ze strany 45

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	λ_1	λ_2	Pravé strany
X_1	688,3	40,8	77,1	-151,3	369,9	592,5	633,5	1	18,5	0
X_2	40,8	73,4	20	27,2	-48,3	66	111,9	1	8,7	0
X_3	77,1	20	975,7	-327,4	42,4	151,3	357,9	1	15,3	0
X_4	-151	27,2	27,2	3619,9	-474,1	3,6	98,1	1	32,5	0
X_5	369,9	-48,3	42,4	-474,1	3505,3	-344,5	-63,4	1	30	0
X_6	592,5	66	151,3	3,6	-344,5	2792,6	1439	1	23,1	0
X_7	633,5	111,9	357,9	98,1	-63,4	1439	2342,2	1	19,4	0
λ_1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
λ_2	18,5	8,7	15,3	32,5	30	23,1	19,4	0	0	15

Inverzní matice

0,002	-8E-04	-7,6E-05	-8E-05	-0,0004	-0,00037	-0,00039	-0,134	0,0181
-0	0,0007	-0,00056	0,00011	0,00026	0,00018	3,2E-05	1,564	-0,0669
-0	-5E-04	0,000976	-3E-05	-0,0001	-4,1E-05	-0,00015	-0,086	0,0144
-0	0,0001	-8,2E-05	0,00016	-7E-05	-6,3E-05	-1,2E-05	-0,143	0,0155
-0	0,0002	-9,1E-05	-7E-05	0,00025	2,9E-05	4,7E-05	-0,094	0,0117
-0	0,0002	-1,8E-05	-7E-05	2,7E-05	0,00053	-0,00027	-0,075	0,0087
-0	2E-05	-0,00015	-2E-05	5E-05	-0,00026	0,00074	-0,033	-0,0015
-0,14	1,5325	-0,03431	-0,1492	-0,0977	-0,07474	-0,04003	-288,2	21,92
0,018	-0,063	0,008579	0,0165	0,01198	0,00862	-0,00073	21,67	-2,1035

Součin matic

X_1	**0,137616**
X_2	**0,560579**
X_3	**0,12934**
X_4	**0,090206**
X_5	**0,081382**
X_6	**0,056214**
X_7	**-0,05534**
λ_1	**40,61842**
$\lambda 2$	**-9,88587**

Příloha 3

Nalezení portfolia s minimálním rizikem (sell short je zakázán) ze strany 53 (Volfova metoda).

		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	λ	z1	z2	z3	z4
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z1	0	-688,30	-40,78	-77,07	151,34	-369,86	-592,47	-633,54	-93,76	-362,59	-140,49	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00
z2	0	-40,78	-73,39	-20,00	-27,18	48,25	-65,98	-111,91	-14,15	9,42	-24,61	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00
z3	0	-77,07	-20,00	-975,67	327,36	-42,40	-151,28	-357,88	57,78	-92,11	-4,44	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00
z4	0	151,34	-27,18	-27,18	-3619,94	474,15	-3,60	-98,13	-289,18	260,47	-199,87	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00
z5	0	-369,86	48,25	-42,40	474,15	-3505,32	344,47	63,40	560,21	206,82	157,50	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z6	0	-592,47	-65,98	-151,28	-3,60	344,47	-2792,57	-1439,00	-863,89	-578,50	138,31	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z7	0	-633,54	-111,91	-357,88	-98,13	63,40	-1439,00	-2342,22	-712,78	-673,24	361,06	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z8	0	-93,76	-14,15	57,78	-289,18	560,21	-863,89	-712,78	-1395,72	-313,73	83,84	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z9	0	-362,59	9,42	-92,11	260,47	206,82	-578,50	-673,24	-313,73	-1273,66	254,41	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z10	0	-140,49	-24,61	-4,44	-199,87	157,50	138,31	361,06	83,84	254,41	-2419,32	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
w1	1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

z5	z6	z7	z8	z9	z10	w1	b	
0	0	0	0	0	0	1	0	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	

Příloha 3 *Tabulka na začátku fáze 1*

Příloha 3 *Tabulka na konci fáze 1*

		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	λ	z1	z2	z3	z4
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z1	0	0,00	647,52	611,23	839,64	318,44	95,83	54,76	594,54	325,71	547,81	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00
z2	0	0,00	-32,60	20,78	13,60	89,04	-25,19	-71,12	26,64	50,20	16,18	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00
z3	0	0,00	57,06	-898,60	404,42	34,67	-74,21	-280,81	134,85	-15,05	72,63	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00
z4	0	0,00	-178,52	-178,52	-3771,29	322,81	-154,94	-249,48	-440,53	109,13	-351,21	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00
z5	0	0,00	418,11	327,46	844,01	-3135,47	714,32	433,26	930,07	576,68	527,36	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z6	0	0,00	526,49	441,19	588,87	936,93	-2200,10	-846,54	-271,42	13,97	730,78	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z7	0	0,00	521,63	275,66	535,41	696,94	-805,46	-1708,68	-79,24	-39,70	994,60	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z8	0	0,00	79,61	151,54	-195,43	653,97	-770,13	-619,02	-1301,96	-219,97	177,60	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z9	0	0,00	372,01	270,48	623,06	569,41	-215,91	-310,64	48,86	-911,07	617,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z10	0	0,00	115,88	136,05	-59,38	297,99	278,80	501,55	224,33	394,90	-2278,83	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
x1	0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

		z5	z6	z7	z8	z9	z10	w1	b	
		0	0	0	0	0	0	1	0	
z1	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	688,30	688,30	
z2	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	40,78	40,78	
z3	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	77,07	77,07	
z4	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-151,34	-151,34	
z5	0	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	369,86	369,86	
z6	0	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	592,47	592,47	
z7	0	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	633,54	633,54	
z8	0	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	93,76	93,76	
z9	0	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	362,59	362,59	
z10	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	140,49	140,49	
x1	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00	
		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	

		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	λ	v1	v2	v3	v4	v5	v6
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z1	1	0,00	647,52	611,23	839,64	318,44	95,83	54,76	594,54	325,71	547,81	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z2	1	0,00	-32,60	20,76	13,60	89,04	-25,19	-71,12	26,64	50,20	16,18	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z3	1	0,00	57,06	-898,60	404,42	34,67	-74,21	-280,81	134,85	-15,05	72,63	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
z4	1	0,00	-178,52	-178,52	-3771,29	322,81	-154,94	-249,48	-440,53	109,13	-351,21	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
z5	1	0,00	418,11	327,46	844,01	-3135,47	714,32	433,26	930,07	576,68	527,36	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00
z6	1	0,00	526,49	441,19	588,87	936,93	-2200,10	-846,54	-271,42	13,97	730,78	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00
z7	1	0,00	521,63	275,66	535,41	696,94	-805,46	-1708,68	-79,24	-39,70	994,60	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z8	1	0,00	79,61	151,54	-195,43	653,97	-770,13	-619,02	-1301,96	-219,97	177,60	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z9	1	0,00	372,01	270,48	623,06	569,41	-215,91	-310,64	48,86	-911,07	617,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
z10	1	0,00	115,88	136,05	-59,38	297,99	278,80	501,55	224,33	394,90	-2278,83	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
x1	0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		0,00	2527,18	1157,27	-177,08	784,74	-3156,99	-3096,73	-133,85	284,80	1053,91	10,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

v7	v8	v9	v10	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9	z10	b	
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	688,30	1,06
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	40,78	-1,25
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	77,07	1,35
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-151,34	0,85
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	369,86	0,88
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	592,47	1,13
1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	633,54	1,21
0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	93,76	1,18
0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	362,59	0,97
0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	140,49	1,21
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00
1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2847,52	

Příloha 3 *Tabulka na začátku fáze 2*

		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	λ	v1	v2	v3	v4	v5	v6
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z1	1	0,00	0,00	-36,28	-12839,08	1489,28	-466,16	-850,11	-1003,27	721,51	-726,05	4,63	1,00	0,00	0,00	3,63	0,00	0,00
z2	1	0,00	0,00	53,38	702,31	30,09	3,11	-25,56	107,08	30,27	80,31	0,82	0,00	1,00	0,00	-0,18	0,00	0,00
z3	1	0,00	0,00	-955,66	-801,06	137,85	-123,74	-360,55	-5,97	19,84	-39,63	1,32	0,00	0,00	1,00	0,32	0,00	0,00
x2	0	0,00	1,00	1,00	21,12	-1,81	0,87	1,40	2,47	-0,61	1,97	-0,01	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00	0,00
z5	1	0,00	0,00	-90,65	-7988,56	-2379,44	351,43	-151,03	-101,66	832,26	-295,19	3,34	0,00	0,00	0,00	2,34	1,00	0,00
z6	1	0,00	0,00	-85,30	-10533,20	1888,93	-2657,06	-1582,28	-1570,59	335,79	-304,99	3,95	0,00	0,00	0,00	2,95	0,00	1,00
z7	1	0,00	0,00	-245,97	-10484,06	1640,16	-1258,20	-2437,63	-1366,43	279,16	-31,62	3,92	0,00	0,00	0,00	2,92	0,00	0,00
z8	1	0,00	0,00	71,93	-1877,16	797,92	-839,22	-730,27	-1498,41	-171,31	20,98	1,45	0,00	0,00	0,00	0,45	0,00	0,00
z9	1	0,00	0,00	-101,53	-7235,59	1242,08	-538,78	-830,51	-869,11	-683,67	-114,85	3,08	0,00	0,00	0,00	2,08	0,00	0,00
z10	1	0,00	0,00	20,17	-2507,35	507,53	178,22	339,61	-61,62	465,73	-2506,81	1,65	0,00	0,00	0,00	0,65	0,00	0,00
x1	0	1,00	0,00	0,00	-20,12	2,81	0,13	-0,40	-1,47	1,61	-0,97	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00
		0,00	0,00	-1369,93	-53563,75	5854,41	-5350,39	-6628,33	-6369,98	1829,59	-3917,85	24,16	1,00	1,00	1,00	15,16	1,00	1,00

		v7	v8	v9	v10	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9	z10	b	
		0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
z1	1	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	3,63	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	139,37	0,09
z2	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	-0,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	68,42	2,27
z3	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,32	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	28,69	0,21
x2	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,85	-0,47
z5	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,34	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	15,40	-0,01
z6	1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,95	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	146,13	0,08
z7	1	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,92	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	191,33	0,12
z8	1	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,45	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	26,27	0,03
z9	1	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,08	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	47,22	0,04
z10	1	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,65	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	42,25	0,08
x1	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,15	0,05
		1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	14,16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	705,09	

Příloha 3 *První krok v druhé fázi*

		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	λ	v1	v2	v3	v4	v5	v6
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v1	0	-476,04	0,00	0,00	0,00	0,00	-389,72	-369,78	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	-0,42	-0,02	0,02	-0,13	0,00
x3	0	0,02	0,00	1,00	0,00	0,00	0,10	0,26	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
x10	0	0,09	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,03	-0,14	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
x2	0	0,43	1,00	0,00	0,00	0,00	0,19	0,16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
λ	0	-15,60	0,00	0,00	0,00	0,00	-45,97	-97,26	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,79	0,04	0,02	0,04	0,00
v6	0	-390,18	0,00	0,00	0,00	0,00	-2099,60	-769,44	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,17	-0,11	0,03	0,02	1,00
v7	0	-371,54	0,00	0,00	0,00	0,00	-772,86	-1600,27	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,14	-0,25	-0,03	-0,03	0,00
x5	0	0,13	0,00	0,00	0,00	1,00	-0,02	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
x8	0	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,53	0,38	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
x4	0	-0,02	0,00	0,00	1,00	0,00	-0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
x9	0	0,30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,27	0,32	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

v7	v8	v9	v10	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9	z10	b
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0,00	-0,05	-0,30	-0,09	1,00	-0,42	-0,02	0,02	-0,13	0,00	0,00	-0,05	-0,30	-0,09	15,97740
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04336
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02405
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,75879
0,00	0,04	0,05	0,02	0,00	0,79	0,04	0,02	0,04	0,00	0,00	0,04	0,05	0,02	57,88596
0,00	-0,53	-0,27	0,03	0,00	-0,17	-0,11	0,03	0,02	1,00	0,00	-0,53	-0,27	0,03	47,04497
1,00	-0,37	-0,32	0,15	0,00	-0,14	-0,25	-0,03	-0,03	0,00	1,00	-0,37	-0,32	0,15	98,54931
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03898
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03749
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01434
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05297
0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	0,00

Příloha 3 *Poslední krok ve fázi 2*