Vliv změn měřítkování proměnných na hodnoty statistických charakteristik

Je zajisté užitečné vědět, které statistické charakteristiky modelu jsou dotčeny změnou měrových jednotek vysvětlujících veličin nebo vysvětlované veličiny. Pokud bychom toto neznali, byli bychom v pochybnostech, zda získané výsledky jsou nebo nejsou ovlivněny takovýmito změnami a nemohli bychom vyvozovat příslušné statistické závěry s náležitou jistotou.

Předpokládejme, že původní hodnoty vysvětlujících veličin jsou ve vektorech $x_{.1}, x_{.2}, x_{.3}, \ldots, x_{.K}$ **a původní hodnoty vysvětlované proměnné jsou ve vektoru** y_t**.**

Nechť nyní dojde ke změně měřítka, takže nové *„měřítkované“* proměnné jsou

$\widetilde{x}_{.1}, \widetilde{x}_{.2}, \widetilde{x}_{.3}, \ldots, \widetilde{x}_{.K}$**, resp.** $\widetilde{y}$ **a pro vztahy mezi původními a novými proměnnými platí vztahy**

$$\widetilde{x}_{.1} = c_1.x_{.1}, \widetilde{x}_{.2} = c_2.x_{.2}, \widetilde{x}_{.3} = c_3.x_{.3}, \ldots, \widetilde{x}_{.K} = c_K x_{.K} \quad , \quad \textbf{resp.} \quad \widetilde{y}_t = c.y_t \ , \quad \text{kde}$$

nenulové reálné koeficienty $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_K$**, resp. reálný skalár** c **představují změny měřítek, tj. přepočtené hodnoty nových měrových jednotek vzhledem k jednotkám původním.**

Abychom vyšetřili dopad změn měřítek na hodnoty statistických charakteristik, musíme vyjádřit vektorově/maticové vztahy mezi původními a změněnými modelovými proměnnými. Toho dosáhneme zápisem vztahů mezi *prostými* a *ovlnkovanými* veličinami:

(1) $$\widetilde{X} = X.C \qquad \textbf{resp.} \qquad \widetilde{y} = y.c \quad ,$$

kde C **je diagonální matice typu** $[k,k]$ **s jednotlivými** c_k **na hlavní diagonále (ostatní prvky** C **jsou nulové) a** c **je skalární konstanta, kterou násobíme jednotlivé složky vektoru** y**.** (Pokud každou složku původního vektoru y zestonásobíme, pak $c = 100$.)

Nyní zapíšeme vztahy mezi původními měrovými jednotkami, ve kterých jsou vyjádřeny jednotlivé proměnné, a změněnými měrovými jednotkami[1].

V důsledku toho, že matice C **je** (jako diagonální matice s nenulovými prvky) **regulární, můžeme psát**

(2) $$X = \widetilde{X}.C^{-1}. \qquad \textbf{resp.} \qquad y = \widetilde{y}c^{-1} = \frac{\widetilde{y}}{c} \quad ,$$

Nejprve vyšetříme jednotlivé fragmenty vystupující ve výrazech pro důležité statistické charakteristiky. Postupně máme[2]

$$(X'X)^{-1} = \left[(\widetilde{X}C^{-1})'\widetilde{X}C^{-1}\right]^{-1} = \left[C^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{X}C^{-1}\right]^{-1} = C(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}C$$

$$X'y = (\widetilde{X}C^{-1})'\widetilde{y}c^{-1} = C^{-1}c^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{y}$$ a odtud dále

a) $$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = C(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}C.C^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{y}.c^{-1} = C(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{y}.c^{-1} = c^{-1}C\hat{\widetilde{\beta}}.$$

---

[1] **S ohledem na symetrii matice** C **platí:** $C = C'$**,** $C^{-1} = C^{-1}{}'$

[2] **Ovlnkované symboly píšeme ve vztazích napravo; odpovídá to interpretaci, kdy se tážeme, jak budou *původní* veličiny touto změnou ovlivněny.**

U dalších veličin dostáváme

b1) $\hat{\beta}' X' y = \left[c^{-1} C \hat{\tilde{\beta}} \right]' . \left[C^{-1} \tilde{X}' \tilde{y} c^{-1} \right] = c^{-2} \hat{\tilde{\beta}}' C . C^{-1} \tilde{X}' \tilde{y} = c^{-2} \hat{\tilde{\beta}}' \tilde{X}' \tilde{y}.$

b2) $y' y = \left[c^{-1} \tilde{y} \right]' \left[c^{-1} \tilde{y} \right] = c^{-2} \tilde{y}' \tilde{y}.$ **a odtud** $R^2 = \dfrac{\hat{\beta}' X' y}{y' y} = \dfrac{c^{-2} \hat{\tilde{\beta}}' \tilde{X}' \tilde{y}}{c^{-2} \tilde{y}' \tilde{y}} = \tilde{R}^2$

c1) $SST = \sum (y_t - \bar{y})^2 = \sum (\tilde{y}_t c^{-1} - \bar{y} c^{-1})^2 = c^{-2} \sum (\tilde{y}_t - \bar{y})^2 = c^{-2} \widetilde{SST}$

c2)
$$SSE = \sum e_t{}^2 = \sum (y_t - X_t \hat{\beta})^2 = \sum (c^{-1} \tilde{y}_t - \tilde{X}_t C^{-1} c^{-1} C \tilde{\beta})^2 =$$
$$= \sum (c^{-1} (\tilde{y}_t - \tilde{X}_t \tilde{\beta}))^2 = c^{-2} \widetilde{SSE}$$

Odtud dostaneme jednak opět např.

$R^2 = 1 - \dfrac{SSE}{SST} = 1 - \dfrac{c^{-2} \widetilde{SSE}}{c^{-2} \widetilde{SST}} = 1 - \dfrac{\widetilde{SSE}}{\widetilde{SST}} = \tilde{R}^2$ **, jednak také**

$s_e = \sqrt{\dfrac{SSE}{T-k}} = \sqrt{\dfrac{c^{-2} \widetilde{SSE}}{T-k}} = c^{-1} \tilde{s}_e$ **a tedy následně**

c3) $S_{bb} = s_e{}^2 \, (X' X)^{-1} = c^{-2} \tilde{s}_e{}^2 C (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} C = c^{-2} C S_{\tilde{b}\tilde{b}} C$

d) ***t-statistiky měřítkovaných proměnných nedoznají žádných změn*, neboť**

$$t_{b_k} = \frac{b_k}{s_{b_k}} = \frac{c^{-1} c_k \tilde{b}_k}{c^{-1} c_k \tilde{s}_{b_k}} = \frac{\tilde{b}}{\tilde{s}_{b_k}} = \tilde{t}_{b_k}$$

Zde jsme uplatnili okolnost, že matice C je diagonální. Máme tedy např.

$$b_k = c^{-1} . c_k \tilde{b}_k$$

a vezmeme-li druhé odmocniny z diagonálních prvků S_{bb}, dostaneme podobně

$$s_{b_k} = c^{-1} c_k . \tilde{s}_{b_k}$$

e) *Durbin-Watsonův koeficient autokorelace reziduí*[3], který je definován jako

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t{}^2} = \frac{\sum_{t=2}^{T} (c^{-1} \tilde{e}_t - c^{-1} \tilde{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} (c^{-1} \tilde{e}_t)^2} = \frac{c^{-2} \sum_{t=2}^{T} (\tilde{e}_t - \tilde{e}_{t-1})^2}{c^{-2} \sum_{t=1}^{T} \tilde{e}_t{}^2} ,$$

se* rovněž *nezmění*. *Rezidua se změní srovnatelně s vysvětlovanou proměnnou

$e_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - x_{t.} \hat{\beta} = \tilde{y}_t c^{-1} - (\tilde{x}_{t.} C^{-1}).(c^{-1} C \tilde{y}_t) = c^{-1} (\tilde{y}_t - \hat{\tilde{y}}) = c^{-1} \tilde{e}_t$ [4]

[3] Znamená to mj., že žádná z obvyklých testových statistik nebude změnou měrových jednotek dotčena.

[4] Jako $x_{.t}$ jsme označili t-tý řádek matice X

Příklad

Nejčastěji vyjadřujeme změnu měřítek v celých mocninách 10 jako měřítka měnících se součinitelů. Změna jednotek se zde provede pouhým **posunem desetinné čárky. Přitom se hodnoty regresních koeficientů a k nim příslušných směrodatných odchylek změní přímo úměrně příslušnému 10^k-násobku vysvětlované proměnné a** současně **nepřímo úměrně 10^j-násobku vysvětlující veličiny, u které tento koeficient (resp. jeho směrodatná odchylka) stojí.**

Ilustrace:

Mějme regresi se dvěma vysvětlujícími proměnnými $y_t = \alpha + \beta_1 x_{t2} + \beta_2 x_{t3}$ **.**

Předpokládejme, že měrové jednotky, v nichž vyjadřujeme vysvětlující proměnnou x_2 **ztisícinásobíme a jednotky, v nichž vyjadřujeme vysvětlující proměnnou** x_3, **zdesetinásobíme** (*ke změně úrovňové konstanty* x_1 *přímý důvod nemáme*). **Současně zestonásobíme hodnoty vysvětlované proměnné** y_t**. Budeme mít tedy modifikace**

$\tilde{y}_t = 100.y_t \, , \tilde{x}_{t1} = x_{t1} \, , \tilde{x}_{t2} = 1000.x_{t2} \, , \tilde{x}_{t3} = 10.x_{t3}$

Za uvedených předpokladů máme

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad c = 100$$

Nejprve vyšetříme jednotlivé fragmenty vystupující ve výrazech pro důležité statistické charakteristiky. Postupně máme

$$\hat{\beta} = \frac{C}{c}.\hat{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 1/100 & 0 & 0 \\ 0 & 1000/100 & 0 \\ 0 & 0 & 10/100 \end{pmatrix} \hat{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix} \hat{\tilde{\beta}}$$

Uvedené změny budou mít za následek to, že v nově určeném vektoru regresních koeficientů $\tilde{\beta}$ **bude úrovňová konstanta 100-násobkem původní, regresní koeficient** $\tilde{\beta}_2$ **u proměnné** $x_{.2}$ **desetinou a regresní koeficient** $\tilde{\beta}_3$ **u proměnné** $x_{.3}$ **desetinásobkem původních regresních koeficientů** $\beta_{2,}\beta_3$.

Na základě dříve dosažených výsledků lze tedy konstatovat, že

a) regresní koeficienty ***se změní v proporcích 100 resp. 1/10 a 10 vůči původním***

b) směrodatné odchylky regresních koeficientů ***se*** *rovněž* ***změní v proporcích 100 resp. 1/10 a 10 vůči původním .***

c) t-statistiky regresních koeficientů ***se nezmění***

c) rozptyl závisle proměnné ***se zvýší*** 10^4 ***násobně***

e) reziduální směrodatná odchylka ***se zvýší 100 násobně***

f) koeficient determinace ***se nezmění***

g) Durbin-Watsonův koeficient autokorelace reziduí ***se nezmění***

***Ještě jednou** shrneme důsledky pro nejčastěji vyskytující se případy:*

1. ***regresní koeficienty***

1A. při změně měřítka závisle proměnné $\widetilde{y}_t = d.y_t$ (d skalár)

***změní se ve stejném poměru než daná závisle proměnná**, protože*

$$\hat{\widetilde{\beta}} = (X'X)^{-1}X\,\widetilde{y} = (X'X)^{-1}X\,d.y = d.(X'X)^{-1}X\,y = d.\beta$$

1B. při změně měřítka jediné (i-té) **nezávisle proměnné** $\widetilde{x}_{ti} = d_i.x_{ti}$

(d_i skalár nacházející se na i-tém místě hlavní diagonály matice D, ostatní diagonální prvky jsou 1) ***změní se v opačném poměru než daná závisle proměnná***

$$\hat{\widetilde{\beta}} = (\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}\,y = (D'X'XD)^{-1}XD\,y = d_i^{-2}.(X'X)^{-1}d_i X\,y = \frac{1}{d_i}.\hat{\beta}$$

1C při změně měřítka závisle a jediné nezávisle proměnné $\widetilde{y}_t = d.y_t, \widetilde{x}_{ti} = d_i.x_{ti}$,

$$\hat{\widetilde{\beta}} = (\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}\,\widetilde{y} = (D.X'XD)^{-1}X.D\,dy = d_i^{-2}.(X'X)^{-1}d_i X\,d.y = \frac{d}{d_i}\hat{\beta}$$

2. ***směrodatné odchylky parametrů***

2A při změně měřítka závisle proměnné $\widetilde{y}_{ti} = d.y_{ti}$ (d skalár)

***změní se ve stejném poměru jako závisle proměnná**, protože*

$$\widetilde{s}_\beta = \sqrt{(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{s}^2{}_\varepsilon} = \sqrt{(X'X)^{-1}(d.s_\varepsilon)^2} = d.\sqrt{(X'X)^{-1}s^2{}_\varepsilon} = d.s_\beta$$

2B při změně měřítka nezávisle proměnné $\widetilde{x}_{ti} = d_i.x_{ti}$ (d_i skalár)

změní se v opačném poměru než daná vysvětlovaná proměnná

$$\widetilde{s}_\beta = \sqrt{(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}s^2{}_\varepsilon} = \sqrt{(D'X'.XD)^{-1}s_\varepsilon{}^2} = \frac{1}{d_i}\sqrt{(X'X)^{-1}s^2{}_\varepsilon} = \frac{1}{d_i}.s_\beta$$

2C při změně měřítka závisle i některé z nezávisle proměnných

$$\widetilde{s}_\beta = \sqrt{(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{s}^2{}_\varepsilon} = \sqrt{(c^{-1}X'.c^{-1}X)^{-1}(d.s_\varepsilon)^2} = \frac{d}{c}\sqrt{(X'X)^{-1}s^2{}_\varepsilon} = \frac{d}{c}.s_\beta$$

3. ***t-statistiky regresních parametrů***

3A. při změně měřítka závisle proměnné $\widetilde{y}_{ti} = d.y_{ti}$ (d skalár)

$$\widetilde{t}_\beta = \frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{s}_\phi} = \frac{d.\beta}{d.s_\beta} = t_\beta$$ *tj.**nezmění se***

3B. při změně měřítka nezávisle proměnné

$$\widetilde{t}_\beta = \frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{s}_\phi} = \frac{c^{-1}.\beta}{c^{-1}.s_\beta} = t_\beta$$ *tj.**nezmění se***

3C. při změně měřítka závisle i některé z nezávisle proměnných

$$\widetilde{t}_\beta = \frac{\widetilde{\beta}}{s_\phi} = \frac{c^{-1}d.\beta}{c^{-1}d.s_\beta} = t_\beta$$ *tj, **nezmění se***

4. **Rezidua**

4A. **při změně měřítka závisle proměnné**

mění srovnatelně s vysvětlovanou proměnnou

$$e_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - x_{t.}\hat{\beta} = \tilde{y}_t c^{-1} - (\tilde{x}_{t.}C^{-1}).(c^{-1}C\tilde{y}_t) = c^{-1}(\tilde{y}_t - \hat{\tilde{y}}) = c^{-1}\tilde{e}_t$$

4B. při změně měřítka nezávisle proměnné se nezmění

4C. při změně měřítka závisle i některé z nezávisle proměnných

5. Standardní chyba (směrodatná odchylka) reziduí

4A. **při změně měřítka závisle proměnné**

4B. při změně měřítka nezávisle proměnné

4C. při změně měřítka závisle i některé z nezávisle proměnných

***6. koeficient determinace se nezmění** ani*

4A. při změně měřítka závisle proměnné

4B. při změně měřítka nezávisle proměnné

4C. při změně měřítka závisle i některé z nezávisle proměnných

7. rozptyl závisle proměnné

6A. při změně měřítka závisle proměnné

6B. při změně měřítka nezávisle proměnné

6C. při změně měřítka závisle i některé z nezávisle proměnných

Schématické vyjádření:

(1) $\tilde{X} = X.C$ **resp.** $\tilde{y} = y.c$,

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & .... & \tilde{x}_{1k} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & .... & \tilde{x}_{2k} \\ \tilde{x}_{31} & \tilde{x}_{32} & .... & \tilde{x}_{3k} \\ .... & .... & .... & .... \\ \tilde{x}_{T1} & \tilde{x}_{T2} & .... & \tilde{x}_{Tk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & .... & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & .... & x_{2k} \\ x_{31} & x_{32} & .... & x_{3k} \\ .... & .... & .... & .... \\ x_{T1} & x_{T2} & .... & x_{Tk} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ .... \\ \tilde{y}_{T3} \end{pmatrix} = c. \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ .... \\ y_{T3} \end{pmatrix}$$